المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي - قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

العبيكان
Obeikan

الطبعة التجريبية
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م
يوزع مجانًا ولا يباع

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة التجريبية
١٤٣٣ هـ - ٢٠١٢ م

الرياضيات
الصف الثالث الثانوي
قسم العلوم الطبيعية

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

أعدّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان
عمر محمد أبوغليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
أحمد مصطفى سمارة
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

www.macmillanmh.com
www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education
العبيكان Obeikan

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولًا: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخطط الفصل وأهدافه، ومصادر تدريسه، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلُّم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبيِّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة تحقق أهداف الدرس بحسب مستويات الطلاب.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.
ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبِّي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم على أداء رسالتهم.

الفهرس

الفصل 5 المتجهات

الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الفهرس

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

الفصل 8 النهايات والاشتقاق

الفصل 5 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (9)

	الدرس 5-1 (3) حصص	الدرس 5-2 (4) حصص	الدرس 5-3 (4) حصص
العنوان	**مقدمة في المتجهات**	**المتجهات في المستوى الإحداثي**	**الضرب الداخلي**
الأهداف	• إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم وتمثيلها هندسيًا. • تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين. • حل مسائل تطبيقية على المتجهات .	• إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًا. • كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما. • إيجاد مسقط متجه على آخر.
المفردات الأساسية	المتجه، نقطة البداية، نقطة النهاية، الوضع القياسي، الاتجاه، الطول، الاتجاه الربعي، الاتجاه الحقيقي، المتجهات المتوازية، المتجهات المتكافئة، المتجهان المتعاكسان، المحصلة، قاعدة المثلث، قاعدة متوازي الأضلاع، المتجه الصفري، المركبات، المركبات المتعامدة.	الصورة الإحداثية، متجه الوحدة، توافق خطي	الضرب الداخلي، المتجهان المتعامدان، مسقط متجه، الشغل
تمثيلات متعددة	ص (17)		
مصادر الدرس	• كتاب التمارين ، ص(4) . دون ضمن فوق	• كتاب التمارين ، ص (5) دون ضمن فوق	• كتاب التمارين ، ص (6) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	مدونة	تسجيل مرئي	الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (15, 18)	ص (20, 23, 25)	ص (30, 33)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (34)

المفاتيح: ضمن ضمن المستوى دون دون المستوى فوق فوق المستوى

المتجهات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(19) حصة	(4) حصص	(23) حصة

الدرس 4-5 (4) حصص	الدرس 5-5 (4) حصص
المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد	**الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء**
• تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد. • التعبير عن المتجهات جبريًّا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء. • إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات، واستعماله في ايجاد المساحات والحجوم .
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد المحور الثُّمن الثلاثي المرتب	الضرب الاتجاهي متوازي السطوح الضرب القياسي الثلاثي
• كتاب التمارين ، ص (7) دون ضمن فوق	• كتاب التمارين ، ص (8) دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• نظام استجابة الطالب
ص (37, 38, 40)	ص (43, 45)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة، ص (46–50)
- اختبار الفصل، ص (51)

الفصل 5

التقويم والمعالجة

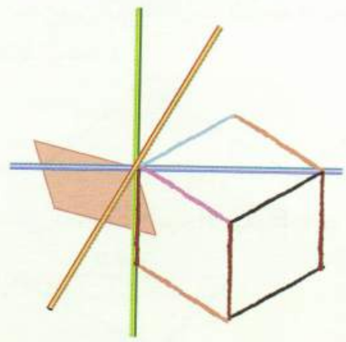
	التشخيص	المرجع	إرشاد المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 5**			
	التهيئة للفصل الخامس، ص (9)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (9)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	تحقق من فهمك	كتاب الطالب	تنويع التعليم	دليل المعلم
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تنويع الواجبات المنزلية	دليل المعلم
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه!	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (34)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (34)	دليل المعلم
			دليل الدراسة والمراجعة، ص (50 - 46)	كتاب الطالب
			زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 5، ص (50-46)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (51)	دليل المعلم
	اختبار الفصل، ص (51)	كتاب الطالب		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 5**			
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزع الطلاب إلى مجموعات ثلاثية بحيث يكتب أحد الطلاب الصورة الإحداثية لمتجهين، ثم يمثل الطالب الثاني هذين المتجهين في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي، ويجد الطالب الثالث الضرب الداخلي للمتجهين؛ للتحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا. ثم تقارن المجموعة الرسم مع ناتج الضرب الداخلي.

المتعلمون الحركيون اطلب إلى مجموعات الطلاب عمل نموذج للنظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد باستعمال قصبات العصير والغراء أو المعجون، ثم اطلب إليهم تحديد الأثمان التي ينقسم إليها الفضاء، وأن يستعملوا صفحة من دفتر لتمثيل مستوى، واستعمال عيدان القش أو الكبريت لتمثيل متوازي السطوح.

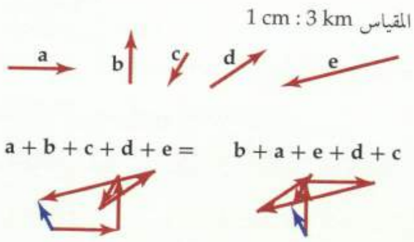


البديل 2 دون المتوسط دون

من القوى المؤثرة للأسفل والتي يسهل قياسها وزن جسم. اطلب إلى الطلاب إيجاد وزن جسم من داخل الصف، ثم اطرح السؤال الآتي: ما دور الجاذبية الأرضية في تحديد الوزن؟ إجابة ممكنة: يُعَرَّف الوزن على أنه القوة المؤثرة للأسفل بسبب الجاذبية الأرضية. اطلب إلى الطلاب البحث في الإنترنت حول أثر الجاذبية على القمر أو الكواكب الأخرى. واستعمال ما توصلوا إليه لحساب أوزانهم على هذه الكواكب.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

كلف مجموعات الطلاب باختيار مقياس رسم، ورسم خمسة متجهات مختلفة وتسميتها بالحروف من a إلى e. ثم يقوم كل فرد في المجموعة بجمع المتجهات بترتيب يختلف عن ترتيب زميله، وتمثيل الجمع بالرسم مستعملين قاعدة وضع نقطة بداية المتجه الثاني على نقطة نهاية المتجه الأول (قاعدة المثلث). كلف الطلاب استعمال منقلة ومسطرة ومقياس الرسم؛ لإيجاد مقدار واتجاه المحصلة، ثم يقارن الطلاب النتائج التي حصلوا عليها، ثم اطلب إلى مجموعات الطلاب كتابة تقرير عن ذلك فمثلاً:



سيتوصل الطلاب إلى أن الترتيب غير مهم عند جمع المتجهات؛ أي أن محصلة جمع المتجهات تكون هي نفسها بغض النظر عن الترتيب الذي جمعت فيه هذه المتجهات.

الفصل 5

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات.
- جمع، وطرح، وضرب المصفوفات، وضرب المصفوفة في عدد ثابت.
- إيجاد محددات المصفوفات من الرتبة 2×2، ومن الرتبة 3×3.

الفصل 5

- إجراء العمليات على المتجهات، وتمثيلها هندسيًّا وجبريًّا.
- تحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.
- كتابة المتجه كتوافق خطي باستعمال متجهي الوحدة.
- إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله؛ لإيجاد الزاوية بينهما.
- إيجاد مسقط متجه على متجه آخر.
- إجراء العمليات على المتجهات وتمثيلها في الفضاء .
- إيجاد الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء.
- إيجاد مساحة متوازي الأضلاع وحجم متوازي السطوح في الفضاء.

ما بعد الفصل 5

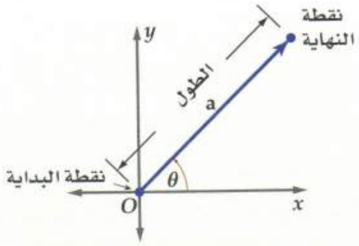
الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- التعبير عن الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية، وتمثيلها بيانيًّا في مستوى آرجاند.
- يتعرف مفهومي متوسط السرعة المتجهة، والسرعة المتجهة اللحظية، ويجدهما.

نظرة على الدروس

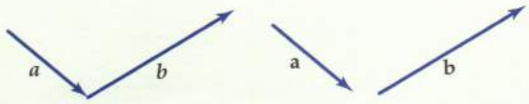
5-1 مقدمة في المتجهات

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة لها نقطة بداية ونقطة نهاية. ويكون المتجه في الوضع القياسي إذا كانت نقطة بدايته هي نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.

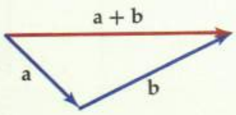


المقياس: 1cm = 5 ft/s

يمكن جمع متجهين أو أكثر معًا لتكوين متجه واحد يُسمى المحصلة. وتسمى المتجهات التي محصلتها المتجه **r** مركبات **r**. لإيجاد محصلة المتجهين **a** و **b**، ارسم المتجه **b** بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.



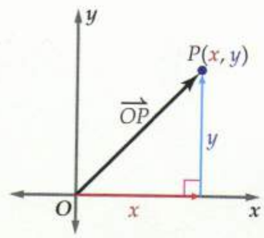
فتكون المحصلة هي المتجه ذا اللون الأحمر **a + b**.



ويمكن كذلك ضرب المتجه في عدد حقيقي، ولتمثيل المتجه **3a**، ارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a** وفي نفس اتجاهه. أما لتمثيل المتجه **−3a** ، فارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a** وبعكس اتجاهه.

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

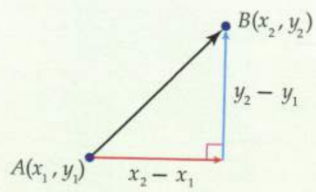
الصورة الإحداثية لمتجه أو المتجه الجبري $\langle x, y \rangle$، هي طريقة أخرى للتعبير عن المتجه الهندسي $\overrightarrow{OP}$ عندما يكون في وضع قياسي. وتسمى الزاوية θ المحصورة بين المحور x الموجب والمتجه بالزاوية المتجهة، وهي التي تحدد اتجاه المتجه.



لإيجاد الصورة الإحداثية للمتجه AB عندما لا يكون في الوضع القياسي، استعمل إحداثيي نقطتي نهايته وبدايته:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

طول $\overrightarrow{AB}$ هو $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



إن عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد ثابت على المتجهات تشبه العمليات المقابلة لها على المصفوفات، ويكون ناتج كل منها متجهًا.

ناتج الجمع $ai + bj$ هو توافق خطي باستعمال متجهي الوحدة i, j .

5-3 الضرب الداخلي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$ على الصورة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. وناتج الضرب الداخلي لمتجهين هو عدد وليس متجهًا.

إذا كان ناتج الضرب الداخلي لمتجهين هو 0، فإن المتجهين متعامدان.

ومسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ هو متجه يوازي $\mathbf{v}$.

ويمكن استعمال مساقط المتجهات؛ لإيجاد قوة، وحساب الشغل الناتج عن قوة.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

يتكون نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد مما يأتي:

- المحاور x, y, z .
- ثماني مناطق تُسمى أثمانًا.

تُمثَّل النقطة في الفضاء بثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y, z).

إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء، فإن:

- المسافة بين النقطتين A, B تُعطى بالقانون:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي النقطة $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ ، حيث (x_1, y_1, z_1) نقطة نهايته.

الصورة الإحداثية للمتجه AB في الوضع غير القياسي الذي نقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ونقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ، هي $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$.

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء على الصورة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين يساوي 0، فإن المتجهين متعامدان. الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء هو

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

حيث $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$.

مقدار الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء يمثل مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي يمثل المتجهان ضلعين متجاورين فيه.

إذا التقت نقاط بداية ثلاثة متجهات في نقطة واحدة، وكانت المتجهات تقع في مستويات مختلفة، فإنها تشكل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي سطوح، ويمثل مقدار الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات الثلاثة حجم متوازي السطوح.

الفصل 5 المتجهات Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة: تستعمل المتجهات لنمذجة التغيرات في الحياة. فيمكن مثلًا استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما سوف تتعلمه في هذا الفصل .

الفصل 5 ملاحظات

مشروع الفصل

رمي الرمح

على الطلاب استعمال ما تعلموه حول المتجهات في حل مسائل من واقع الحياة.

- اطلب إلى كل طالب تحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية قياسها 20° مع الأفقي.
- اطلب إلى الطلاب كتابة تخميناتهم حول محصلة سرعة واتجاه حركة الرمح إذا زاد قياس الزاوية.
- اطلب إليهم التحقق من صحة تخميناتهم باستعمال الزوايا 30°, 40°, 50°, 60°, 70°.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: الثُّمْن هو أحد ثمانية مناطق في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.

مثال: إذا نظرت إلى أحد أركان غرفة، فإن الأرض تمثل المستوى xy في الثمن الأول.

سؤال: لماذا تعتقد أن أرض الغرفة تقع في المستوى xy؟ المحوران اللذان يشكلان ضلعين متجاورين لأرض الغرفة هما المحوران x ، y.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

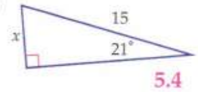
أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

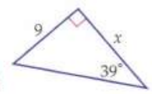
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. **1-4) انظر الهامش**

1) $(1, 4), (-2, 4)$
2) $(-5, 3), (-5, 8)$
3) $(2, -9), (-3, -7)$
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

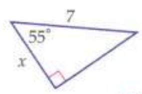
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشر.

5)


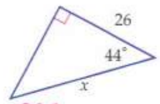
5.4

6)


11.1

7)


4.0

8)


36.1

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكل منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض °40، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة. **22.8 ft**

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ، فاكتب " لايوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.
10-12) انظر الهامش

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$
11) $a = 15, b = 16, A = 127°$
12) $a = 30, b = 19, A = 91°$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

قانون المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in the Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

النسبة المثلثية (trigonometric ratio)

نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

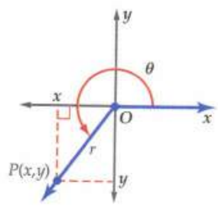
الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of angels)

لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

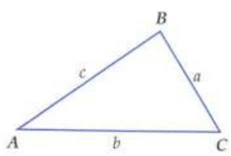
$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$



قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا... فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	**ضمن المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في: إيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي وتحديد إحداثيات منتصفها، والدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية، وحل المثلث.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

1) $3, \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$
2) $5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$
3) $\sqrt{29}, \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$
4) $\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$
10) $B \approx 33°, C \approx 19°, c \approx 4.0$
11) لا يوجد حل.
12) $B \approx 39°, C \approx 50°, c \approx 23.0$

5-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

حل المثلث باستعمال حساب المثلثات.

الدرس 5-1

- إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وتمثيلها هندسيًّا.
- تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- حل مسائل تطبيقية على المتجهات.

ما بعد الدرس 5-1

تمثيل المتجهات و إجراء العمليات الجبرية عليها.

كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

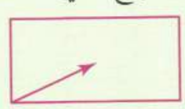
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا ضُربت كرة، فما الشيئان اللذان تحتاج إليهما لتحديد موقع الكرة؟ سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها.
- ارسم مستطيلًا. وتخيّل أنك تضرب كرة قدم من الزاوية السفلى اليسرى للمستطيل. ارسم سهمًا من الزاوية إلى الموقع الذي ستقف عنده الكرة.



- إذا ضُربت الكرة بقوة أكبر، فكيف سترسم السهم؟ إجابة ممكنة: أرسم سهمًا أطول.

5-1 مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث.

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسيًا.
- أحلل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحل مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

الكمية المتجهة vector quantity
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
الاتجاه direction
الطول (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتكافئة equivalent vectors
المتجهان المتعاكسان opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تعتمد المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كل من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

المتجهات يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة وعندئذٍ تُسمى كمية قياسية (عددية)، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **الكمية المتجهة** فهي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك فهي كمية متجهة.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h.

بما أن لهذه الكمية قيمة هي 15 mi / h ، وليس لها اتجاه؛ لذا فإن هذه السرعة كمية قياسية.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min باتجاه الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة هي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ لذا فإن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

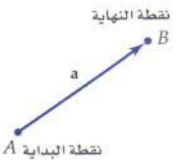
حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية 15° باتجاه شرق الجنوب. كمية متجهة

1B) هبوط مظلي رأسيًّا إلى الأسفل بسرعة 12.5 mi / h . كمية متجهة

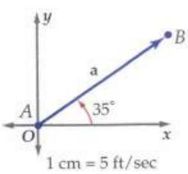
1C) دفع طفل مزلجة بقوة مقدارها 40 N . كمية قياسية

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة، أو سهم يظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل، فإن **المتجه يكون في الوضع القياسي**. ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو 35° .

أما **طول المتجه** فيمثِّله طول القطعة المستقيمة في الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s ، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft/s .



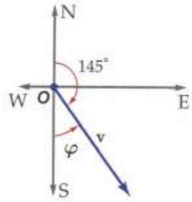
مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (15)	• تنويع التعليم ص (15)	• تنويع التعليم ص (18)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تُعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي 145°.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ، وتُقرأ فاي، وهي قياس اتجاهي بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي 35° شرق الجنوب، وتُكتب S 35° E.



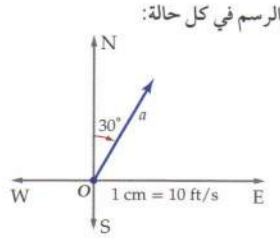
كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي**، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025°.

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

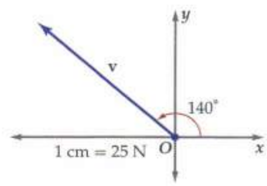
a) $\mathbf{a} = 20$ ft/s باتجاه 030°.

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 10 ft/s، وارسم سهمًا طوله 10 ÷ 20، أو 2cm بزاوية قياسها 30° من الشمال، وباتجاه عقارب الساعة.



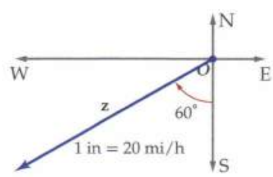
b) $\mathbf{v} = 75$ N، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس الرسم 1 cm = 25 N، وارسم سهمًا طوله 25 ÷ 75، أو 3cm في الوضع القياسي، وبزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الموجب للمحور x.



c) $\mathbf{z} = 30$ mi/h، باتجاه S 60° W.

استعمل مقياس الرسم 1 in = 20 mi / h، وارسم سهمًا طوله 30 ÷ 20 = 1.5in، بزاوية قياسها 60° باتجاه غرب الجنوب.



تنبيه!

الطول يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة.

تحقق من فهمك

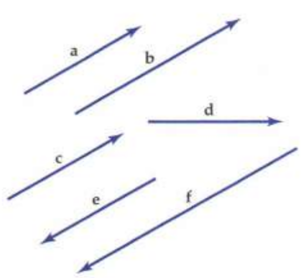
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20$ ft/s، باتجاه 065°. **2A–C)** انظر ملحق الإجابات

2B) $\mathbf{u} = 15$ mi/h، باتجاه S 25° E.

2C) $\mathbf{m} = 60$ N، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك بحاجة إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتكافئة** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور، $\mathbf{a}, \mathbf{c}$؛ لهما الطول والاتجاه نفسيهما، فهما متكافئتان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$؛ $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$، لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه **a** على الصورة $-\mathbf{a}$. ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

المتجهات

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز الكميات المتجهة.

المثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل المتجه هندسيًا.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًا.

المثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يضرب لاعب كرة قدم بسرعة 60 mi/h باتجاه شمال غرب. متجهة

b) يرسل لاعب كرة تنس أرضي بسرعة 110 mi/h. قياسية

c) يركض لاعب مسافة 100 m شمالًا. متجهة

2 استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة: للفروع a-c انظر الهامش

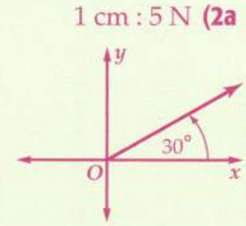
a) $\mathbf{v}$ قوة مقدارها 10 N بزاوية قياسها 30° عن المستوى الأفقي.

b) $\mathbf{z} = 25$ m/s باتجاه S70° W

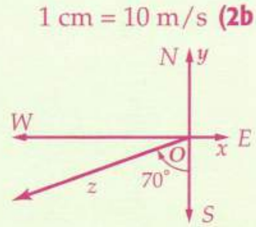
c) $\mathbf{t} = 10$ mi/h باتجاه 025°.

إجابة (المثال الإضافي 2):

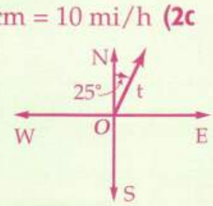
2a) 1 cm : 5 N



2b) 1 cm = 10 m/s



2c) 1 cm = 10 mi/h



عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

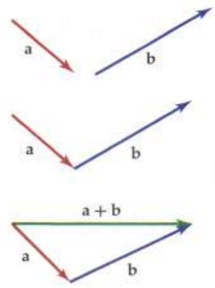
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.

الخطوة 2 محصلة المتجهين **a, b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.



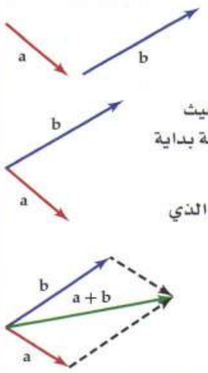
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b**، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.

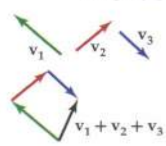
الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a, b**.

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع.



إرشادات للدراسة

المحصلة يتطلب استعمال قاعدة متوازي الأضلاع؛ لإيجاد محصلة أكثر من متجهين، إعادة الرسم أكثر من مرة. لذا، من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة المثلث؛ لإيجاد محصلة ثلاثة متجهات فأكثر، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

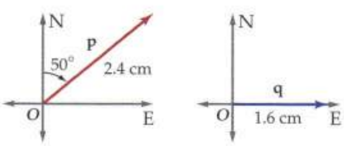


مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m باتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وفي أي اتجاه يكون؟

افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثِّل **p, q** باستعمال مقياس الرسم 1cm = 50 m.

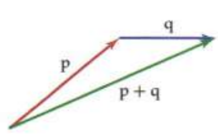
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله 2.4 cm؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شرق الشمال؛ ليُمثِّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله 1.6 cm = 50 ÷ 80 باتجاه الشرق؛ ليُمثِّل المتجه **q**.



1 cm = 50 m

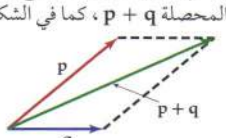
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.



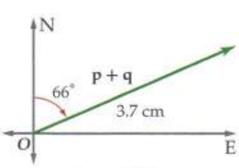
الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثِّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي شمال – جنوب كما في الشكل المجاور.

تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثِّل 3.7 × 50 = 185 m. وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.



1 cm = 50 ft

مثال إضافي

نزهة: قام فيصل بنزهة مشيًّا على الأقدام خارج مخيمه الكشفي، فسار مسافة 2 km من المخيم باتجاه N 30° W، ثم سار مسافة 2 km باتجاه الشرق. كم يبعد فيصل عن مخيمه الكشفي وفي أي اتجاه يكون؟ 2 km, N 30° E

إرشادات للمعلم الجديد

أشكال عند حل الأمثلة، من المهم أن يبدأ الطلاب برسم أشكال دقيقة. شجع الطلاب على استعمال ورق الرسم البياني، والتحقق من معقولية إجاباتهم من خلال الأشكال.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لعمل مدونة عن الطرائق التي يستعملونها؛ في إيجاد محصلة متجهين. واطلب إليهم أن يراجع بعضهم أوراق بعض، وأن يعدلوها في أثناء بناء المدونة.

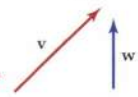
المحتوى الرياضي

جمع المتجهات وطرحها

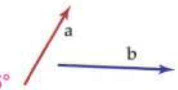
لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع تستعمل كذلك لطرح المتجهات. فعند جمع متجهين، يكون ناتج الجمع هو قطر متوازي الأضلاع المرتبط بالمتجهين، أما عند طرح متجهين، فإن ناتج الطرح هو القطر الآخر لمتوازي الأضلاع هذا.

تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A


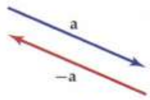
3 cm; 61°

(3B


3 cm; 25°

(3C **لعبة أطفال:** رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s ، باتجاه 310° ، فارتدت باتجاه 055° ، وبسرعة 4 in/s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة) 7.1 in/s; 343°

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وتشبه عملية طرح المتجهات، عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{p}+(-\mathbf{q})$.



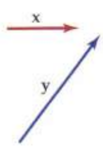
ويمكن كذلك ضرب المتجه في عدد حقيقي.

مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k>0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k<0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

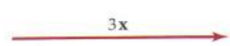
مثال 4 — العمليات على المتجهات



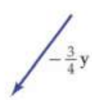
ارسم المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x}+\left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 5.1.1 .

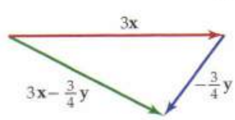
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 5.1.2 ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 5.1.3 .



الشكل 5.1.1



الشكل 5.1.2

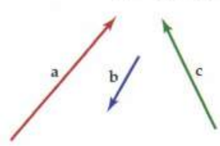


الشكل 5.1.3

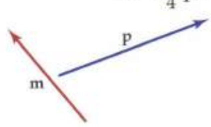
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي: (4A–B) انظر الهامش

(4A $\mathbf{a}-\mathbf{c}+2\mathbf{b}$

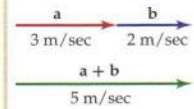


(4B $\mathbf{m}-\frac{1}{4}\mathbf{p}$



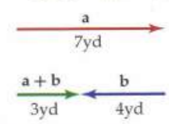
إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه
محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهها هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



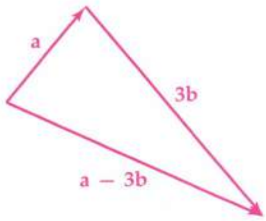
إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان
عند جمع متجهين متوازيين متعاكسين، فإن طول المحصّلة هو القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهها هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.

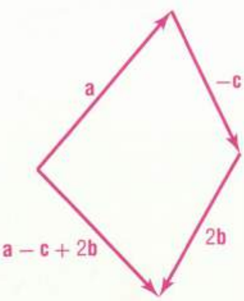


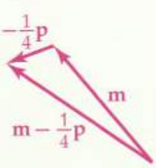
مثال إضافي

4 ارسم المتجه $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ حيث $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ متجهان كما في الشكل أدناه.



إجابة (تحقق من فهمك):

(4A


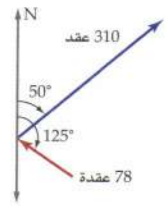
(4B


تطبيقات المتجهات يمكن استعمال جمع المتجهات، وحساب المثلثات في حل مسائل حياتية على المتجهات، تتضمن مثلثات غير قائمة الزاوية، كما في مسائل الملاحة الجوية والبحرية. فمن المهم مثلًا تحديد السرعة والاتجاه الذي يجب أن تنطلق فيه الطائرة أو السفينة لتتغلّب على القوى الأخرى مثل الرياح، وتكون السرعة النسبية للمَرْكَبة هي المحصّلة الناتجة عن سرعة انطلاق المركبة، والقوى الأخرى المؤثرة عليها.

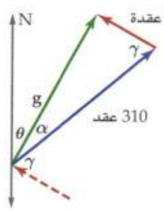
مثال 5 من واقع الحياة — استعمال المتجهات لحَلّ مسائل الملاحة

ملاحة جوية: تُحلّق طائرة بسرعة مقدارها 310 عقد باتجاه $050°$، وتهب الرياح بسرعة 78 عقدة من الاتجاه $125°$، أوجد محصّلة سرعة الطائرة، واتجاه حركتها بالنسبة لسطح الأرض.

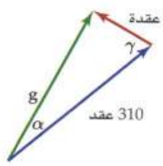
الخطوة 1 ارسم شكلًا يُمثّل سرعة الطائرة والرياح كما في الشكل 5.1.4، ثم اسحب متجه حركة الرياح كما في الشكل 5.1.5 واستعمل قاعدة المثلث؛ لإيجاد متجه المحصلة الذي يُمثّل سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض. في المثلث المكوّن من هذه المتجهات في الشكل 5.1.6، $\gamma = 125° - 50° = 75°$.



الشكل 5.1.4



الشكل 5.1.5



الشكل 5.1.6

الخطوة 2 استعمل قانون جيوب التمام؛ لإيجاد $|\mathbf{g}|$، وهو يُمثّل سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{قانون جيوب التمام}$$

$$|\mathbf{g}|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75° \quad c = |\mathbf{g}|,\ a = 78,\ b = 310,\ \gamma = 75°$$

$$|\mathbf{g}| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°} \quad \text{بإيجاد الجذر التربيعي الموجب للطرفين}$$

$$\approx 299.4 \quad \text{بالتبسيط}$$

سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 يُمثّل اتجاه المحصلة $\mathbf{g}$ بالزاوية θ، كما في الشكل (5.1.5)، ولإيجاد θ أوجد أولًا α باستعمال قانون الجيوب.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \text{قانون الجيوب}$$

$$\frac{\sin\alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4} \quad c = |\mathbf{g}| = 299.4,\ a = 78,\ \gamma = 75°$$

$$\sin\alpha = \frac{78\sin 75°}{299.4} \quad \text{بالحَلّ بالنسبة إلى } \alpha$$

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{78\sin 75°}{299.4} \quad \text{باستعمال الدالة العكسية للجيب}$$

$$\approx 14.6° \quad \text{بالتبسيط}$$

قياس θ هو $50° - \alpha$، أي $50° - 14.6° = 35.4°$.

لذا فإن سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض هي 299.4 عقدة باتجاه $035°$ تقريبًا.

تحقق من فهمك محصلة سرعة سلطان 4.03 ft/s باتجاه $S\ 60.25°\ E$ تقريبًا

5) **سباحة:** يسبح سلطان عبر أحد الأنهار بسرعة 3.5 ft/s، باتجاه الشرق قاصدًا الضفة الأخرى للنهر، في الوقت الذي يؤثر عليه تيار مائي باتجاه الجنوب بسرعة 2 ft/s. أوجد محصلة سرعة سلطان، واتجاه حركته.

إرشادات للدراسة

الزوايا الداخلية المتبادلة يعمل انسحاب نقطة البداية لمتجه حركة الرياح إلى نقطة نهاية متجه حركة الطائرة على تكوين متجهين متوازيين يقطعهما قاطع؛ لذا فإن الزاويتين المتبادلتين الناتجتين من هذا الوضع متطابقتان.

تنبيه!

اتجاه الرياح في المثال 5 لاحظ أن الرياح تهب من الاتجاه $125°$؛ لذا رسم السهم بحيث تقع نقطة انتهائه على خط شمال - جنوب، وعندما تهب الرياح باتجاه $125°$، فإن نقطة بداية المتجه هي التي تقع على خط شمال - جنوب.

تطبيقات المتجهات

مثال 5 يُبيّن كيفية استعمال المتجهات [في] حل مسائل الملاحة.

مثال 6 يُبيّن كيفية تحليل قوة إلى مركبتين [مت]عامدتين.

مثال إضافي

ملاحة جوية: تحلّق طائرة بسرعة مقدارها 475 mi/h باتجاه $070°$. إذا كانت الرياح تتحرك بسرعة 80 mi/h من الاتجاه $120°$، فأوجد اتجاه سرعة الطائرة ومحصلتها بالنسبة للأرض. محصلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض تساوي 428.0 mi / h تقريبًا، وباتجاه $061.8°$ تقريبًا.

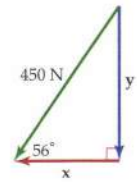
يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r، **مركبتي** r. ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى الأعلى.

مثال 6 من واقع الحياة — تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N، وبزاوية قياسها 56° مع سطح الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين أفقية x إلى الأمام ورأسية y إلى الأسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية، والرأسية للقوة.

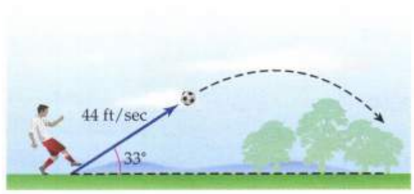
تكوّن كل من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\lvert x\rvert}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\lvert y\rvert}{450}$
$\lvert x\rvert = 450 \cos 56°$	بالحل بالنسبة إلى x، y	$\lvert y\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x\rvert \approx 252$	باستعمال الآلة الحاسبة	$\lvert y\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

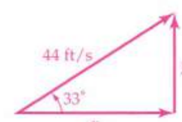
B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N. والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية على الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا.

المصدر: Contemporary College Physics

(6A

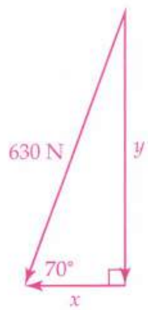


(6B المركبة الأفقية تساوي 36.90 ft/s تقريبًا؛ المركبة الرأسية تساوي 23.96 ft/s تقريبًا

مثال إضافي

6 **حدائق:** يدفع عبد الله مجرفة في أرض حديقته المنزلية بقوة مقدارها 630 N وبزاوية قياسها 70° مع الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها عبد الله إلى مركبتين متعامدتين.



b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

المركبة الأفقية تساوي 215.47 تقريبًا.

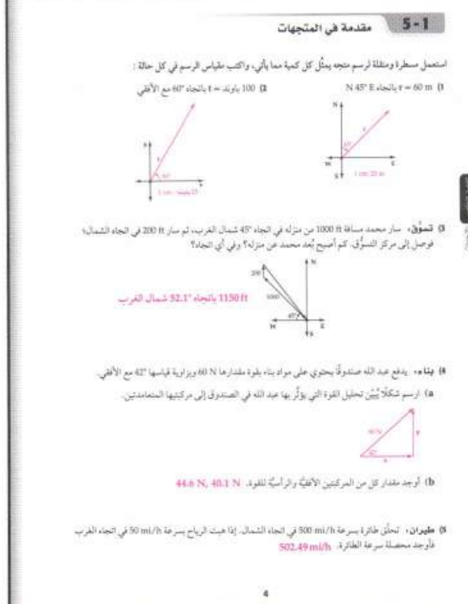
المركبة الرأسية تساوي 592.01 تقريبًا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المواد لعبة على شكل قارب صغير له شراع متحرك، بركة ماء، ومروحة طاولة.

المتعلمون الحركيون تستعمل المتجهات في الغالب لوصف القوى وإيجاد المحصلة في مواقف من واقع الحياة. اطلب إلى الطلاب التنبؤ بأثر الرياح على قارب، وذلك بوضع لعبة القارب الصغير في حوض ماء، واستعمال مروحة طاولة كمصدر للرياح. حافظ على سرعة الرياح والمسافة بين المروحة والقارب ليظلا ثابتتين. ضع القارب بحيث يكون في وضع يعامد حركة الرياح. اطلب إلى الطلاب وضع عدة تنبؤات واختبارها بناءً على موقع القارب وأثر قوة الرياح على القارب.



تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: (مثال 1)

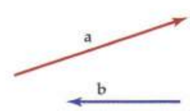
1) دفع صندوق بقوة مقدارها 125 N . قياسية
2) تهب الرياح بسرعة 20 عقدة. قياسية
3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. متجهة
4) ضربت كرة قدم بسرعة 85 km/h . قياسية
5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. متجهة
6) رمي حجر رأسيًّا إلى الأعلى بسرعة 50 ft/s . متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية. واكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

7) h = 13 in/s ، باتجاه 205° . 7–12) انظر ملحق الإجابات
8) g = 6 km/h ، باتجاه N 70° W .
9) j = 5 ft/s ، وبزاوية قياسها 300° مع الأفقي.
10) d = 28 km ، وبزاوية قياسها 35° مع الأفقي.
11) R = 40 m ، باتجاه S 55° E .
12) n = 32 m/s ، باتجاه 030° .

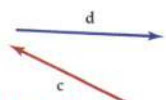
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة والمنقلة: (مثال 3)

(13



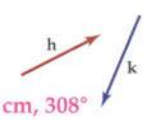
1.4 cm, 45°

(14



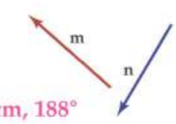
1.0 cm, 58°

(15



1.1 cm, 308°

(16



2.3 cm, 188°

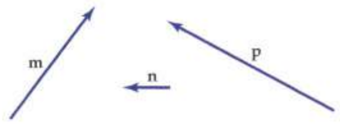
17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه N 60° W ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى N 25° E ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3)

20 ميلًا بحريًّا، N 11.7° W

حدِّد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف. 2N للخلف
19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب. 250 m للجنوب
20) 17 mi شرقًا، ثم 16 mi جنوبًا. 23.35 mi باتجاه S 47° E
21) $15\,m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي، ثم $9.8\,m/s^2$ إلى الأسفل. $8.15\,m/s^2$ ، 23° مع الأفقي

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: (مثال 4) 22–25) انظر ملحق الإجابات



22) $m - 2n$
23) $4n + \frac{4}{5}p$
24) $p + 2n - 2m$
25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

26) **طيران شراعي:** يقود شخص طائرة شراعية بسرعة مقدارها 15 mi/h باتجاه الغرب. إذا هبت الرياح بسرعة 5 mi/h باتجاه N 60° E ، فأوجد محصِّلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض. (مثال 5) 11.0 mi/h تقريبًا

27) **تيار مائي:** يسبح أحمد باتجاه الغرب بسرعة 1.5 m/s . أثَّر عليه تيار بحري قوي سرعته 1 m/s ، وباتجاه S 20° E . أوجد محصِّلة سرعة أحمد، واتجاهها. (مثال 5) 1.49 m/s باتجاه S51°W

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. (مثال 6) 28–30) انظر الهامش

28) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه 310° مع الأفقي.
29) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E .
30) $\frac{3}{4}$ in/min ، باتجاه 255° .

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-31 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

المسطرة والمنقلة يحتاج الطلاب إلى المسطرة والمنقلة في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

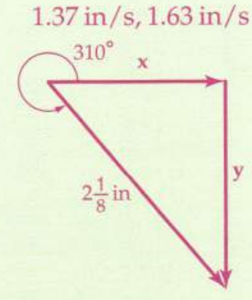
أخطاء شائعة قد لا يستعمل الطلاب الزاوية الصحيحة عندما يُعطى الاتجاه الحقيقي للمتجه؛ لذا ذكّر الطلاب بأن الاتجاه الحقيقي يُعبَّر عنه بزوايا مقاسة مع عقارب الساعة من الشمال.

تنويع الواجبات المنزلية

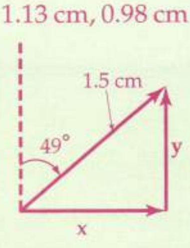
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31، 46–48، 50–56
ضمن المتوسط	1–45 (فردي)، 46–48، 50–56
فوق المتوسط	32–56

إجابات:

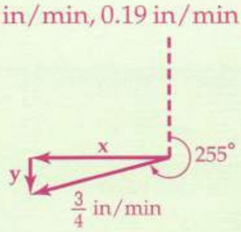
28) 1.37 in/s, 1.63 in/s



29) 1.13 cm, 0.98 cm



30) 0.72 in/min, 0.19 in/min

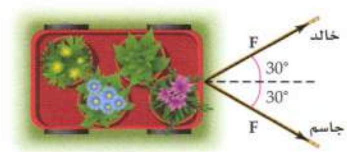


31) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها $33°$ مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 6)**

a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين. **انظر الهامش.**

b) أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.
المركبة الأفقية: 159.3 N؛ والمركبة الرأسية: 103.5 N

32) **بستنة:** يسحب خالد وجاسم عربة مليئة بالنباتات بقوتين متساويتين، تصنع كلٌّ منهما زاوية قياسها $30°$ مع محور العربة. إذا كانت محصلة قوة السحب 120 N، فأجب عما يأتي:

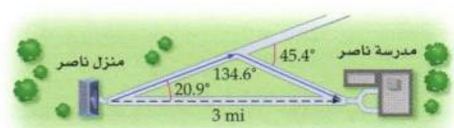


a) أوجد القوة التي يسحب بها كل من خالد وجاسم العربة. **69 N تقريبًا**

b) إذا سحب كل منهما العربة بقوة مقدارها 75 N ، فأوجد محصلة قوة السحب. **130 N تقريبًا**

c) كيف تتأثر هذه المحصلة، إذا تقارب خالد وجاسم؟ **تزداد**

33) **قيادة سيارة:** يبعُد منزل ناصر عن مدرسته مسافة أفقية مقدارها 3 mi، وللوصول إلى مدرسته فإنه يقود سيارته في شارعين مختلفين؛ إذ يسير أولًا بزاوية قياسها $20.9°$ بالنسبة إلى المسار الأفقي على الشارع الأول، ثم ينعطف بزاوية قياسها $45.4°$ على الشارع الثاني كما في الشكل أدناه.



a) أوجد المسافة التي يقطعها ناصر على الشارع الأول . **1.75 mi**

b) أوجد المسافة التي يقطعها ناصر على الشارع الثاني . **1.5 mi**

34) **لعب الأطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه $31°$ مع الأفقي. أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح. **52 N تقريبًا**

35) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة ضرب متجه في عدد حقيقي.

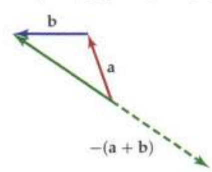
a) **بيانيًا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لـِ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية لأربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة. **انظر الهامش.**

b) **جدوليًا:** انقل الجدول أدناه إلى دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a	$(2, 4)$	$(4, 8)$
b	$(0, 3)$	$(0, 6)$
c	$(-1, 2)$	$(-2, 4)$
d	$(-2, -2)$	$(-4, -4)$
e	$(3, -1)$	$(6, -2)$

c) **تحليليًا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a** ؟ (ka, kb)

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري. والمتجه الموازن للمتجه a + b هو −(a + b) .



36) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:
$\mathbf{a} = 15$ mi/h ، باتجاه $125°$.
$\mathbf{b} = 12$ mi/h ، باتجاه $045°$. **20.77 mi / h باتجاه 270°**

37) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه. **37a) انظر ملحق الإجابات**

a) إذا كانت $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتي الشد في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$.

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$.
$\mathbf{T_1} \approx 23.18\,\text{lb}, \mathbf{T_2} \approx 23.18\,\text{lb}$

تمثيلات متعددة

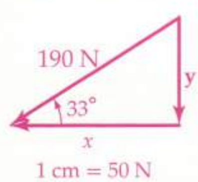
في السؤال 35 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والجداول، لاستقصاء ضرب متجه في عدد حقيقي.

تنبيه!

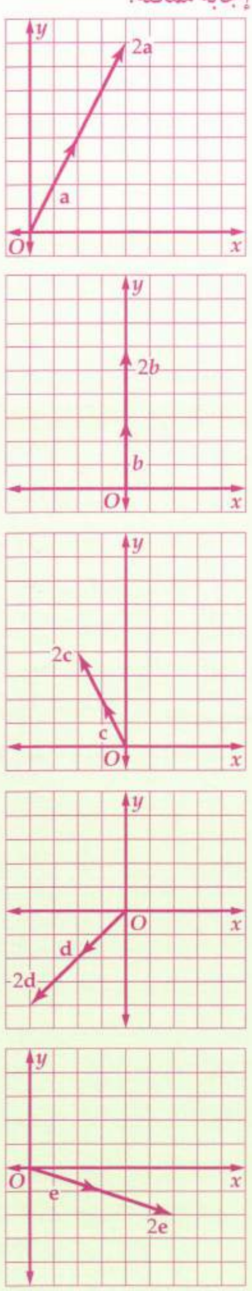
أخطاء شائعة في السؤال 31 قد لا يستعمل الطلاب خاصيتي نسب الجيب وجيب التمام؛ لذا راجع تعريف كل نسبة منهما في المثلث القائم الزاوية.

إجابات:

(31a



(35a إجابة ممكنة:



أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كل منها:

38) الأفقية 0.32 in، الرأسية 2.28 in، $90° < \theta < 180°$. **2.3 in.; 98°**

39) الأفقية 3.1 ft، الرأسية 4.2 ft، $0° < \theta < 90°$. **5.2 ft; 54°**

40) الأفقية 2.6 cm، الرأسية 9.7 cm، $270° < \theta < 360°$. **10 cm; 285°**

ارسم ثلاثة متجهات **a, b, c**؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا: **(41-43) انظر ملحق الإجابات**

41) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

42) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

43) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث $k = 2, 0.5, -2$

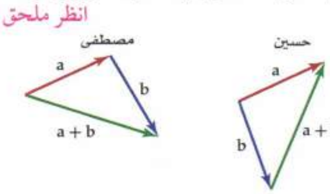
مسائل مهارات التفكير العليا

44) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x. حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية. **انظر ملحق الإجابات**

45) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرِّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع". **انظر الهامش**

46) **تبرير:** بفرض أن $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$
a) عبِّر عن هذه العبارة بالكلمات. **(a-b) انظر الهامش**
b) هل هذه العبارة صحيحة أو خاطئة؟ برِّر إجابتك.

47) **اكتشف الخطأ:** حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a, b. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**



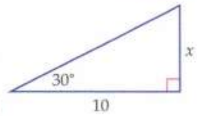
48) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

49) **اكتب:** قارن بين قاعدتي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

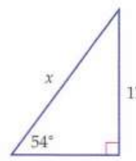
أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إن لزم ذلك. (مهارة سابقة)

50)



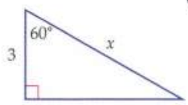
5.8

51)



22

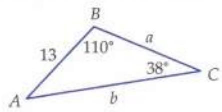
52)



6

حُلّ كل مثلث فيما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إن لزم ذلك. (مهارة سابقة) **(53, 54) انظر ملحق الإجابات**

53)

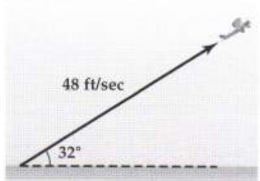


54) حُلّ المعادلة $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

55) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km باتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقة عامة، فقطع مسافة 5.6 km. حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟ **6.74 km باتجاه 56.2° تقريبًا مع الأفقي**

56) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة؟ **B**



A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

تنبيه!

اكتشف الخطأ في السؤال 47، ذكّر الطلاب بدراسة الرسوم بدقة. عند اختيار قاعدة إيجاد محصلة متجهين (المثلث أو متوازي الأضلاع)، إذ من المهم أن توضع نقاط البداية والنهاية بشكل صحيح.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب شرح طريقة جمع وطرح متجهين موضحة بالأشكال.

إجابات:

45) ليست صحيحة، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أمّا إذا وضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

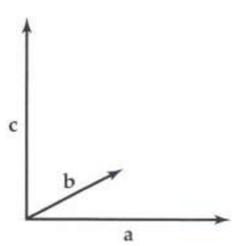
46a) طول المتجه a مضافًا إلى طول المتجه b أكبر من أو يساوي طول المتجه الناتج من $a + b$.

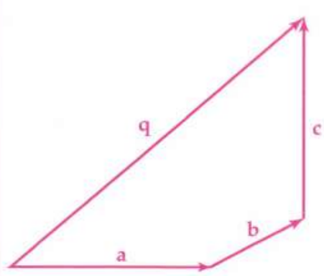
b) صحيحة، إجابة ممكنة: المتجه الناتج من $a + b$ يتأثر باتجاهي المتجهين وهذا قد يجعل مقدار $|a + b|$ صغيرًا، إذا كان a، b متعاكسين في الاتجاه. ويكون مجموع المقدارين $|a| + |b|$ أكبر قيمة ممكنة؛ لأنه لا يأخذ بعين الاعتبار اتجاهي المتجهين ويتساوى المقداران $|a| + |b|$، $|a + b|$ إذا كان a، b متوازيين، ولهما الاتجاه نفسه.

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية:
إذا كان لديك ثلاث قوى متجهة a, b , c تؤثر في نقطة. فطوّر استراتيجية؛ لإيجاد المتجه q الذي يمثل محصلة هذه القوى.





5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق:
درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم.

والآن:
- أجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

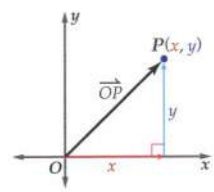
المفردات:
الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
توافق خطي
linear combination

لماذا؟

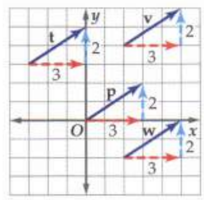
تؤثِّر الرياح على سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي تعلمت في الدرس 5-1 ، إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقة أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثي نقطة نهايته $P(x, y)$. وتُعبِّر عن $\overrightarrow{OP}$ في المستوى الإحداثي على الصورة $\langle x, y\rangle$. حيث إن x, y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ، لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 5.2.1



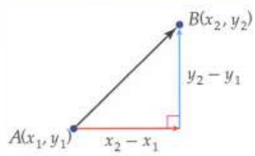
الشكل 5.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفسيهما متكافئة، فإن بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أي منها على الصورة $\langle 3, 2\rangle$. ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجه مرسوم في وضع غير قياسي استعمل إحداثيي نقطتي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي **الصورة الإحداثية لمتجه**

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 **التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية**

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2), (x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ بالطرح

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8\rangle$ **1B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11\rangle$

5-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2
إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم .

الدرس 5-2
إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًّا.
كتابة المتجه باستعمال متجهي الوحدة.

ما بعد الدرس 5-2
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- كيف تؤثر الرياح العكسية على سرعة الطائرة؟ تعمل الرياح العكسية على تخفيض سرعة الطائرة الفعلية.
- كيف تؤثر الرياح باتجاه الطائرة على سرعتها؟ تزيد من سرعة الطائرة.
- ما نوع الرياح التي تؤثر على اتجاه حركة الطائرة؟ أي اتجاه للرياح غير اتجاه حركة الطائرة أو عكسه.
- إذا هبت رياح جانبية بزاوية قياسها 90° على اتجاه سير الطائرة. فهل تُخرج هذه الرياح الطائرة عن مسارها بزاوية قياسها 90°؟

لا ؛ لأنه في الوقت الذي تسير فيه الطائرة للأمام تُدفع باتجاه حركة الرياح فيصبح خط سيرها باتجاه محصلة حركتي الطائرة والرياح، لذلك يتغير مسار الطائرة بزاوية أقل من 90°.

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (20)	• تنويع التعليم ص (20, 23)	• تنويع التعليم ص (23, 25)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)

لمتجهات في المستوى الإحداثي

لمثال 1 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجه لى الصورة الإحداثية إذا أُعطي الزوجان مرتبان اللذان يمثلان نقطتي بدايته و نهايته.

لمثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول المتجه استعمال قانون المسافة بين نقطتين.

لمثال 3 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على لمتجهات وإيجاد ناتج الجمع والطرح الضرب في عدد حقيقي للمتجهات جبريًّا.

التقويم التكويني

ستعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد ل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب لمفاهيم.

أمثلة إضافية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. $\langle 0, 6\rangle$

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. 6

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 2, 0\rangle$، $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$، $\mathbf{z} = \langle -1, -4\rangle$.

a) $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10\rangle$

b) $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8\rangle$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

قراءة الرياضيات

المعيار يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

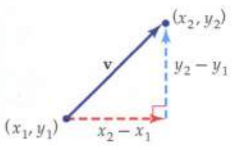
مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1)، ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v**، فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ بالتبسيط

التحقق علمت من المثال 1 أن $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$؛ وعليه فإن $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

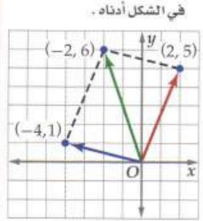
جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a باستعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه.



مثال 3 — العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

$\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ بالتعويض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ بجمع المتجهين

b) $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

$\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$ بإعادة كتابة الطرح كعملية جمع

$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ بالتعويض

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي، وجمع متجهين

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$ $\langle -19, 4\rangle$

3B) $-3\mathbf{w}$ $\langle 12, -3\rangle$

3C) $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $\langle 3, 22\rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة؛ لإيجاد ناتج جمع وطرح متجهين وضرب متجه في عدد حقيقي. ثم اطلب إليهم استعمال ورق رسم بياني؛ للتحقق من صحة إجاباتهم.

تاريخ الرياضيات

وليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظرية في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات تعتمد على هذه النظرية.

متجهات الوحدة يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**. ومن المفيد أحيانًا التعبير عن المتجه غير الصفري $\mathbf{v}$ على أنه حاصل ضرب متجه وحدة $\mathbf{u}$ بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي. ولإيجاد $\mathbf{u}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{v}$

$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$ بالتعويض

$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$ بالتبسيط

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ بإنطاق المقام

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقَّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1 .

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$ بالتبسيط

$= \sqrt{1} = 1$ ✓ بالتبسيط

تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كل مما يأتي:

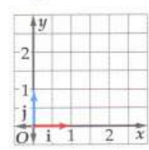
(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$ $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$ $\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

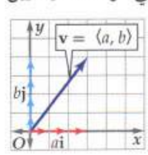
تنبيه!

متجه الوحدة i لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يكتب متجه الوحدة بخط داكن غير مائل $\mathbf{i}$. بينما يكتب العدد التخيلي بخط داكن مائل i .

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على الترتيب كما في الشكل 5.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ متجهي الوحدة القياسيين.



الشكل 5.2.3



الشكل 5.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4 .

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$ بإعادة كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين

$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ $\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}, \langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

إرشادات للمعلم الجديد

ضرب المتجه في عدد حقيقي ذكّر الطلاب بأن العدد الذي يُضرب فيه المتجه هو عدد حقيقي.

المحتوى الرياضي

الضرب في عدد حقيقي يمكن اعتبار الضرب في عدد حقيقي للمتجه على أنه تمدد للمتجه الأصلي. وينعكس اتجاه المتجه إذا كان العدد سالبًا، وعليه فإنه لا يحصل تمدد فقط للمتجه، بل انعكاس أيضًا في المحور العمودي على المتجه من نقطة منتصفه. لاحظ أنه إذا كانت القيمة المطلقة للعدد أقل من 1، فإنه يحدث تصغير للمتجه.

متجهات الوحدة

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى.

المثال 5 يُبيّن كيفية كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة.

المثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد الصورة الإحداثية لمتجه أُعطي طوله وزاوية اتجاهه.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه باستعمال الدالة العكسية لدالة الظل.

المثال 8 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$.

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قسّم طلاب الصف إلى مجموعات، وحدّد لكل مجموعة متجهًا، واطلب إليهم إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى، وصوّر عملهم بالفيديو.

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المتجه يمكن التعبير عن المتجهات بأزواج مرتبة مثل النقاط في المستوى الإحداثي، لكن الأقواس في المتجهات تختلف عنها في النقاط. فالنقطة (x, y) تدل على موقع واحد في المستوى البياني، بينما المتجه $\langle x, y\rangle$ يشير إلى متجه (له طول واتجاه) في الوضع القياسي، وينتهي بالنقطة (x, y).

يسمى ناتج الجمع $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

مثال 5 كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، و نقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بالتبسيط

ثم أعد كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

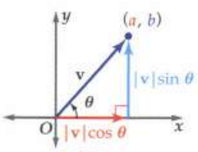
تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$ $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$ $10\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 5.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 5.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ بالتعويض

$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة
تستنتج من الصورة
$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$
أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة
$\mathbf{u} = \langle 1 \cos \theta, 1 \sin \theta \rangle$
$= \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$.

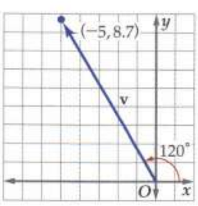
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10, \theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بالتبسيط

التحقق مثِّل بيانيًّا $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، علمًا بأن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ ✔



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ مما يأتي :

6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$ $\langle 5.7, 5.7 \rangle$

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$ $\langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

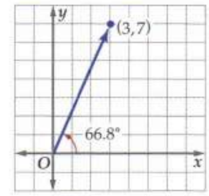
مثالان إضافيان

إذا كانت نقطة بداية المتجه DE هي $D(-3, -3)$، ونقطة نهايته $E(2, 6)$. فاكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$. $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

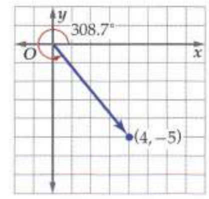
أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 7، وزاوية اتجاهه $60°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

تستنتج من الشكل (5.2.5) أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الموجب لمحور x بحَلّ المعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.



الشكل 5.2.6



الشكل 5.2.7

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3, b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ بالحَل بالنسبة إلى θ

$\theta \approx 66.8°$ باستعمال الآلة الحاسبة

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل 5.2.6 .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4, b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ بالحَل بالنسبة إلى θ

$\theta \approx -51.3°$ باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل 5.2.7 ، فإن $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تحقق من فهمك

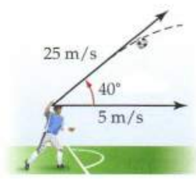
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 161.6°

7B) $\langle -3, -8\rangle$ 249.4°

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

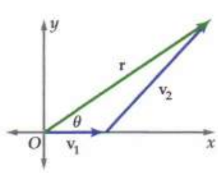


بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لهذا المتجه $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$. وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25, \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بالتبسيط



اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ بالتعويض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ بالجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ بالحَل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s ، وتصنع زاوية قياسها 33.6° مع الأفقي.

تحقق من فهمك

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s.

30.75m/s وتصنع زاوية قياسها 31.6° مع الأفقي

مثالان إضافيان

7 أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب:

a) $\mathbf{p} = \langle 2, 9\rangle$ 77.5° تقريبًا

b) $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 344.1° تقريبًا

8 **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 7 m/s ؛ ليرمي الكرة للأمام بسرعة 30 m/s بزاوية 10° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة؟ 36.9 m/s, 8.1°

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلاب تعليق جسم بحبلين بين مقعدين، واطلب إلى كل واحد منهم رسم شكل يمثل هذا الوضع وتوضيح طريقة إيجاد القوة على كلا الحبلين.

3 التدريب

التقويم التكويني

ستعمل الأسئلة 1-35 للتأكد من فهم
طلاب.

م استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛
تعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب
ستوياتهم.

جابات:

(1 $\langle 7,4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

(2 $\langle -8,16\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

(3 $\langle -7,-3\rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

(4 $\langle 3,4\rangle, 5$

(5 $\langle -6.5,4.5\rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

(6 $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

(13 $n = <76, 84>, f = <-9, 10>,$
$w = <0, -170>$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$

(1 $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$

(2 $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

(2 $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

(2 $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$

(2 $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$

(2 $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

(2 $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$

(2 $\langle 6, 6\sqrt{3}\rangle$

(2 $\langle 8\sqrt{3}, -8\rangle$

(2 $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\rangle$

(3 $\langle -8.6, 12.29\rangle$

(36

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (المثالان 1, 2) **6-1) انظر الهامش**

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$ 2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$ 4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$ 6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

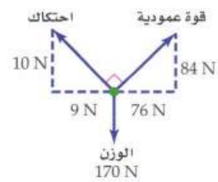
إذا كان $\mathbf{f} = \langle 8,0\rangle, \mathbf{g} = \langle -3,-5\rangle, \mathbf{h} = \langle -6,2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ **$\langle -21, 13\rangle$** 8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ **$\langle -4, 4\rangle$**

9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ **$\langle 31, -11\rangle$** 10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ **$\langle 26, 6\rangle$**

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ **$\langle -53, -23\rangle$** 12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ **$\langle -42, -18\rangle$**

13) **فيزياء:** يُستعمل مخطط القوى؛ لتوضيح أثر القوى المختلفة على جسم. ويمثّل المخطط أدناه القوى التي تؤثر على طفل ينزلق على منحدر للأسفل. (مثال 3)



a) اعتبر أن النقطة الخضراء التي تُمثّل الطفل هي نقطة الأصل، واكتب كل متجه على الصورة الإحداثية. **انظر الهامش**

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة الذي يسبِّب انزلاق الطفل للأسفل. **$\langle 67, -76\rangle$**

14-19) انظر الهامش

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

14) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$ 15) $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$ 17) $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$ 19) $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

اكتب $\overline{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5) **20-25) انظر الهامش**

20) $D(4, -1), E(5, -7)$ 21) $D(9, -6), E(-7, 2)$

22) $D(3, 11), E(-2, -8)$ 23) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

24) $D(-4, -6), E(9, 5)$ 25) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

26) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثّر عليه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h . (مثال 5)

a) أوجد إلى أقرب جزء من عشرة السرعة التي يتحرك بها القارب. **5.8 mi/h تقريبًا**

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة. **59° تقريبًا**

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كل مما يأتي: (مثال 6) **27-30) انظر الها**

27) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$ 28) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

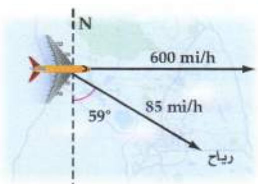
29) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$ 30) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (مثال 7)

31) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **63.4°** 32) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **111.8°**

33) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **216.9°** 34) $\langle -5, 9\rangle$ **119.1°**

35) **ملاحة جوية:** تطير طائرة باتجاه الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h . وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E . (مثال 8)



a) أوجد محصّلة سرعة الطائرة. **674 mi/h**

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة. **S86°E**

36) **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E . وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E .

a) ارسم شكلًا يُمثّل هذا الموقف. **انظر الهامش**

b) ما مقدار سرعة الرياح واتجاهها؟ **46.1 mi/h; N46°E**

بيّن إذا كان $\overline{AB}, \overline{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا. وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب. **37, 38) انظر الهامش**

37) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

38) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	47–57 ،45 ،44 ،1–35
ضمن المتوسط	47–57 ،44 ،43 ،1–36 فردي
فوق المتوسط	36–57

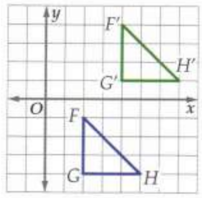
تنبيه!

أخطاء شائعة في السؤال 36، لاحظ الطلاب الذين لا يرسمون رسمًا صحيحًا يعبّر عن الموقف. واقترح عليهم كتابة الاتجاهات الشمال، الجنوب، الشرق، الغرب على رسومهم.

37) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كل من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين .

38) نعم؛ إجابة ممكنة : للمتجهين المقدار والاتجاه نفساهما؛ لذا فهما متكافئان.

39) انسحاب: يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور. $\langle 2, 5 \rangle$

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$، وصورته $\triangle F''G''H''$. انظر الهامش

c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$. $\langle -1, -1 \rangle$

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علمت طوله ونقطة بدايته:

40) $\sqrt{37}$, $(-1, 4)$ إجابة ممكنة: $(0, -2)$

41) 10, $(-3, -7)$ إجابة ممكنة: $(5, -1)$

42) آلة تصوير: عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

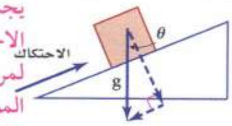
$\langle -755, 933 \rangle$; $\langle 899, 438 \rangle$; $\langle 544, -441 \rangle$

a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير. $\langle 688, 930 \rangle$

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى. $1157\ N;\ 54°$

43) قوة: تؤثّر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟



يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) تبرير: إذا كان a, b متجهين متوازيين، فاكتب معادلة متجه تُبيّن العلاقة بين a, b. إجابة ممكنة: $\mathbf{a} = k\,\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي

45) تبرير: إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا). انظر الهامش

46) تحدٍّ: إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)°$، فأوجد قيمة x بدلالة y. $x = \dfrac{y}{\tan 4y}$

برهان: إذا كان $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1 \rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2 \rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3 \rangle$ فأثبت الخصائص الآتية: 47-50) انظر ملحق الإجابات

47) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

48) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

49) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي.

50) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k عدد حقيقي.

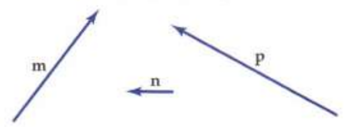
مراجعة تراكمية

51) دمى الأطفال: يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5N بواسطة نابض مثبّت بها. (الدرس 1-5)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية $52°$ مع سطح الأرض. فأوجد مقدار كل من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة. $\approx 0.92\ N$, $\approx 1.18\ N$

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها $78°$ مع سطح الأرض. فأوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. $\approx 0.31\ N$, $\approx 1.47\ N$

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثّل كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-5) 52-55) انظر ملحق الإجابات



52) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

53) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

55) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

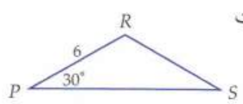
تدريب على اختبار

56) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$؟ D

A $\sqrt{2}$ C $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ D $\sqrt{106}$

57) ما مساحة المثلث المجاور إذا علمت أن $PR = RS$؟ B



A $9\sqrt{2}$ B $9\sqrt{3}$ C $18\sqrt{2}$ D $18\sqrt{3}$

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1) $A(2, 4), B(-1, 3)$ $\langle -3, -1 \rangle$, $\sqrt{10}$

2) $A(4, -2), B(5, -5)$ $\langle 1, -3 \rangle$, $\sqrt{10}$

3) $A(-3, -6), B(8, -1)$ $\langle 11, 5 \rangle$, $\sqrt{146}$

إذا كان $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

4) $3\mathbf{v}$ $\langle 6, -3 \rangle$

5) $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$ $\langle -7, 7 \rangle$

6) $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ $\langle -1, 11 \rangle$

7) $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ $\langle -21, 28 \rangle$

أوجد متجه وحدة u له اتجاه v نفسه في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle$ $\left\langle -\frac{4\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i, j في كلٍّ مما يأتي:

10) $D(4, -5), E(6, -7)$ $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

11) $D(-4, 3), E(5, -2)$ $9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

12) $D(4, 6), E(-5, -2)$ $-9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

13) $D(2, 1), E(3, 7)$ $\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

14) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$ $\langle 8.9, 8.0 \rangle$

15) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$ $\langle -5.4, 5.9 \rangle$

16) **بستنة:** يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل $60°$ عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل $40°$ عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا. 295.6 N

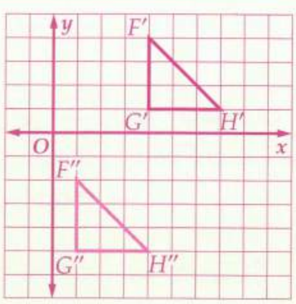
5

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب توضيح كيفية استفادتهم من موضوع التمثيل الهندسي للمتجهات في درس اليوم عن المتجهات التي على الصورة الجبرية.

إجابات:

39b)



45) إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b)، وطول المتجه m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادلة $m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. يمكن أن تكون نقطة نهاية للمتجه. وهي دائرة مركزها النقطة (a, b) وطول نصف قطرها m.

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية. تعاون مزارع وجاره على إزالة صخرة كبيرة من الحقل. وذلك بسحب الصخرة بواسطة حبلين مثبتين بها، الزاوية بينهما $35°$. إذا كان المزارع يسحب الحبل بقوة مقدارها 105N، وجاره يسحب الحبل الآخر بقوة مقدارها 95N، فأوجد مقدار القوة المحصلة المؤثرة على الصخرة واتجاهها (بإهمال قوة الاحتكاك). 190.8N بزاوية قياسها $16.6°$ مع القوة 105N.

5-3 الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا.

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.
- أجدُ مسقط متجه على آخر.

المفردات:

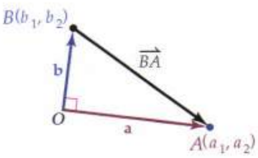
الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors
مسقط متجه
vector projection
الشغل
work

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي (القياسي) تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور، فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad \text{تعريف طول متجه}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 \quad \text{بفك الأقواس}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2) \quad \text{بتجميع الحدود المربعة}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2,\ |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},\ |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي للمتجهين** $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

> **مفهوم أساسي** الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي
>
> يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي:
>
> $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان**.

> **مفهوم أساسي** المتجهان المتعامدان
>
> يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن: $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

5-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

إيجاد مقادير المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًّا.

الدرس 5-3

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.

إيجاد مسقط متجه على آخر.

ما بعد الدرس 5-3

استعمال المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

انظر إلى الصورة وبيّن كيف يعرف الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم يبذلون شغلًا؟ إذا تحركت السيارة.

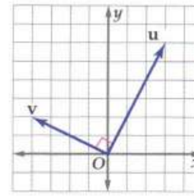
لماذا يعد الشغل تحويلًا للطاقة؟ عند بذل شغل على جسم ما، يحدث تحويل للطاقة على الجسم مما يسبب حركته.

إذا حاولت المجموعة نفسها دفع السيارة بقوة أكبر وتحركت السيارة مسافة أكبر، فهل بذل الأشخاص شغلًا أكبر أو أصغر؟ بذلوا شغلًا أكبر

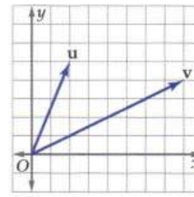
هل وضع كتاب على ذراع شخص دون حركة يعطي شغلًا؟ لا ؛ لأن الكتاب لم يتحرك.

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (30)	• تنويع التعليم ص (33)	• تنويع التعليم ص (33)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)



الشكل 5.3.1



الشكل 5.3.2

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$

$= 0$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضح في الشكل 5.3.1 .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$

$= 36$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضح في الشكل 5.3.2 .

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ -17 ؛ ليسا متعامدين

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ 0؛ متعامدان

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

مفهوم أساسي خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$ بالكتابة على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

سوف تبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 45-43

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$\lvert\langle -5, 12\rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بالتبسيط

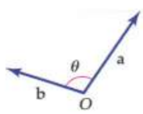
تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ 20

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ $5\sqrt{2} \approx 7.07$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور. حيث إن $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0° \leq \theta \leq 180°$. ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



الضرب الداخلي

المثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين، والتحقق من كونهما متعامدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول متجه باستعمال الضرب الداخلي.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب الداخلي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$.

15، غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$.

0، متعامدين.

2 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$.

$\sqrt{61} \approx 7.81$

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي أعطِ مثالًا على كلٍ من جمع متجهين، وضرب متجه في عدد والضرب الداخلي لمتجهين، ثم اسأل الطلاب عن الفرق بين إجابة الضرب الداخلي والإجابات الأخرى. وعليهم ملاحظة أن ناتج الضرب الداخلي عدد، وليس متجهًا.

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u** ، **v** في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ 64.7° تقريبًا

b) $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$ 147.5° تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلاب لحل بعض المسائل، وشرح طريقة استعمال الدالة العكسية لدالة جيب التمام؛ لإيجاد الزاوية بين متجهين.

المحتوى الرياضي

المتجه الصفري ناتج الضرب الداخلي للمتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$ وأي متجه آخر يساوي 0، وناتج جمع أي متجه مع المتجه الصفري يُعطي المتجه نفسه، مما يعني أن المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات.

إرشادات للمعلم الجديد

صورة أخرى للضرب الداخلي تقود قاعدة الزاوية بين متجهين إلى صورة بديلة للضرب الداخلي لمتجهين .

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

ويمكن استعمال هذه الصورة لحساب الضرب الداخلي للمتجهين **a** و **b** عند معرفة طول كلٍّ من المتجهين والزاوية بينهما.

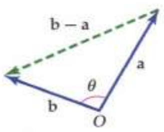
إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية
يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما 90°. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180° .

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a , b ، فإن:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان **a, b, b − a** أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

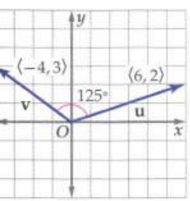
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert \cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert$

مثال 3 — إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

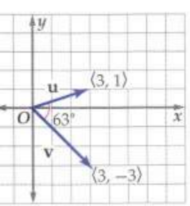
$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle\cdot\langle -4, 3\rangle}{\lvert\langle 6, 2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4, 3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \frac{-24+6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \frac{-18}{10\sqrt{10}}$	بالتبسيط
$\theta = \cos^{-1}\frac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$	باستعمال معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين **u, v** هو 125° تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle\cdot\langle 3, -3\rangle}{\lvert\langle 3, 1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3, -3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \frac{9+(-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$	بالتبسيط
$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$	باستعمال معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين **u, v** هو 63° تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

✓ تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$ 156.8°

3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 7\rangle$ 101.5°

مسقط المتجه

المثالان 4, 5 يُبيّنان كيفية إيجاد مسقط متجه على آخر.

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال مسقط متجه لإيجاد قوة.

المثال 7 يُبيّن كيفية استعمال مسقط متجه في حساب الشغل.

مثال إضافي

4 أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -1, 5\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$.

ثم اكتب **u** على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v**.

$w_1 = \langle 2, 3\rangle,$

$\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle + \langle -3, 2\rangle$

مسقط المتجه تعلمت في الدرس 1-5 أن بإمكانك تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين تكونان غالبًا أفقية ورأسية، إلا أنه من المفيد أحيانًا أن تكون إحدى المركبتين موازية لمتجه آخر.

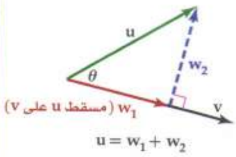
إرشادات للدراسة

المركبة العمودية يُسمى المتجه $\mathbf{w}_2$ المركبة العمودية للمتجه **u** على **v**.

مفهوم أساسي — مسقط u على v

إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متجهين غير صفريين، وكان $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ مركبتي **u**، بحيث $\mathbf{w}_1$ موازٍ للمتجه **v** كما في الشكل المجاور، فإن $\mathbf{w}_1$ يُسمّى **مسقط المتجه u** على المتجه **v**، ويكون:

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$



البرهان

بما أن $\mathbf{w}_1$ موازٍ للمتجه **v**، فإن بإمكاننا كتابة $\mathbf{w}_1$ على صورة حاصل ضرب عدد في المتجه **v**. أو على صورة حاصل ضرب عدد في متجه الوحدة $\mathbf{v}_x$ باتجاه **v**؛ أي أن $\mathbf{w}_1 = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_x$. وباستعمال المثلث القائم الزاوية الذي أضلاعه $\mathbf{u}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$، وجيب التمام نجد $|\mathbf{w}_1|$ كما يلي:

$\cos\theta = \dfrac{\lvert\mathbf{w}_1\rvert}{\lvert\mathbf{u}\rvert}$	تعريف جيب التمام
$\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta = \cancel{\lvert\mathbf{u}\rvert}\lvert\mathbf{v}\rvert\dfrac{\lvert\mathbf{w}_1\rvert}{\cancel{\lvert\mathbf{u}\rvert}}$	بضرب كلا الطرفين في العدد $\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert$
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \lvert\mathbf{v}\rvert\lvert\mathbf{w}_1\rvert$	$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert}$، لذا $\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
$\lvert\mathbf{w}_1\rvert = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert}$	بالحل بالنسبة إلى $\lvert\mathbf{w}_1\rvert$

والآن تستعمل $\mathbf{w}_1 = |\mathbf{w}_1|\,\mathbf{v}_x$؛ لإيجاد $\mathbf{w}_1$ كحاصل ضرب عدد حقيقي في **v**.

$\mathbf{w}_1 = \lvert\mathbf{w}_1\rvert\cdot\mathbf{v}_x$	
$\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert}\cdot\dfrac{\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert}$	$\lvert\mathbf{w}_1\rvert = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert},\ \mathbf{v}_x = \dfrac{\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert}$
$\mathbf{w}_1 = \left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$	بالضرب

مثال 4 — إيجاد مسقط u على v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$، ثم اكتب **u** على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v**.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{w}_1$ (مسقط **u** على **v**).

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 3, 2\rangle\cdot\langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

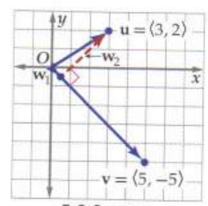
الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

بما أن $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$،

فإن $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

أي أن مسقط **u** على **v** هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما في الشكل 5.3.3، $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$



الشكل 5.3.3

تحقق من فهمك

4) أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$، ثم اكتب **u** على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v**.

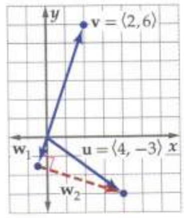
$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle;\ \mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89}\right\rangle$

بالرغم من أن مسقط u على v هو متجه يوازي v ، فإنه ليس من الضروري أن يكون لهذا المتجه اتجاه v نفسه كما يوضح المثال الآتي.

مثال 5 مسقط متجه باتجاه يعاكس اتجاه v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$ ، ثم اكتب u على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v .

لاحظ أن الزاوية بين المتجهين u , v منفرجة؛ لذا فإن مسقط u على v يقع على متجه يعاكس اتجاه المتجه v ، كما في الشكل 5.3.4



الشكل 5.3.4

الخطوة 1 أوجد مسقط u على v .

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 4,-3\rangle \cdot \langle 2,6\rangle}{|\langle 2,6\rangle|^2}\langle 2,6\rangle$$
$$= \frac{-10}{40}\langle 2,6\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

بما أن $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ، فإن :
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \langle 4,-3\rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

أي أن مسقط u على v هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$ ، ويكون $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$

تحقق من فهمك

$\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle;\ \mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37}\right\rangle$

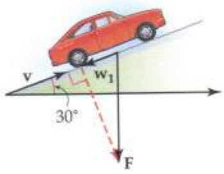
5) أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1\rangle$ ، ثم اكتب u بوصفه ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v .

إذا مثّل المتجه u قوة، فإن مسقط u على v يمثّل تأثير هذه القوة باتجاه v . فمثلاً: إذا كنت تدفع صندوقًا على أرض مائلة باتجاه v بقوة مقدارها u كما في الشكل 5.3.5 ، فإن مسقط u على v يمثّل القوة التي تدفع الصندوق باتجاه v .

الشكل 5.3.5

مثال 6 من واقع الحياة استعمال مسقط متجه لإيجاد قوة

سيارات: تقف سيارة وزنها 1000 N على مرتفع يميل عن الأفقي بزاوية °30 ، كما في الشكل المجاور. إذا أهملت قوة الاحتكاك، فما القوة المطلوبة لتمنع السيارة من الانزلاق للأسفل؟



وزن السيارة هو قوة جذب الأرض لها، $\mathbf{F} = \langle 0, -1000\rangle$. ولإيجاد القوة اللازمة لمنع السيارة من الحركة للأسفل وهي $-\mathbf{w}_1$ ، أوجد مسقط F على متجه وحدة v باتجاه المرتفع.

الخطوة 1 أوجد متجه وحدة v باتجاه المرتفع.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}|(\cos\theta), |\mathbf{v}|(\sin\theta)\rangle$ — الصورة الإحداثية للمتجه v بدلالة $|\mathbf{v}|$ و θ

$= \langle 1(\cos 30°), 1(\sin 30°)\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ — $|\mathbf{v}| = 1,\ \theta = 30°$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_1$ وهي مسقط F على متجه الوحدة v .

$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$ — مسقط F على v

$= (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$ — لأن v متجه وحدة فيكون $|\mathbf{v}| = 1$

$= \left(\langle 0, -1000\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right)\mathbf{v}$ — $\mathbf{F} = \langle 0, -1000\rangle,\ \mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

$= -500\mathbf{v}$ — أوجد الضرب الداخلي

فتكون القوة المطلوبة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-500\,\mathbf{v})$ ، أو $500\,\mathbf{v}$. وبما أن v متجه وحدة، فإن مقدار القوة المطلوبة هو 500 N باتجاه المرتفع.

تحقق من فهمك

69 N

6) **تزحلق:** يجلس شخص على عربة مخصصة للتزحلق على منحدر يميل عن الأفقي بزاوية °60 . أوجد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق للأسفل، إذا كان وزن الشخص والعربة معًا 80 N مع إهمال قوة الاحتكاك.

مثالان إضافيان

5 أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle -3, 5\rangle$، ثم اكتب u على صورة ناتج جمع متجهين أحدهما مسقط u على v.

$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{3}{17}, \frac{-5}{17}\right\rangle,$

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, \frac{-5}{17}\right\rangle + \left\langle \frac{65}{17}, \frac{39}{17}\right\rangle$

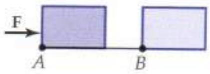
6 **صخور:** ترتكز صخرة كبيرة وزنها 1000N على أرض مرتفعة تميل عن المستوى الأفقي بزاوية °60 . أوجد القوة اللازمة لتمنع الصخرة من الحركة إلى أسفل المرتفع مع إهمال قوة الاحتكاك. 866N تقريبًا

تنويع التعليم

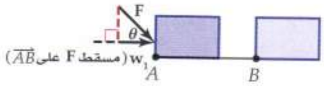
دون

المتعلمون السمعيون قسّم طلاب الصف إلى مجموعات صغيرة من ذوي قدرات لغوية متفاوتة، واطلب إليهم توضيح كيفية حل مسائل من واقع الحياة شبيهة بالمثال 6 باستعمال خطة التفكير بصوت عالٍ، وذلك من خلال شرح خطوات حل المسألة، وتفسير دور كل معلومة من معطيات المسألة في وضع مخطط للحل.

من التطبيقات الأخرى على مساقط المتجهات حساب الشغل الناتج عن قوة. فإذا كانت **F** قوة مؤثرة على جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه. وكانت **F** موازية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج من **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$.



$$W = |\mathbf{w}_1|\,|\overrightarrow{AB}|$$ قاعدة مسقط الشغل

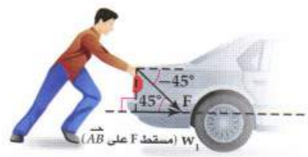
$$= |\mathbf{F}|\,(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$$ $\cos\theta = \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{F}|}$، لذا $|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{F}|\cos\theta$

$$= \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$ $\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|}$ ؛ لذا $|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

مثال 7 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة مقدارها 120 N بزاوية °45 كما في الشكل المجاور. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



الطريقة 1 استعمل قاعدة مسقط الشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{w}_1 = |\mathbf{F}|\cos\theta = 120\cos 45°$ ، ومقدار المسافة $\overrightarrow{AB}$ هو 10 .

$$W = |\mathbf{w}_1|\,|\overrightarrow{AB}|$$ قاعدة مسقط الشغل

$$= (120\cos 45°)(10) \approx 848.5$$ بالتعويض

الطريقة 2 استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة **F** بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي : $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$$W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$ قاعدة الضرب الداخلي للشغل

$$= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$$ بالتعويض

$$= [120\cos(-45°)](10) \approx 848.5$$ الضرب الداخلي

أي أن الشخص يبذل 848.5 J من الشغل؛ لدفع السيارة.

تحقق من فهمك

7) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N. إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟ 75 جولاً

إرشادات للدراسة

وحدات الشغل وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

مثال إضافي

7 **حركة:** يدفع شخص آلة قص العشب بقوة مقدارها 40 N بزاوية مقدارها °45. أوجد الشغل المبذول بالجول واللازم لتحريك آلة قص العشب 12 m (بإهمال قوة الاحتكاك). 339.4 J

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 22-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يقع الطلاب في أخطاء بسيطة عند حساب قياس الزاوية بين متجهين في المسائل 14–11؛ لذا اقترح عليهم رسم المتجهات في المستوى الإحداثي لتحديد ما إذا كانت زاوية المتجه حادة أم منفرجة، ومقارنتها مع الزاوية التي يحصلون عليها في الحل الجبري.

اكتشف الخطأ في السؤال 40، اقترح على الطلاب الرجوع إلى خصائص الضرب الداخلي صفحة 27، وشجِّع الطلاب على اختبار متجهات ذات قيم حقيقية لكلٍّ من **u, v, w** للتحقق من إجاباتهم.

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **u**, **v**، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 0 ؛ متعامدان

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ 0 ؛ متعامدان

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$ 8 ؛ غير متعامدين

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد عبوتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ سعر العبوة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. 15620

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة. ثمن العبوات جميعها هو 15620 ريالًا

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$ $\sqrt{130} \approx 11.4$

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$ $\sqrt{97} \approx 9.8$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$ $5\sqrt{13} \approx 18.0$

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$ $\sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u**, **v** في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$ $14.0°$

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$ $100.0°$

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$ $164.7°$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ $82.9°$

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3) $161.6°$

أوجد مسقط **u** على **v**، ثم اكتب **u** على صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v**. (المثالان 4, 5)

16) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

17) $\mathbf{u} = \langle 5, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4\rangle$

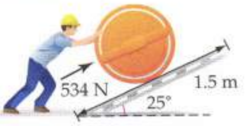
18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

19) $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8\rangle$.

(16-19) انظر ملحق الإجابات

20) **عربة أطفال:** يدفع محمد عربة أخته الصغيرة على سطح يميل عن الأفقي بزاوية $15°$. إذا كان وزن الطفلة والعربة معًا 60 N، فأوجد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق للأسفل مع إهمال قوة الاحتكاك، مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 6) 15.5 N

21) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا إلى أعلى سطح مائل مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N؛ ليضعه في سيارة شحن. إذا كان السطح يميل عن الأفقي بزاوية $25°$، فأوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، قرِّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (مثال 7) 801 J



أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

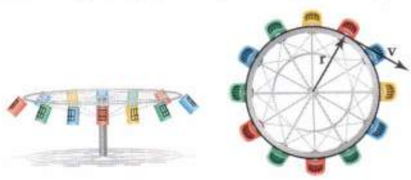
22) $\langle -2, -8\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle -12, 3\rangle$

23) $\langle 3, 5\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 10, -6\rangle$

24) $\langle 7, -4\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 8, 14\rangle$

25) $\langle -1, 6\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 6, 1\rangle$

26) **عجلة دوارة:** يعامد المتجه **r** في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية **v** عند أي نقطة من نقاط الدائرة.



منظر أمامي　　منظر علوي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s. فاكتب الزوج المرتب للمتجه **r** في الوضع القياسي إذا كان يصنع زاوية قياسها $35°$ مع الأفقي، ثم اكتب الزوج المرتب لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة. $\langle 16.38, 11.47\rangle, \langle 22.94, -32.77\rangle$

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه **r**، ومتجه السرعة باستعمال الزوجين المرتبين اللّذين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

26b) الضرب الداخلي؛ $(20\cos 35°)(40\cos 55°) + (20\sin 35°)(-40\sin 55°) = 0$

إذا علمت كلًّا من **v**، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه **u** في كلٍّ مما يأتي:

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle 5, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle -1, 7\rangle$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	21–1، 37–28، 40، 54–43
ضمن المتوسط	39–1 فردي، 54–44
فوق المتوسط	54–23

29) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N. إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟ $55.7°$ تقريبًا

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو ليس كليهما. (30, 31) انظر الهامش

30) $\mathbf{u} = \langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$ متعامدان

31) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$ غير ذلك

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشر.

32) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ $29.7°$

33) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ $164.9°$

34) **شغل:** حمل سلطان ابن أخيه الذي كتلته 16 kg رأسيًا مسافة مقدارها 0.9 m. إذا علمت أنه يمكن إيجاد قوة الوزن بالنيوتن باستعمال الصيغة $F = mg$، حيث m الكتلة بالكيلو جرام، g تساوي $9.8\,m/s^2$، فكم من الشغل يبذل سلطان لحمل ابن أخيه؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. 141.1 J

35) تُمثّل النقاط $(8, 1), (4, 7), (2, 3)$ رؤوس مثلث، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات. $37.8°, 60.3°, 81.9°$

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه $\mathbf{v}$، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

36) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$ $\langle 3.16, -9.49 \rangle$

37) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$ $\langle -5.36, 0.55 \rangle$

38) **سيارات:** تقف سيارة في حالة سكون على سطح يميل بمقدار $9°$ عن الأفقي. على فرض أن القوى المؤثرة على السيارة هي الجاذبية الأرضية، و 275 N ناتجة عن قوة الفرامل، فكم تزن السيارة تقريبًا؟ 1758 N

مسائل مهارات التفكير العليا

39) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية: خطأ؛ انظر الهامش

إذا كانت $|\mathbf{f}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{d}|$ تُمثّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسّر تبريرك.

40) **اكتشف الخطأ:** يدرس كل من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. ولكن فيصل عارضه. أيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك. فيصل؛ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ عدد ثابت وعليه فإن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ليس معرفًا.

41) **تحدٍّ:** إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متجهين متعامدين، فما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$؟ 0

42) **اكتب:** وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين. انظر الهامش

برهان: إذا كان $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية: 43-45 انظر ملحق الإجابات

43) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

44) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

45) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

46) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

إذا علمت أن $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle \frac{3}{4}, -9 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

47) $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2 \rangle$

48) $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2 \right\rangle$

49) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 2-5)

50) $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ $251.6°$

51) $\langle -9, 5 \rangle$ $150.95°$

52) $\langle -7, 7 \rangle$ $135°$

تدريب على اختبار

53) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$, $\langle -9, 0 \rangle$؟ B

A $0°$ C $90°$

B $45°$ D $135°$

54) إذا كان $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$, $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثّل $\mathbf{r}$، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$؟ C

A $\langle 14, 8 \rangle$ C $\langle -14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$ D $\langle -14, -8 \rangle$

5-3 الضرب الداخلي

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ 0، متعامدان

2) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ −11، غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 2, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$ −2، غير متعامدين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle -1, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$ $20.4°$

5) $\mathbf{u} = \langle -6, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 12 \rangle$ $117.9°$

6) $\mathbf{u} = 27\mathbf{i} + 14\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ $109.3°$

7) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ $65.2°$

أوجد مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$، ثم اكتب $\mathbf{u}$ في صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{u} = \langle 4, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$ $\left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right\rangle, \left\langle -\frac{12}{5}, \frac{24}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{32}{5}, \frac{16}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle 62, 21 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 4 \rangle$ $\left\langle \frac{99}{2}, -\frac{33}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{99}{2}, -\frac{33}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{25}{2}, \frac{75}{2} \right\rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle -2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle$ $\left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right\rangle, \left\langle -\frac{6}{25}, \frac{8}{25} \right\rangle + \left\langle -\frac{44}{25}, -\frac{33}{25} \right\rangle$

11) **مواصلات:** انطلق القطاران A, B من نقطة واحدة. إذا كان (33, 12) يُمثّل مسار القطار A، و (55, 4) يُمثّل مسار القطار B، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. $15.8°$

12) **فيزياء:** يدفع شخص عربة بقوة مقدارها 100 N إلى أعلى سطح مائل طوله 6 m، ويميل بزاوية قياسها $30°$ عن الأفقي. أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص في الاتجاه الرأسي، وقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل نسبة الجيب، والصيغة $W = F \cdot d$، حيث W الشغل بالجول، و F القوة بالنيوتن، و d المسافة بالأمتار). 150 جول

6

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة متجه وتوضيح طريقة إيجاد طوله باستعمال الضرب الداخلي.

إجابات:

30) بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

31) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث إن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167°$.

39) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثًا مطلقًا، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

42) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين $\langle a, d \rangle$، $\langle c, b \rangle$ يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الاحداثيين x والإحداثيين y أو $ac + bd$.

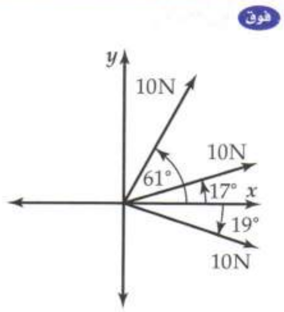
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع في الشكل المجاور، أوجد مقدار محصلة القوى R.

(إرشاد: حلل كل قوة إلى مركبتيها الأفقية والرأسية).

$R_x \approx 23.9\,N, R_y \approx 8.4\,N, R \approx 25.3\,N$



الفصل 5 اختبار منتصف الفصل

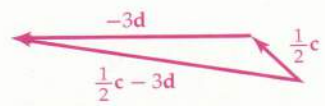
الدروس من 1-5 إلى 3-5

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

إجابات:

(4)



(22 $w_1 = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle$,

$u = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{205}{29}, -\frac{82}{29} \right\rangle$

(23 $w_1 = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle$,

$u = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right\rangle$

(24 $w_1 = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle$,

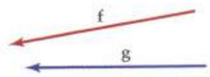
$u = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle + \left\langle \frac{156}{85}, \frac{702}{85} \right\rangle$

(25 $w_1 = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle$,

$u = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle + \left\langle \frac{23}{37}, \frac{138}{37} \right\rangle$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب سنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 5-1)

1)



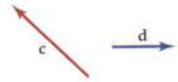
6.2 cm, 185°

2)

1.1 cm, 57°

3) **التزلج:** يسحب شخص مزلجة على الجليد بقوة مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي. أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، قرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 5-1)
40.96 N; 28.68 N

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}c - 3d$. (الدرس 5-1) انظر الهامش



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة **i , j**. (الدرس 5-2)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$ $i + -6j$

6) $B(10,-6), C(-8,2)$ $-18i + 8j$

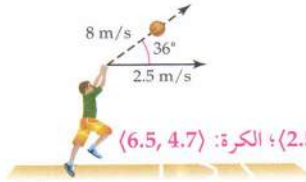
7) $B(1,12), C(-2,-9)$ $-3i + -21j$

8) $B(4,-10), C(14,10)$ $10i + 20j$

9) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 5-2) B

A $\langle 4, -1\rangle$
B $\langle 7, -4\rangle$
C $\langle -4, 7\rangle$
D $\langle -6, 4\rangle$

10) **كرة سلة:** ركض راشد باتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s، ومن منتصف الملعب صوَّب كرة بسرعة 8 m/s بزاوية قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 5-2)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد، ومسار الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.
a) راشد: $\langle 2.5, 0\rangle$؛ الكرة: $\langle 6.5, 4.7\rangle$

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.
10.2 m/s بزاوية قياسها 28° مع الأفقي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-2)

11) $A(-4, 2), B(3,6)$ $\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$

12) $Q(1, -5), R(-7, 8)$ $\langle -8, 13\rangle; \sqrt{233} \approx 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة. (الدرس 5-3)

13) $u = \langle 9, -4\rangle, v = \langle -1, -2\rangle$ 93°

14) $u = \langle 8, 4\rangle, v = \langle -2, 4\rangle$ 90°

15) $u = \langle 2, -2\rangle, v = \langle 3, 8\rangle$ 114°

16) **اختيار من متعدد:** إذا كان:
$u = \langle 2, 3\rangle, v = \langle -1, 4\rangle, w = \langle 8, -5\rangle$، فما ناتج $(u \cdot v) + (w \cdot v)$؟ (الدرس 5-3) B

A -2
B -18
C 15
D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أو لا: (الدرس 5-3)

17) $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$ −2 ؛ غير متعامدين

18) $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$ 16 ؛ غير متعامدين

19) $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$ −43 ؛ غير متعامدين

20) $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$ 0 ؛ متعامدان

21) **عربة:** يسحب أحمد عربة بقوة مقدارها 25 N، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 5-3)

a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. 3247.6 جولًا

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40°، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أو أقل؟ فسِّر إجابتك. أقل؛ سيبذل 2872.7 جولًا

أوجد مسقط u على v، ثم اكتب u على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v. (الدرس 5-3) 22-25 انظر الهامش

22) $u = \langle 7, -3\rangle, v = \langle 2, 5\rangle$

23) $u = \langle 2, 4\rangle, v = \langle 1, 3\rangle$

24) $u = \langle 3, 8\rangle, v = \langle -9, 2\rangle$

25) $u = \langle -1, 4\rangle, v = \langle -6, 1\rangle$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 5-1, 5-2, 5-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		

5-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

تمثيل المتجهات في النظام ثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا.

الدرس 5-4

تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.

التعبير عن المتجهات جبريًّا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

ما بعد الدرس 5-4

إيجاد الضرب الداخلي والزاوية بين متجهين في الفضاء.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كم عدد أجزاء المستوى الإحداثي؟ وماذا يسمى كل جزء منها؟ أربعة ، ربع
- ما الإشارات الممكنة للأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي الثنائي الأبعاد؟ $(+,+), (-,+), (-,-), (+,-)$
- ما عدد أجزاء نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد؟ وماذا يُسمى كل جزء منها؟ ثمانية ، ثمن
- ما الإشارات الممكنة للثلاثيات المرتبة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد. $(+,+,+), (-,-,-), (-,-,+), (+,-,-), (+,-,+), (-,+,-), (+,+,-), (-,+,+)$

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا.

والآن:

- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًّا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

الثُمن
octant

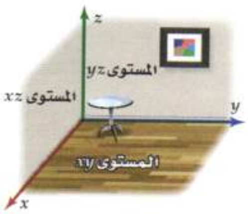
الثلاثي المرتب
ordered triple

www.obeikaneducation.com

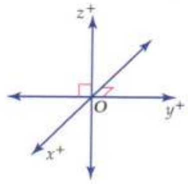
لماذا؟

يتحدّد اتجاه الصاروخ بعد إطلاقه بدلالة اتجاه في المستوى الإحداثي، وزاوية في الفضاء تُحدّد بالنسبة إلى الأفقي. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

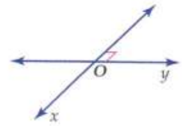
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط في المستوى . وتحتاج إلى **نظام إحداثيٍّ مكوَّن من ثلاثة أبعاد**؛ لتعيين نقطة في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy ، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 5.4.1. ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 5.4.2. ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلى 8 مناطق يُسمَّى كلٌّ منها **الثُمن** ، حيث يمثِّل سطح الأرض المستوى xy ، ويمثّل الجداران المستويين xz ، yz كما في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.3



الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.1

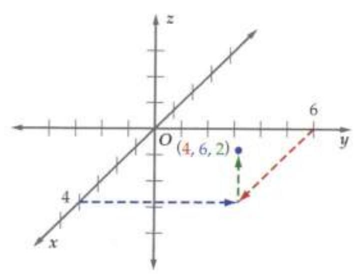
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy ، ثم تحرك للأعلى، أو الأسفل موازيًا للمحور z حسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

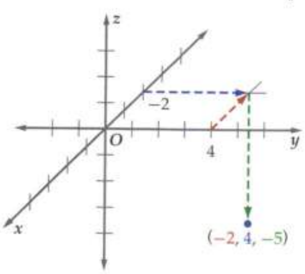
a) $(4, 6, 2)$

عيّن $(4, 6)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطة على بُعد وحدتين للأعلى من الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه .



b) $(-2, 4, -5)$

عيّن $(-2, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطة على بُعد 5 وحدات للأسفل من الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: انظر ملحق الإجابات

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (38)	• تنويع التعليم ص (38)	• تنويع التعليم ص (37, 40)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)

تشبه عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

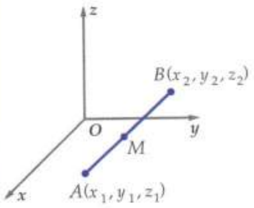
مفهوم أساسي **قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء**

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ بالقانون:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالقانون:

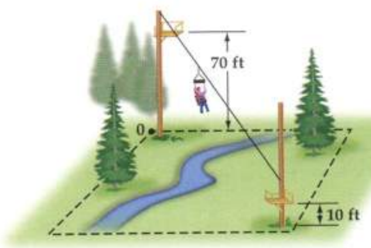
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



سوف تبرهن قانون المسافة في السؤال 53

مثال 2 من واقع الحياة **المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء**

رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة تربط بين منصتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين $(10, 12, 50)$ ، $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصتين إلى أقرب قدم.

استعمل قانون المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad \text{قانون المسافة}$$

$$= \sqrt{(70-10)^2+(92-12)^2+(30-50)^2} \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$\approx 101.98 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أننا نحتاج إلى حبل طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.

استعمل قانون نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{قانون المنتصف}$$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

تحقق من فهمك

2) **طائرات :** تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها. إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين $(300, 150, 30000)$ ، $(450, -250, 28000)$، مع العلم أن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب.

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

2A) نعم؛ تبعد الطائرتان حوالي 2045 قدمًا، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريبًا.

B) إذا أطلقت ألعابٌ نارية، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

(375, −50, 29000)

الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

المثال 1 يُبيّن كيفية تعيين نقطة في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.

a) $(1, 5, 3)$.

b) $(-1, -5, 2)$.

للفرعين **a, b** انظر الهامش

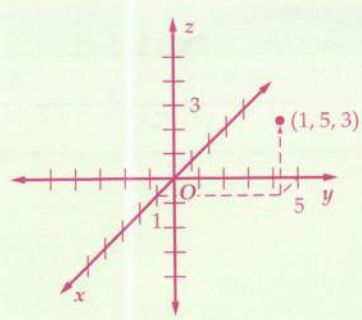
2 **هندسة معمارية :** صمّم مهندس معماري غرفة خشبية على سطح أحد المنازل، واستعمل قطعة خشب طويلة؛ لتثبيت السقف بحيث ينتهي طرفاها بنقطتين إحداثياتهما $(70, 80, 20)$ ، $(30, 40, 10)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالقدم، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول قطعة الخشب. 57.45ft

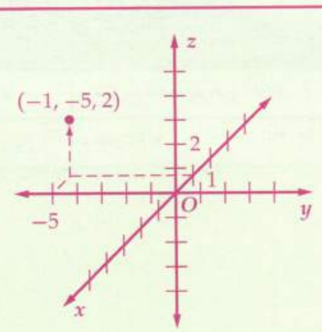
b) يرغب صاحب المنزل في تثبيت مصباح كهربائي في منتصف قطعة الخشب. أوجد إحداثيات موقع المصباح. $(50, 60, 15)$

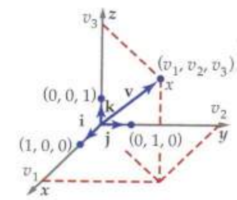
إجابات (مثال إضافي):

1a)



1b)





الشكل 5.4.4

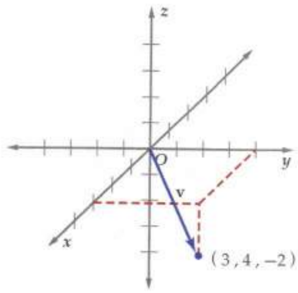
المتجهات في الفضاء إذا كان **v** متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالثلاثي المرتب $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالثلاثي $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$، وعن متجهات الوحدة القياسية بالثلاثيات $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$، كما في الشكل 5.4.4 . ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه **v** بدلالة متجهات الوحدة **i, j, k** بالصورة $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

عيِّن موقع كل من المتجهين الآتيين في الفضاء، ومثِّلهما بيانيًّا:

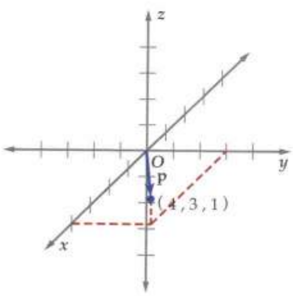
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$، ثم مثِّل المتجه **v** بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$، ثم مثِّل المتجه **p** بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك (3A, B انظر ملحق الإجابات)

عيِّن موقع كل من المتجهين الآتيين في الفضاء، ومثِّلهما بيانيًّا:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

وكما في المتجهات ذات البُعدين نجد الصورة الإحداثية لقطعة مستقيمة متجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

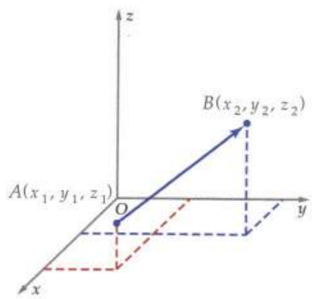
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة **u** باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



المتجهات في الفضاء

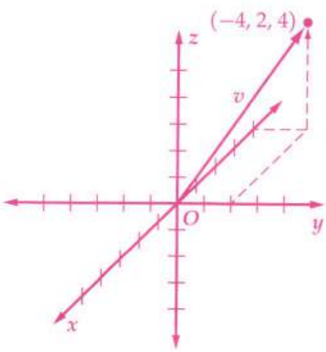
المثال 3 يُبيِّن كيفية تعيين متجه في الفضاء.

المثال 4 يُبيِّن كيفية التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا.

المثال 5 يُبيِّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

مثالان إضافيان

3 عيِّن موقع المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4 \rangle$، ومثِّله بيانيًّا.



4 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2, -1)$ ونقطة نهايته $B(1, 5, -3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2 \rangle, \sqrt{57}$,

$\left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57} \right\rangle$

تنويع التعليم

فوق

توسع ما الشكل الثلاثي الأبعاد الذي رؤوسه:

$A(2, 6, 6), B(2, 6, 0), C(5, 6, 6), D(5, 6, 0), E(2, 1, 6), F(2, 1, 0), G(5, 1, 6), H(5, 1, 0)$

متوازي مستطيلات

مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4,-2,1)$، ونقطة نهايته $B(3,6,-6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية لمتجه

$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

(4A $A(-2,-5,-5), B(-1,4,-2)$ **(4B** $A(-1,4,6), B(3,3,8)$

(4A $\langle 1, 9, 3 \rangle; \sqrt{91}$; $\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$

(4B $\langle 4, -1, 2 \rangle; \sqrt{21}$; $\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهات الوحدة، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هو الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

مثال 5 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(a $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$ بالتعويض

$$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$$ ضرب متجه في عدد حقيقي، وجمع متجهين

$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$

(b $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$ بالتعويض

$$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$$ ضرب متجه في عدد حقيقي

$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$ بجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(5A $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56 \rangle$ **(5B** $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45 \rangle$

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض نموذجًا للنظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد على السبورة. ثم عيِّن عليه نقطة وكلِّف أحد الطلاب بإيجاد إحداثياتها. اسحب النقطة إلى أعلى أو إلى أسفل باتجاه المحور z، وإلى الأمام أو إلى الخلف باتجاه المحور x، وإلى اليسار أو إلى اليمين باتجاه المحور y. وكلِّف الطلاب بإيجاد إحداثيات النقطة على صورة ثلاثي مرتب بعد كل مرة تسحب فيها النقطة. ناقش أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزوج المرتب والثلاثي المرتب.

مثال إضافي

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle, \mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$:

(a $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

(b $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$ $\langle -13, 16, -9 \rangle$

إرشادات للمعلم الجديد

ترتيب الإحداثيات في المثال 4، ذكّر الطلاب بأن عكس ترتيب نقطتي البداية والنهاية يغير المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهما متجهان لهما الطول نفسه، ولكن في اتجاهين متعاكسين.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب بناء نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد باستعمال أعواد من الخشب، ثم اطلب إليهم تدريج محاوره وتلوين الجزء السالب منها. وفي الوقت الذي يرفع فيه أحد الطلاب النموذج كلِّف طلابًا آخرين بتعيين نقاط وتسميتها بثلاثيات مرتبة.

المحتوى الرياضي

خصائص المتجهات في الفضاء

تشبه خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء مثيلاتها في المستوى. ويمكن تعريف عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد ثابت، وإيجاد طول المتجه، كما يمكن كتابة المتجه بدلالة المركبات $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$، فإذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ وكان n أي عدد حقيقي، فإن:

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا وفقط إذا كانت $a_1 = b_1$، $a_2 = b_2$، $a_3 = b_3$.
- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3 \rangle$
- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3 \rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 39-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1) **1-6 انظر ملحق الإجابات**

1) $(1, -2, -4)$
2) $(3, 2, 1)$
3) $(-5, -4, -2)$
4) $(-2, -5, 3)$
5) $(2, -2, 3)$
6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2) **7-10 انظر ملحق الإجابات**

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$
8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$
9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$
10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيارون:** في لحظة ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرة أخرى $(-289, 715, 16100)$، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم. **3445 ft**

b) عيِّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة. **(193, 297, 17700)**

عيِّن موقع كلٍّ من المتجهات الآتية في الفضاء، ثم مثِّله بيانيًّا: (مثال 3) **12-19 انظر ملحق الإجابات**

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$
13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$
14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$
15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$
16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 4) **20-27 انظر ملحق الإجابات**

20) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$
21) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$
22) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$
23) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$
24) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$
25) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$
26) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$
27) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$. (مثال 5)

28) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ **$\langle -88, 6, 99 \rangle$**
29) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ **$\langle -65, -18, 56 \rangle$**
30) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ **$\langle 38, -36, -65 \rangle$**
31) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ **$\langle 48, 12, -38 \rangle$**
32) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **$\langle -68, -24, 55 \rangle$**
33) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ **$\langle 22, 36, 3 \rangle$**

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 5)

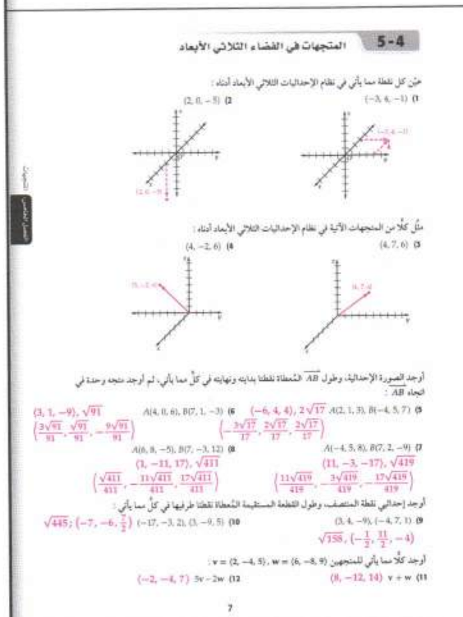
34) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ **$\langle -27, 16, -21 \rangle$**
35) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ **$\langle -63, 28, 56 \rangle$**
36) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ **$\langle -22, 14, -1 \rangle$**
37) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ **$\langle 50, -18, 10 \rangle$**
38) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ **$\langle -18, -6, 6 \rangle$**
39) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ **$\langle -13, 2, 21 \rangle$**

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$، فأوجد إحداثيات النقطة P في كل مما يأتي:

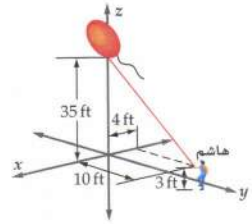
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **$(4, -2, -1)$**
41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$ **$(-3, 6, -1)$**
42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **$(3, -2, 7)$**
43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	39-1، 53، 66-55
ضمن المتوسط	39-1 فردي، 53-40، 66-55
فوق المتوسط	66-40



44) **تطوُّع:** تَطَوَّع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدم. **34 ft**



تحقّق مما إذا كانت النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي رؤوسًا لمثلث قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع:

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$ **متطابق الضلعين**

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$ **قائم الزاوية**

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$ **مختلف الأضلاع**

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء، لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r. **انظر ملحق الإجابات**

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$، طول نصف قطرها 4 **49-52) انظر الهامش**

50) مركزها $(6, 0, -1)$، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(5, -3, 4)$، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تبرير:** أثبت صحة قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء.
(إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس مرتين) **انظر ملحق الإجابات**

54) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $M_1(-1, 2, -5)$، $M_2(3, 8, -1)$، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M. **$(0, 3.5, -4)$**

55) **اكتب:** اشرح موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر معقولية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر معقولية. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد مسقط **u** على **v** في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب **u** على صورة جمع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط **u** على **v**: (الدرس 5-3)

56) $\mathbf{u} = \langle 6, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$
$\langle 1.6, -0.8 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1.6, -0.8 \rangle + \langle 4.4, 8.8 \rangle$

57) $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$
$\langle -0.19, -0.04 \rangle, \mathbf{u} = \langle -0.19, -0.04 \rangle + \langle -0.81, 4.04 \rangle$

58) $\mathbf{u} = \langle 5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$
$\langle 2.4, -1.2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 2.4, -1.2 \rangle + \langle 2.6, 5.2 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي: (الدرس 5-2)

59) $A(6, -4), B(-7, -7)$ $\langle -13, -3 \rangle, \sqrt{178} \approx 13.3$

60) $A(-4, -8), B(1, 6)$ $\langle 5, 14 \rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$

61) $A(-5, -12), B(1, 6)$ $\langle 6, 18 \rangle, \sqrt{360} \approx 19.0$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة **i** , **j** في كل مما يأتي: (الدرس 5-2)

62) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ $\frac{21}{5}\mathbf{i} + -\frac{2}{3}\mathbf{j}$

63) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ $-\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$

64) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ $-15.8\mathbf{i} + -6.1\mathbf{j}$

تدريب على اختبار

65) ما نوع المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(-2.2, 4.3, 5.6)$, $B(0.7, 9.3, 15.6)$, $C(3.6, 14.3, 5.6)$؟ **B**

A قائم الزاوية
B متطابق الضلعين
C متطابق الأضلاع
D مختلف الأضلاع

66) تطير طائرة بسرعة $100\,\text{m/s}$ باتجاه الغرب. إذا علمت أن الرياح تهب من الجنوب بسرعة $30\,\text{m/s}$، فما القيمة التقريبية لمقدار محصِّلة سرعة الطائرة؟ **C**

A $4\,\text{m/s}$
B $95.4\,\text{m/s}$
C $104.4\,\text{m/s}$
D $100\,\text{m/s}$

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يجد بعض الطلاب صعوبة في البدء بحل التمارين 47–45. ذكِّرهم أن المثلث القائم الزاوية فيه زاوية قياسها 90° وضلعان متعامدان، وأن المثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان لهما الطول نفسه، وأن أطوال أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع متساوية في الطول، وأنه لا يوجد ضلعان لهما الطول نفسه في المثلث المختلف الأضلاع.

4 التقويم

...علم لاحق اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة ...ول ما تعلموه في هذا الدرس، وكيف ...يساعدهم في الدرس القادم المتعلق بإيجاد ...اوية بين متجهين.

تنويع التعليم

فوق

توسع يكون الجسم في وضع اتزان إذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه صفرًا. اسأل الطلاب إذا أثرت ثلاث قوى على جسم ومُثلت بالمتجهات $\langle -1, 2, -6 \rangle$, $\langle 5, 2, 3 \rangle$, $\langle 4, -1, 3 \rangle$، فما المتجه الرابع الذي يؤثر على الجسم ويجعله في حالة اتزان. $\langle -8, -3, 0 \rangle$

...ابات:

$(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$

$(x-6)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{4}$

$(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 3$

$x^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 144$

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:
درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى.

والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء.
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:
الضرب الاتجاهي
cross product
متوازي السطوح
parallelepiped
الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق مما إذا كان خطا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتي الإقلاع ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء يشبه إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في الفضاء كالآتي: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

مثال 1 — إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$
$= -35 + 51 + (-15) = 1$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$
$= 12 + (-21) + 9 = 0$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

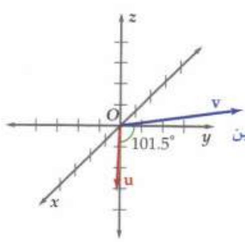
1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$ 0؛ متعامدان

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$ 4؛ غير متعامدين

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 — الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$، إلى أقرب منزلة عشرية.



$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1\rangle\cdot\langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$ بإيجاد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$ بالتبسيط، والحلّ بالنسبة إلى θ

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو 101.5° تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$، إلى أقرب منزلة عشرية. 124.6°

5-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي.

الدرس 5-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين والزاوية بينهما في الفضاء.
إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات واستعماله في إيجاد المساحات والحجوم.

ما بعد الدرس 5-5
إيجاد متوسط السرعة المتجهة، والسرعة المتجهة اللحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- كيف تجد المتجه الذي يمثل مسار كل من الطائرتين؟ بطرح إحداثيات نقطة الإقلاع من إحداثيات النقطة التي تصل إليها الطائرة بعد الفترة الزمنية المحددة.
- كيف تتحقق من توازي خطي سيرهما؟ إذا كانت الزاوية بين المتجهين (المسارين) 0° أو إذا كانت النسبة بين الإحداثيات المتناظرة ثابتة.

الضرب الداخلي في الفضاء

المثال 1 يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء للتحقق من كونهما متعامدين.
المثال 2 يُبيِّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين في الفضاء.

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (43, 45)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)

مثالان إضافيان

1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **u** و **v** في كلٍّ مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3 \rangle$.
0، متعامدان

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4 \rangle$.
-22، غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ بين **u**، **v** إذا كان $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3 \rangle$، $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4 \rangle$ إلى أقرب منزلة عشرية. $168.6°$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

محددة المصفوفة من الرتبة 3 × 3

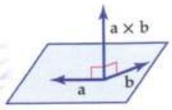
يمكن أن يستعمل الطلاب قاعدة الأقطار لحساب قيمة محددة المصفوفة من الرتبة 3×3.

الضرب الاتجاهي

مثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء.

مثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد مساحة سطح متوازي أضلاع في الفضاء.

مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حجم متوازي سطوح.



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء. وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين **a** , **b** هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز **a × b**، ويُقرأ a cross b . ويكون المتجه **a × b** عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين **a** , **b** .

مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين **a** , **b** هو المتجه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة مصفوفة من الرتبة 3 × 3 على المحدّدة أدناه، التي تتضمن متجهات الوحدة **i**, **j**, **k**، وإحداثيات كل من **a** , **b** نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه **a × b** .

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة **i**, **j**, **k** في الصف 1
بوضع إحداثيات **a** في الصف 2
بوضع إحداثيات **b** في الصف 3

قاعدة الأقطار

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}\right|$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 — إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$ ، ثم بيّن أن **u × v** يعامد كلًّا من **u** , **v**.

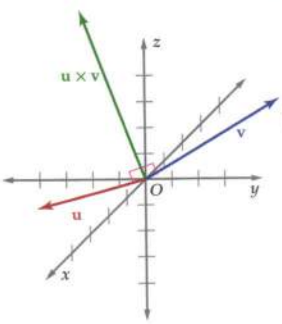
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بتطبيق قاعدة إيجاد قيمة محدّدة مصفوفة من الرتبة 3 × 3

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة كل مصفوفة من الرتبة 2 × 2

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$ بالتبسيط

$$= \langle -5, -6, 3 \rangle$$ الصورة الإحداثية



نلاحظ من التمثيل البياني المجاور أن **u × v** يعامد كلًّا من **u** , **v** .

ولإثبات أن **u × v** يعامد كلًّا من **u** , **v** جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ **u × v** مع كلٍّ من **u** , **v** .

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 1 \rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle -3, 3, 1 \rangle$
$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن **u × v** عمودي على كلٍّ من **u** , **v** .

تنبيه!

الضرب الاتجاهي
يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى ثنائي الأبعاد.

✓ **تحقق من فهمك** (3A, B) للإثبات انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u** , **v** في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن **u × v** يعامد كلًّا من **u** , **v** :

(3A $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$ $\langle 9, -21, -6 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$ $\langle -1, -7, 3 \rangle$

مثال إضافي

3 أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 2 \rangle$، ثم بيّن أن **u × v** يُعامد كلًّا من **u** , **v**. $\langle -10, -10, -25 \rangle$،

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle 6, -1, -2 \rangle = -60 + 10 + 50 = 0$$

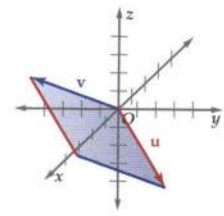
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle -1, -4, 2 \rangle = 10 + 40 - 50 = 0$$

مثالان إضافيان

4 أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران. 34.89 وحدة مربعة تقريبًا

5 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 49 وحدة مكعبة

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا يُعبِّر مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ عن مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 5.5.1 .



الشكل 5.5.1

مثال 4 مساحة سطح متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة كل مصفوفة من الرتبة 2×2

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بالتبسيط

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع في الشكل 5.5.1 تساوي 16.91 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك $\sqrt{545}$ أو حوالي 23.35 وحدة مربعة

(4 أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 5.5.2 أدناه. إن القيمة المطلقة **للضرب القياسي الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

مثال 5 حجم متوازي السطوح

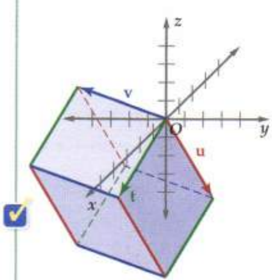
أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ بإيجاد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بالتبسيط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل 5.5.2 هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$، ويساوي 34 وحدة مكعبة.



الشكل 5.5.2

تحقق من فهمك

(5 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 86 وحدة مكعبة

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي
لاحظ أن عملية الضرب الداخلي إبدالية بخلاف عملية الضرب الاتجاهي.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة الطالب زوّد الطلاب بعدد من الأمثلة على مصفوفات من الرتبة 2 × 2 مثل:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

واسأل الطلاب أن يحددوا ما إذا كانت قيمة محددة كل من المصفوفات أعلاه موجبة أو سالبة. واختيار الرمز A إذا كانت سالبة والرمز B إذا كانت موجبة.

المحتوى الرياضي

متوازي السطوح هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء، له ستة أوجه، كل منه على شكل متوازي أضلاع، وإذا التقت ثلاثة متجهات من الأحرف الاثني عشر في مستويات مختلفة في نقطة واحدة، فإنها تشكل أحرفًا متجاورة لمتوازي السطوح.
وحجم متوازي السطوح يساوي ناتج ضرب مساحة سطح القاعدة في الارتفاع كما يساوي الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات.
وهناك حالات خاصة من متوازي السطوح منها:
المكعب (جميع أوجهه مربعات)، ومتعدد المعيّنات (جميع أوجهه معيّنات).

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ بوضع العدد المناسب في الفراغات في المعادلة الآتية:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} \boxed{-} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -5 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\mathbf{i} - \boxed{-22}\mathbf{j} + \boxed{5}\mathbf{k}$$

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أو لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ 0؛ متعامدان

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ 14؛ غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ 0؛ متعامدان

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ -15؛ غير متعامدين

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ -8؛ غير متعامدين

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 0؛ متعامدان

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتي الهيدروجين في جزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللَّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2) $109.5°$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ $88.9°$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ $45.4°$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ $37.5°$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ $152.3°$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3) (12-15) انظر ملحق الإجابات

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ $\langle 21, 7, 0\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ $\langle 25, 6, 71\rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ $\langle 38, 26, 21\rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ $\langle 7, 23, 12\rangle$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كل مما يأتي: (مثال 4) (16-19) انظر الهامش

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كل مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ 429 وحدة مكعبة

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ 85 وحدة مكعبة

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ 40 وحدة مكعبة

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 69 وحدة مكعبة

(24-27) إجابات ممكنة

أوجد متجهًا يعامد المتجه المُعطى في كل مما يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4\rangle$ $\langle 4, 3, 3\rangle$

25) $\langle -1, -2, 5\rangle$ $\langle 5, 5, 3\rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$ $\langle 1, 9, 1\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8\rangle$ $\langle -8, 0, 7\rangle$

إذا عُلم كل من $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ،$\mathbf{v}$ فأوجد حالة ممكنة للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ إجابة ممكنة: $\langle 3, 4, 2\rangle$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ إجابة ممكنة: $\langle -1, -3, 4\rangle$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ إجابة ممكنة: $\langle -3, 1, -7\rangle$

تحقَّق مما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة:

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ ليست على استقامة واحدة

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ ليست على استقامة واحدة

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أو لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$ متوازيان

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$ غير متوازيين

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاوية قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y. $\langle 0, 4, 4\sqrt{3}\rangle$

تحقَّق مما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحة سطحه، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أو لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$ ليس متوازي أضلاع

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$ متوازي أضلاع ؛ 9.4 وحدة مربعة تقريبًا، مستطيل

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

1) $\langle -2, 0, 1\rangle, \langle 3, 2, -3\rangle$ -9؛ غير متعامدين

2) $\langle -4, -1, 1\rangle, \langle 1, -3, 4\rangle$ 3؛ غير متعامدين

3) $\langle 0, 0, 1\rangle, \langle 1, -2, 0\rangle$ 0؛ متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 3, -2\rangle$ $154.9°$ تقريبًا

5) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -2, 5\rangle$ $96.9°$ تقريبًا

6) $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, -1, 6\rangle$ $51.3°$ تقريبًا

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

7) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$
$\langle -3, -3, 3\rangle$، $\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle 1, 3, 4\rangle = -3(1) + -3(3) + 3 \times 4 = 0$، $\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle -1, 0, -1\rangle = -3(-1) - 3(0) + 3(-1) = 0$

8) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 4, 3\rangle$
$\langle 27, 3, 14\rangle$، $\langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle 3, 1, -6\rangle = (27)(3) + 3(1) + 14(-6) = 0$، $\langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle -2, 4, 3\rangle = 27(-2) + 3(4) + 14(3) = 0$

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -3, 1\rangle$
$\langle 7, 1, -11\rangle$، $\langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 3, 1, 2\rangle = 7(3) + (1)(1) + (-11) \cdot 2 = 0$، $\langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 2, -3, 1\rangle = 7(2) + (1)(-3) - 11(1) = 0$

10) $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -3, -1\rangle$
$\langle 1, 4, -7\rangle$، $\langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 4, -1, 0\rangle = 1(4) + 4(-1) + -7(0) = 0$، $\langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 5, -3, -1\rangle = 1(5) + 4(-3) + -7(-1) = 0$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -4, 2\rangle$ 62.4 وحدة مربعة

12) $\mathbf{u} = \langle 2, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -8, -5\rangle$ 74.2 وحدة مربعة

13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle 3, -2, 9\rangle, \langle 6, -2, -7\rangle, \langle -8, -5, -2\rangle$ أحرفًا متجاورة. 643 وحدة مكعبة

8

3 التدريب

التقويم التكويني

...تعمل الأسئلة 1-25 للتأكد من فهم ...لاب.

استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ ...بين الواجبات المنزلية للطلاب حسب ...ستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة في الأسئلة 20–23، قد يعتبر بعض الطلاب أن قيمة حجم متوازي السطوح يمكن أن تكون سالبة عند تطبيق الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات؛ لذا ذكرهم بأن الحجم هو قياس والقياس موجب، لذلك فالحجم هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون: دون المتوسط	1–25، 42، 44–55
ضمن: ضمن المتوسط	1–39 فردي، 42، 44–55
فوق: فوق المتوسط	26–55

...ابات:

16) $13\sqrt{19}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريبًا.

17) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريبًا.

18) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريبًا.

19) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريبًا.

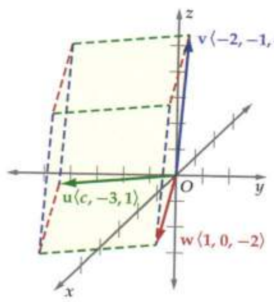
38) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، أقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$. في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطا سير الطائرتين؟ وضّح إجابتك. لا؛ انظر الهامش

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5\rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ 0

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ ليس ممكنًا

41) إذا كانت $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحدات مكعبة، فما قيمة c؟ 3



مسائل مهارات التفكير العليا

42) **تبرير:** تحقق مما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.
«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين». انظر الهامش

43) **تحدٍّ:** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5\rangle$، فأوجد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. 2

44) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى. انظر الهامش

45) **اكتب:** بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهين أو تعامدهما. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 5-4)

46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ $22.67; \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$

47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ $23.71; \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$

48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$ $36.62; \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا: (الدرس 5-3)

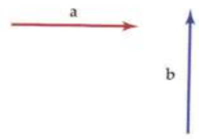
49) $\langle -8, -7\rangle \cdot \langle 1, 2\rangle$ -22 ؛ ليسا متعامدين

50) $\langle -4, -6\rangle \cdot \langle 7, 5\rangle$ -58 ؛ ليسا متعامدين

51) $\langle 6, -3\rangle \cdot \langle -3, 5\rangle$ -33 ؛ ليسا متعامدين

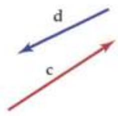
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 5-1)

52)



3cm, 60°

53)



0.5cm, 60°

تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟ D

A $\langle 1, 0, 0\rangle , \langle 1, 2, 3\rangle$

B $\langle 1, -2, 3\rangle , \langle 2, -4, 6\rangle$

C $\langle 3, 4, 6\rangle , \langle 6, 4, 3\rangle$

D $\langle 3, -5, 4\rangle , \langle 6, 2, -2\rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6\rangle$؟ A

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب تحديد أي مما يأتي (قانون المسافة، الضرب في عدد حقيقي، المتجه، المحددة) ترتبط بالضرب الاتجاهي؟ المحددة، المتجه

إجابات:

38) إجابة ممكنة: لا؛ لأن النسبة بين إحداثيات مركبات المتجهين ليست نفسها، وعليه فالمتجهان غير متوازيين.

42) دائمًا صحيحة، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يعطي متجهًا يعامد كلًّا من المتجهين الأصليين.

44) إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحتوي كلًّا من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبعد ثالث.

تنويع التعليم

فوق

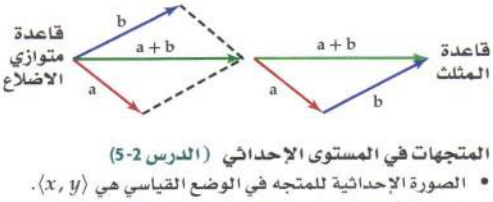
توسع اطلب إلى الطلاب استعمال ما تعلموه حول إيجاد مساحة سطح متوازي الأضلاع؛ لإثبات أن مساحة سطح المثلث الذي ضلعاه المتجهان $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ هي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدة مربعة تقريبًا. إجابة ممكنة: مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران فيه تساوي $\sqrt{638}$ وحدة مربعة. ومساحة سطح المثلث الذي يشكل ضلعان منه ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع تساوي نصف مساحة سطح متوازي الأضلاع، وهي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدة مربعة تقريبًا.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 1-5)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-5)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$ ، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن: $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 4-5)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالقانون:
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالقانون:
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

المتجه ص 10	الصورة الإحداثية ص 19
نقطة البداية ص 10	متجه الوحدة ص 21
نقطة النهاية ص 10	توافق خطي ص 22
الوضع القياسي ص 10	الضرب الداخلي ص 26
الاتجاه ص 10	المتجهان المتعامدان ص 26
الطول ص 10	مسقط المتجه ص 29
الاتجاه الربعي ص 11	الشغل ص 31
الاتجاه الحقيقي ص 11	نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ص 35
المتجهات المتوازية ص 11	المحور z ص 35
المتجهات المتكافئة ص 11	الثُمن ص 35
المتجهان المتعاكسان ص 11	الثلاثي المرتب ص 35
المحصلة ص 12	الضرب الاتجاهي ص 42
قاعدة المثلث ص 12	متوازي السطوح ص 43
قاعدة متوازي الأضلاع ص 12	الضرب القياسي الثلاثي ص 43
المتجه الصفري ص 13	
المركبات ص 15	
المركبات المتعامدة ص 15	

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه . خطأ؛ ينتهي عنده

2) إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle , \mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$ ، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$. خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1) , B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$. صحيحة

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$. خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

5) يتكافأ متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه. صحيحة

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$. خطأ؛ $90°$

7) لتجد على الأقل متجهًا يعامد أي متجهين في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين. صحيحة

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه. صحيحة

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$. خطأ؛ $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة، فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات:

تعزِّز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن الكلمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 18-10)

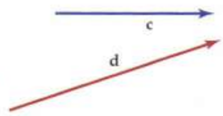
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق. كمية متجهة

11) شجرة طولها 20 ft. كمية قياسية

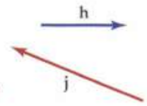
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

12)



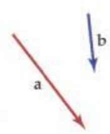
6.3 cm, 11°

13)



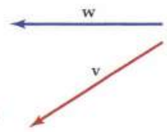
1.2 cm, 130°

14)



4.3 cm, 295°

15)



5 cm, 197°

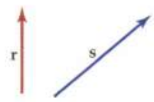
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m باتجاه الغرب، ثم 150 m باتجاه الشرق. 80 m للشرق

17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف. 20 N للخلف

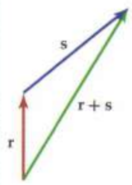
مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



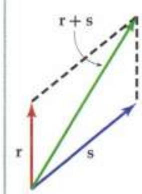
قاعدة المثلث

اسحب r ، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r ، وينتهي عند نقطة نهاية s.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب s ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r, s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

47 الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 25-19)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$ $\langle 6, 1\rangle; \sqrt{37} \approx 6.1$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$ $\langle -16, 8\rangle; \sqrt{320} \approx 17.9$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$ $\langle 14, 5\rangle; \sqrt{221} \approx 14.9$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$ $\langle 1, 5\rangle; \sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle, \mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ $\langle -8, -6\rangle$

23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$ $\langle -4, 4\rangle$

24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$ $\langle -18, -1\rangle$

25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$ $\langle 10, 11\rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي: (26-29) انظر الهامش

26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ بالتعويض

$= \langle 1, 1\rangle$ بالطرح

أوجد طول المتجه باستعمال قانون المسافة.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{[(4-3)]^2 + [-1-(-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بالتبسيط

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 33-26)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ -1 ؛ غير متعامدين

31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$ 48 ؛ غير متعامدين

32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$ 0 ؛ متعامدان

33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 7 ؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي:

34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ $70.6°$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + -5(7)$ بالتعويض

$= -8 + (-35) = -43$ بالتبسيط

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، ذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

الإجابات:

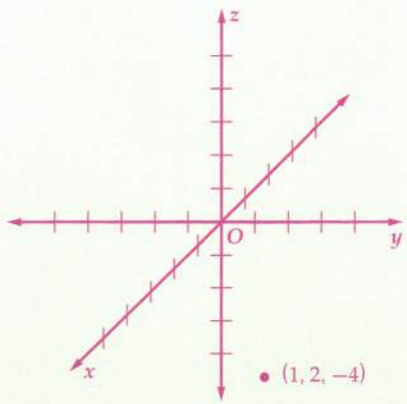
(26 $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

(27 $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

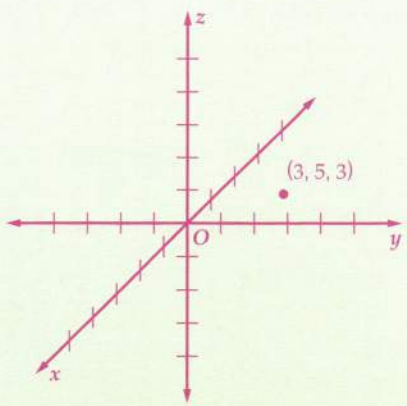
(28 $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

(29 $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

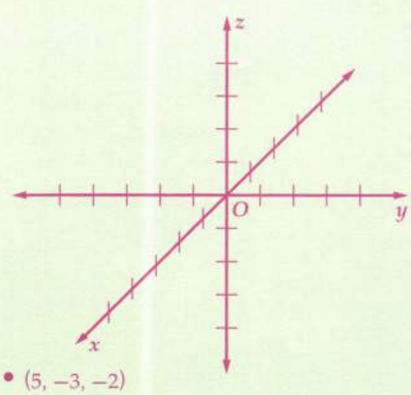
(36



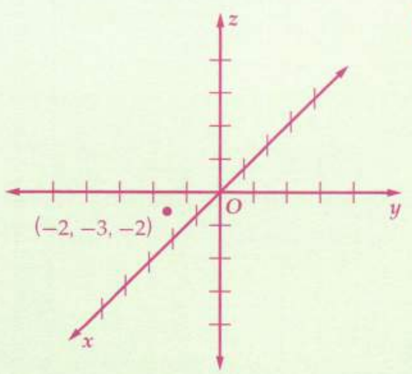
(37



(38



(39



5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 40-35)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد: **(39-36** انظر الهامش

(36 $(1, 2, -4)$

(37 $(3, 5, 3)$

(38 $(5, -3, -2)$

(39 $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها. **(43-40** انظر الهامش

(40 $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

(41 $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

(42 $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

(43 $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء: **(47-44** انظر الهامش

(44 $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

(45 $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

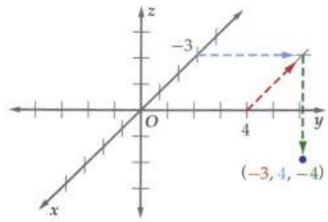
(46 $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

(47 $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطة تبعد 4 وحدات للأسفل عن هذه النقطة باتجاه موازٍ للمحور z .



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 45-41)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أو لا.

(48 $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$ 0 ؛ متعامدان

(49 $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$ -48 ؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: **(50, 51** انظر الهامش

(50 $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

(51 $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

إجابات:

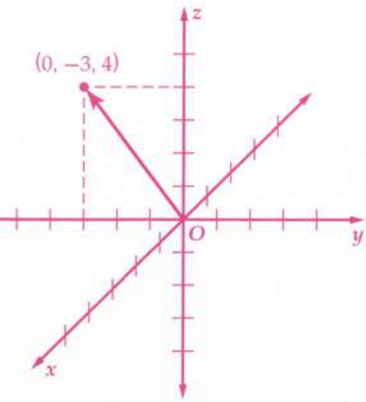
(40 $12.33; (-1, 5, 6)$

(41 $10.77; (-7, 2, 1)$

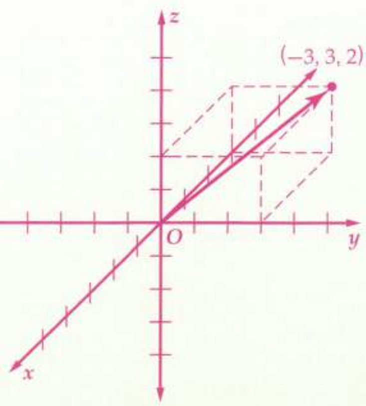
(42 $17.44; (-3, -4, 2)$

(43 $15.52; (2, -1.5, 4)$

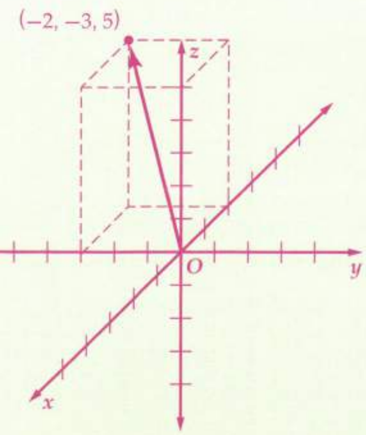
(44



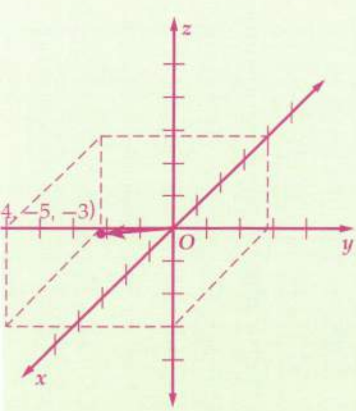
(45



(46



(47

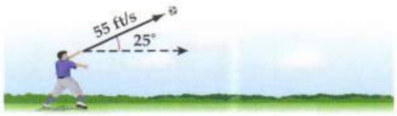


(50 $\langle 17, -1, 10 \rangle, \langle 17, -1, 10 \rangle \langle 1, -3, -2 \rangle = 0 \ \langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 2, 4, -3 \rangle = 0$

(51 $\langle -9, -6, -21 \rangle, \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 4, 1, -2 \rangle = 0 , \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 5, -4, -1 \rangle = 0$

تطبيقات ومسائل

52) **كرة قدم:** تلقّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدت بسرعة ابتدائية مقدارها 55 ft/s، وبزاوية قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5) 49.8 ft/s تقريبًا، 23.2ft/s تقريبًا



53) **طيران:** تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي. أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5) ⟨108.3, −19.1⟩

54) **حركة المرور:** تقف سيارة وزنها 1500 kg على أرض مرتفعة، تميل عن الأفقي بزاوية قياسها °10 . إذا أهملت قوة الاحتكاك، فأوجد القوة اللازمة لمنع السيارة من الانزلاق للأسفل. (الدرس 3-5) 260.5 N

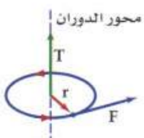
55) **أقمار اصطناعية:** إذا مَثَّلت النقطتان (28625, 32461, −38426)، (−31613, −29218, 43015) موقعي قمرين اصطناعيين، والنقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل. وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-5)

a) أوجد المسافة بين القمرين. 118598 mi تقريبًا

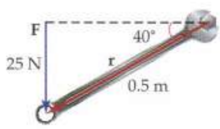
b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟ (−1494, 1621.5, 2294.5)

c) اشرح إمكانية وضع القمر الثالث في الفرع **b** . انظر الهامش

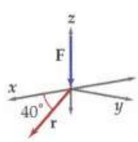
فيزياء يمكنك استعمال الضرب الاتجاهي؛ لإيجاد متجه العزم **T** الذي يقيس فعالية قوة تؤثر في رافعة، وتسبّب دورانًا حول محور الدوران. ويكون عموديًا على المستوى المتكوّن من المسافة المتجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة تأثير القوة، والقوة المؤثرة **F** كما في الشكل المجاور؛ لذا فإن متجه العزم هو $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$، ووحدة قياسه هي $(\mathbf{N \cdot m})$.



56) **إصلاح سيارات:** يستعمل ميكانيكي مفتاحًا طوله 0.5 m؛ لتثبيت صامولة في إحدى السيارات. أوجد مقدار متجه العزم حول الصامولة واتجاهه، إذا بذل الميكانيكي قوة مقدارها 25 N إلى الأسفل من نهاية المقبض، وتصنع زاوية قياسها °40 أسفل الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 5-5) 9.5 N.m ويكون موازيًا للمحور y



(إرشاد: مثّل بيانيًّا المتجه **r** بالوضع القياسي كما في الشكل المجاور)



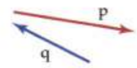
إجابة:

55c) إجابة ممكنة : لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض.

اختبار الفصل

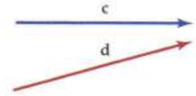
أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة، والمنقلة.

1)



0.8 cm, 25°

2)



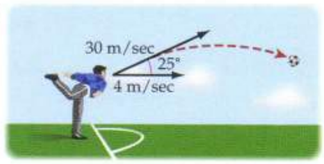
6 cm, 8°

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

3) $A(1, -3), B(-5, 1)$ $\langle -6, 4\rangle, \sqrt{52} \approx 7.2$

4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$ $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي. ما محصِّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟ 33.7 m/s; 22°



أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أو لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ -16 ؛ غير متعامدين

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ 0 ؛ متعامدان

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ -14 ؛ غير متعامدين

11) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأي مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** ؟ D

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

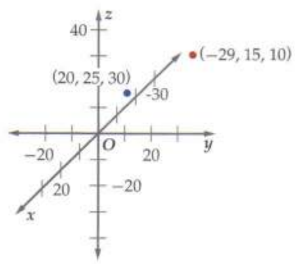
12) **حركة:** يدفع شخص صندوقًا على سطح أرض غرفة بقوة مقدارها 120 N إلى الأسفل ، وبزاوية قياسها 20° تحت الأفقي. أوجد الشغل الذي بذله الشخص، إذا حرك الصندوق مسافة 3 أمتار. 338.29 J

إذا كان $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

13) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ $\langle -45, -42, 26\rangle$

14) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ $\langle -1, -21, 1\rangle$

15) **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحتوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي $(20, 25, 30)$ ، $(-29, 15, 10)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة. 53.9 ft

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته. $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كل مما يأتي:

16) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ 27.9°

17) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 110.8°

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u, v** : 18-19) انظر الهامش

18) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

19) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

الفصل 5 اختبار الفصل

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

إجابات:

18) $\langle 65, 16, -59\rangle$،

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)(11)$
$= 0$

19) $-7\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$،

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1)$
$= 0$

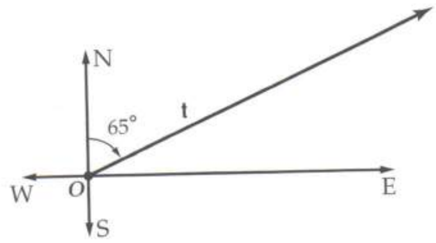
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2)$
$= 0$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

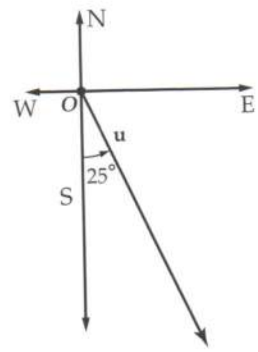
الدرس 1-5 (تحقق من فهمك)، ص (11)

2A)



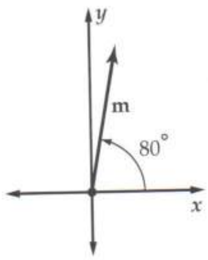
1 in = 10 ft/s

2B)



1 in = 10 m/h

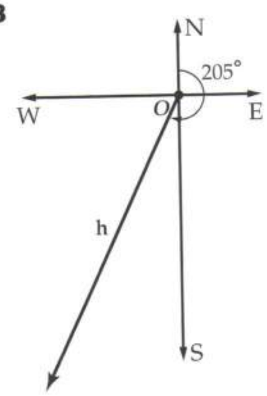
2C)



1 cm = 30 N

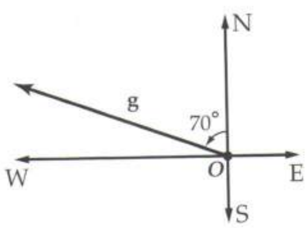
الدرس 1-5، ص (16-18)

7)



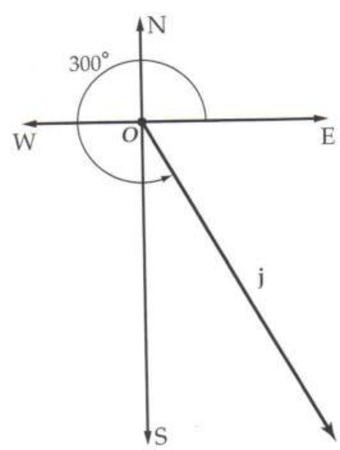
1 cm : 3 in/s

8)



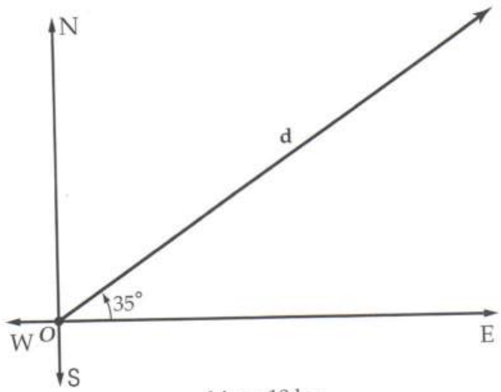
1 cm : 2 km/h

9)



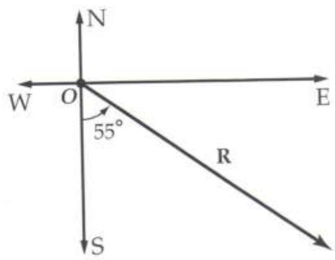
1 cm : 1 ft/m

10)



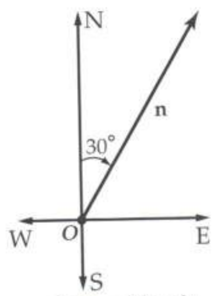
1 in = 10 km

11)



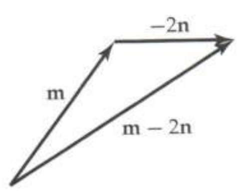
1 cm = 10 m

12)

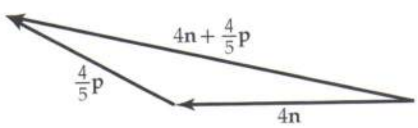


1 cm = 10 m/s

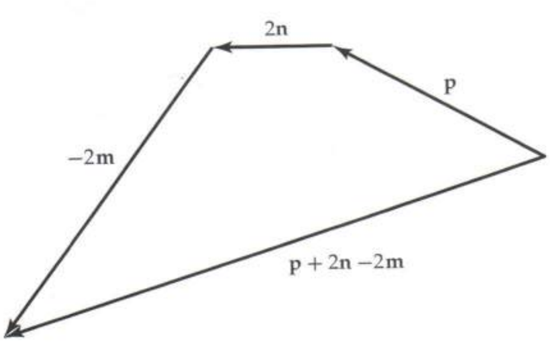
22)



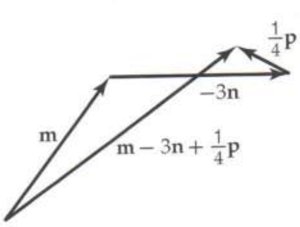
23)



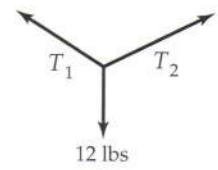
24)



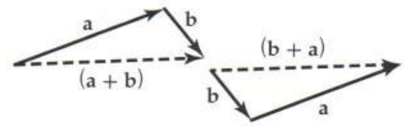
25)



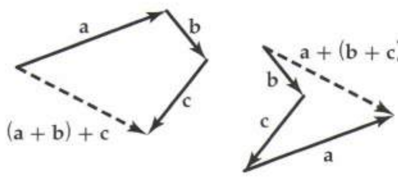
(37a



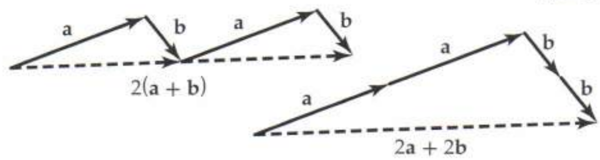
(41



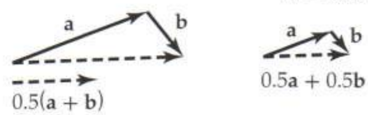
(42



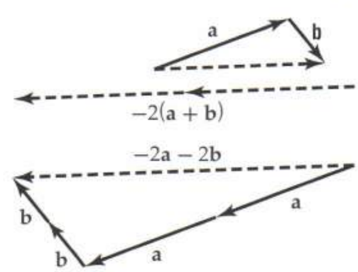
(43 $k = 2$



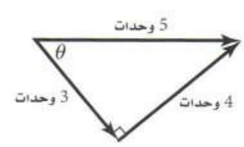
$k = 0.5$



$k = -2$



(44 إجابة ممكنة:



(47 مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتي بداية المتجهين معًا، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يكمل متوازي الأضلاع.

(48 نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

(49 إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطة واحدة، ثم تكمل متوازي الأضلاع وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

(53 $b = 19.8$ ، $a = 11.2$ ، $A = 32°$

(54
$$\sin 2x - \cos x = 0$$
$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ، $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

حيث n عدد صحيح

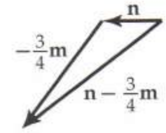
الدرس 2-5 ، ص (25)

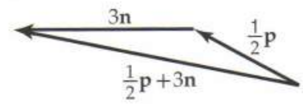
(47
$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle\\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle\\ &= \langle x_2+x_1, y_2+y_1\rangle\\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle\\ &= \mathbf{b}+\mathbf{a}\end{aligned}$$

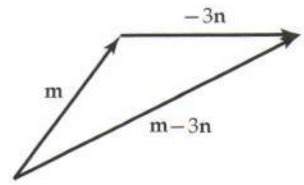
(48
$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle\\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle\\ &= \langle x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3\rangle\\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2+x_3, y_2+y_3\rangle\\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle)\\ &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\end{aligned}$$

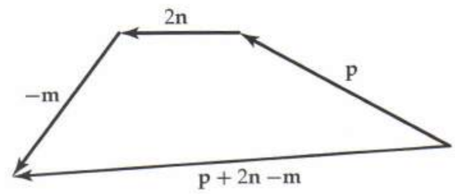
(49
$$\begin{aligned}k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle)\\ &= k\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle\\ &= \langle k(x_1+x_2), k(y_1+y_2)\rangle\\ &= \langle kx_1+kx_2, ky_1+ky_2\rangle\\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle\\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle\\ &= k\mathbf{a}+k\mathbf{b}\end{aligned}$$

(50
$$|k\mathbf{a}| = |k\langle x_1, y_1\rangle|$$
$$= |\langle kx_1, ky_1\rangle|$$
$$= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2}$$
$$= \sqrt{k^2{x_1}^2 + k^2{y_1}^2}$$
$$= \sqrt{k^2({x_1}^2 + {y_1}^2)}$$
$$= \sqrt{k^2}\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$$
$$= |k|\,|\langle x_1, y_1\rangle|$$
$$= |k|\,|\mathbf{a}|$$

(52


(53


(54


(55


الدرس 3-5 ، ص (32, 33)

(16 $\mathbf{w_1} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29} \right\rangle$

(17 $\mathbf{w_1} = \langle -1, 1\rangle, \mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle + \langle 6, 6\rangle$

(18 $\mathbf{w_1} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10} \right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10} \right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10} \right\rangle$

(19 $\mathbf{w_1} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle, \mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73} \right\rangle$

(43
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$
$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle$$
$$\mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_2v_2} \stackrel{?}{=} \mathbf{v_1u_1} + \mathbf{v_2u_2}$$
$$\mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_2v_2} = \mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_2v_2}$$

(44
$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot (\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle + \langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\rangle) \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle + \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\rangle$$
$$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1} + \mathbf{w_1}, \mathbf{v_2} + \mathbf{w_2}\rangle \stackrel{?}{=} (\mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_2v_2}) + (\mathbf{u_1w_1} + \mathbf{u_2w_2})$$
$$\mathbf{u_1}(\mathbf{v_1} + \mathbf{w_1}) + \mathbf{u_2}(\mathbf{v_2} + \mathbf{w_2}) \stackrel{?}{=} \mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_1w_1} + \mathbf{u_2v_2} + \mathbf{u_2w_2}$$
$$\mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_1w_1} + \mathbf{u_2v_2} + \mathbf{u_2w_2} = \mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_1w_1} + \mathbf{u_2v_2} + \mathbf{u_2w_2}$$

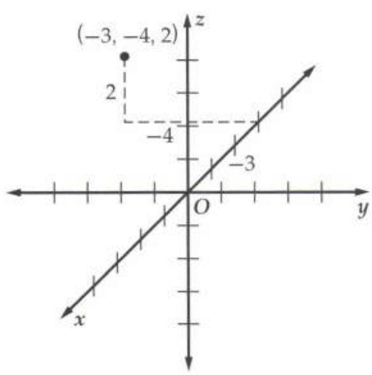
(45 $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
$$k(\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle) \stackrel{?}{=} k\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot k\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle$$
$$k(\mathbf{u_1v_1} + \mathbf{u_2v_2}) \stackrel{?}{=} \langle k\mathbf{u_1}, k\mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\rangle \cdot \langle k\mathbf{v_1}, k\mathbf{v_2}\rangle$$
$$k\mathbf{u_1v_1} + k\mathbf{u_2v_2} = k\mathbf{u_1v_1} + k\mathbf{u_2v_2} = k\mathbf{u_1v_1} + k\mathbf{u_2v_2}$$

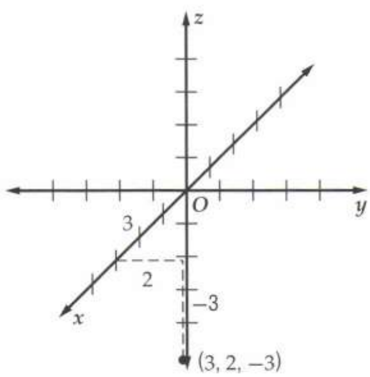
(46 الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ هي $\theta = 90°$ $\quad \cos 90° = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

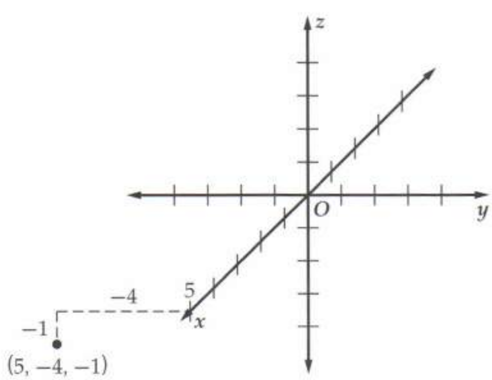
$\cos 90° = 0$ $\quad 0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

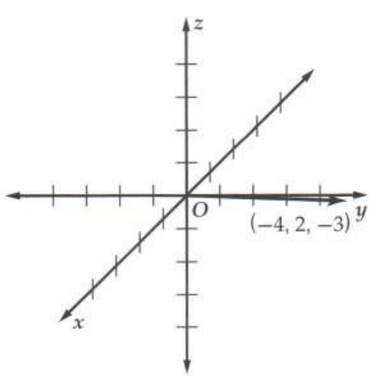
بضرب الطرفين في $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ $\quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$

الدرس 4-5 ، تحقق من فهمك ، ص (35, 37)

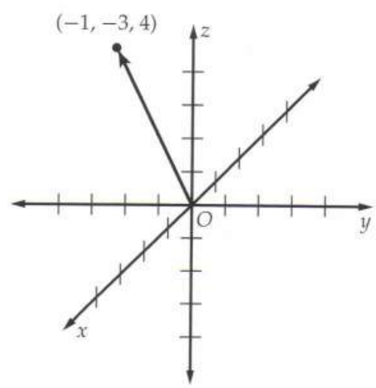
(1A


(1B


(1C


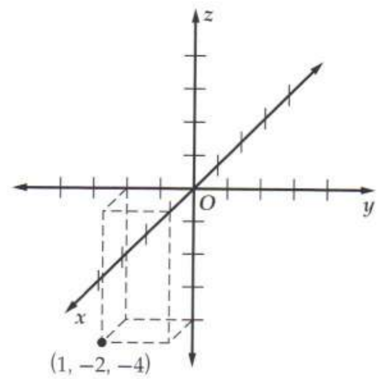
(3A


(3B

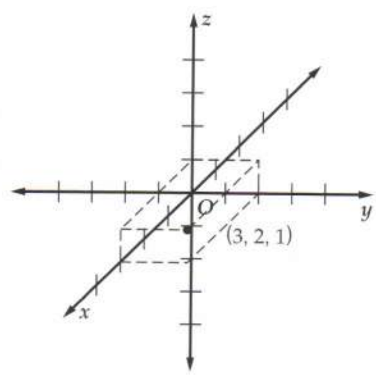


الدرس 5-4 ، ص (39, 40)

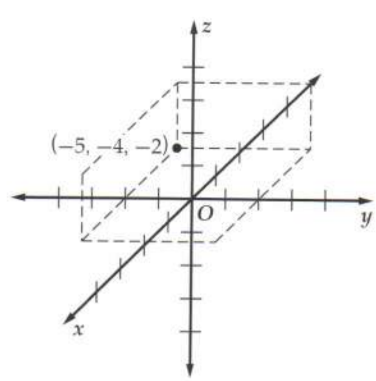
(1



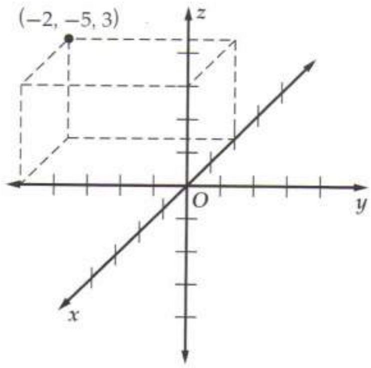
(2



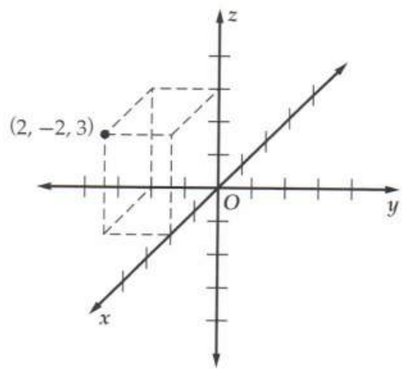
(3



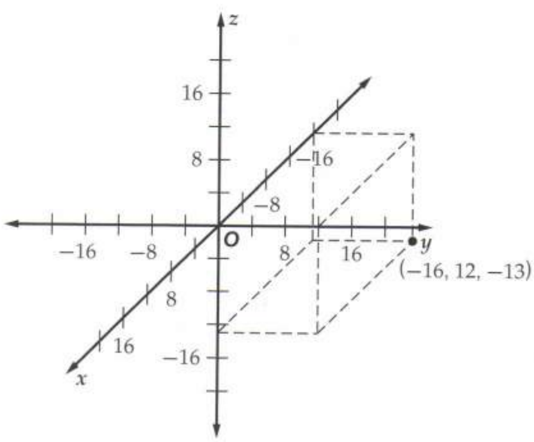
(4



(5



(6



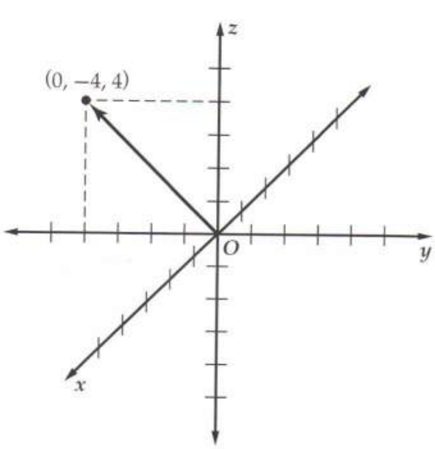
(7 12.25, $\left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

(8 9.90, $\left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

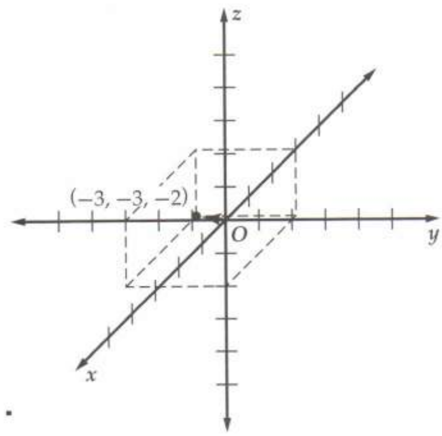
(9 15.65, $\left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

(10 9.11, $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

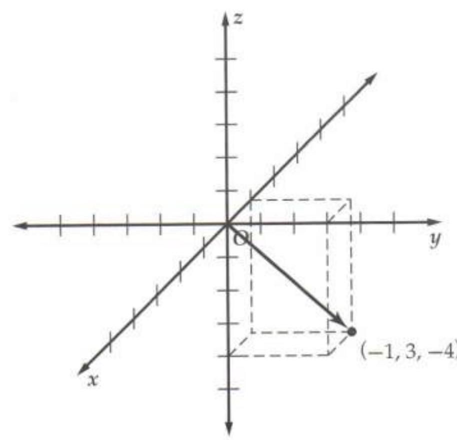
(12



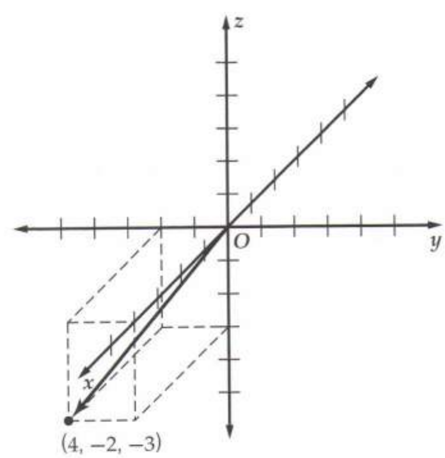
(13



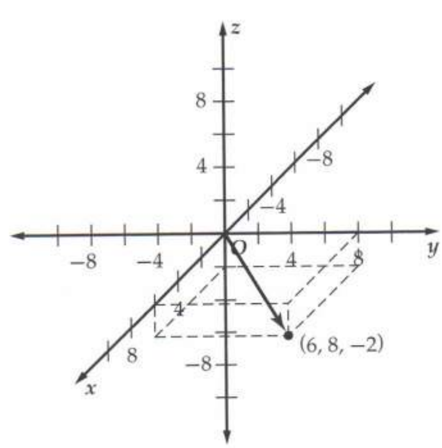
(14



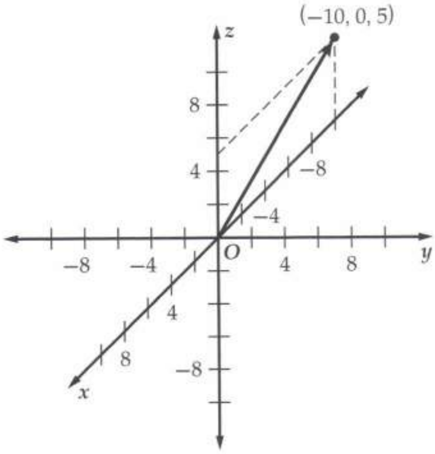
(15



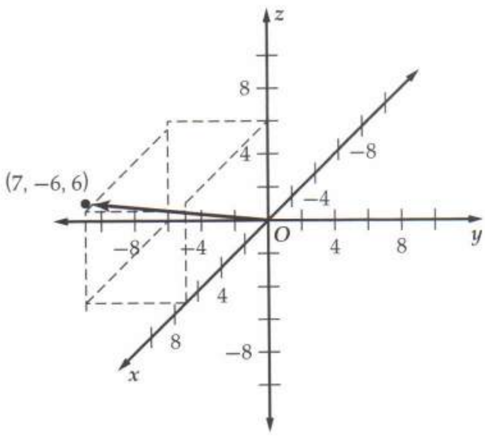
(16



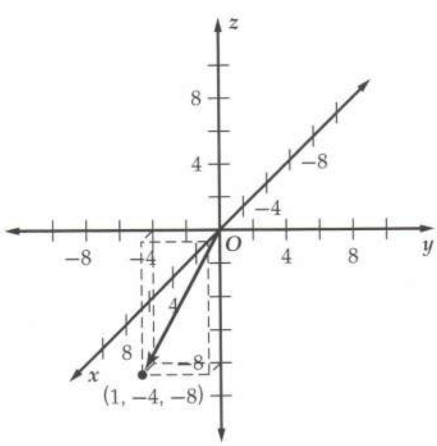
(17



(18



(19



(20 $\langle 16, 2, 8\rangle$ أو $16\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

(21 $\langle 0, -8, 12\rangle$ أو $-8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, 4\sqrt{13}, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

(22 $\langle -3, -5, -10\rangle$ أو $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k}, \sqrt{134},$

$$\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$$

(23 $\langle -4, 8, 20\rangle$ أو $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 20\mathbf{k}, 4\sqrt{30},$

$$\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$$

(24 $\langle -1, 8, -10\rangle$ أو $-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}, \sqrt{165},$

$$\left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$$

25) $\langle -6, -15, 4\rangle$ أو $-6\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\sqrt{277}$,

$$\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277}\right\rangle$$

26) $\langle 4, -15, 5\rangle$ أو $4\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\sqrt{266}$,

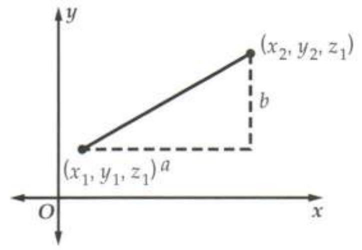
$$\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266}\right\rangle$$

27) $\langle 20, 32, 42\rangle$ أو $20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} + 42\mathbf{k}$, $2\sqrt{797}$,

$$\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797}\right\rangle$$

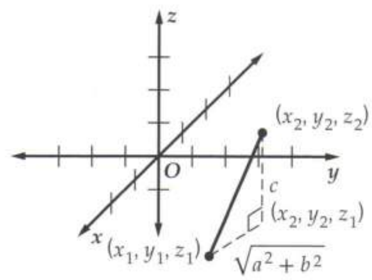
48)
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2}$$
$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$$

53) إجابة ممكنة: افترض أن النقطتين هما (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). النقطة التي تقع مباشرة تحت النقطة الثانية في المستوى الموازي للمستوى xy والمار بالنقطة (x_1, y_1, z_1) هي (x_2, y_2, z_1).
استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_1). افترض أن المركبة x للمسافة هي a والمركبة y للمسافة هي b.



لذلك تكون المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_1) هي $\sqrt{a^2+b^2}$

استعمل نظرية فيثاغورس مرة أخرى؛ لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). مركبة المسافة في المستوى الموازي لـ xy هي $\sqrt{a^2+b^2}$. افترض أن المركبة z للمسافة هي c.



وعليه تكون المسافة من النقطة (x_1, y_1, z_1) إلى النقطة (x_2, y_2, z_2) هي $\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

بما أن، $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = z_2 - z_1$،

فإن المسافة بين النقطتين (x_2, y_2, z_2) ، (x_1, y_1, z_1) هي $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

55) إجابة ممكنة: يكون استعمال بُعدين أكثر منطقية عند وصف موقع على الخارطة؛ لأن الخارطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقية عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعادًا ثلاثة.

الدرس 5-5 ، تحقق من فهمك ، ص (42)

3A)
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle\\&= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)\\&= 36 + (-42) + 6\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle\\&= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)\\&= 45 + (-21) + (-24)\\&= 0\end{aligned}$$

3B)
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle -2, -1, -3\rangle\\&= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)\\&= 2 + 7 + (-9)\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle\\&= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)\\&= -5 + (-7) + 12\\&= 0\end{aligned}$$

الدرس 5-5 ، ص (44, 45)

12) $\langle 21, 7, 0\rangle$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle\\&= 21(-1) + 7(3) + 0(5)\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle\\&= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)\\&= 0\end{aligned}$$

13) $\langle 25, 6, 71\rangle$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle 4, 7, -2\rangle\\&= 25(4) + 6(7) + 71(-2)\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle -5, 9, 1\rangle\\&= 25(-5) + 6(9) + 71(1)\\&= 0\end{aligned}$$

14) $\langle 38, 26, 21\rangle$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 3, -6, 2\rangle\\&= 38(3) + 26(-6) + 21(2)\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 1, 5, -8\rangle\\&= 38(1) + 26(5) + 21(-8)\\&= 0\end{aligned}$$

15) $\langle 7, 23, 12\rangle$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}\\&= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle -2, -2, 5\rangle\\&= 7(-2) + 23(-2) + 12(5)\\&= 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\&= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle 7, 1, -6\rangle\\&= 7(7) + 23(1) + 12(-6)\\&= 0\end{aligned}$$

45) إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية $0°$، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها $90°$ يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصيغة الإحداثية للمتجهين واستعمال النسب بين الإحداثيات للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفرًا يكون المتجهان متعامدين، لا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص(53)

	الدرس 1-6 (4) حصص
العنوان	**الإحداثيات القطبية**
الأهداف	• تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية. • تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًا.
المفردات الأساسية	نظام الإحداثيات القطبية، القطب، المحور القطبي، الإحداثيات القطبية، المعادلة القطبية، التمثيل القطبي.
تمثيلات متعددة	ص (59)
مصادر الدرس	• كتاب التمارين، ص (9) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (57, 60)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(12) حصة	(3) حصص	(15) حصة

الدرس 6-2 (4) حصص	الدرس 6-3 (4) حصص
الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات	**الأعداد المركبة ونظرية ديموافر**
• التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. • تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.	• تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس. • إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.
	المستوى المركب، المحور الحقيقي، المحور التخيلي، مستوى أرجاند، القيمة المطلقة لعدد مركب، الصورة القطبية، الصورة المثلثية، المقياس، السعة، الجذور النونية للعدد واحد.
ص (68)	
•كتاب التمارين، ص (10) دون ضمن فوق	•كتاب التمارين، ص (11) دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• مدونة
ص (63, 69)	ص (73, 80)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة، ص (84-81)
- اختبار الفصل، ص (85)

الفصل 6

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المرجع	إرشاد المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 6**			
	التهيئة للفصل السادس ص (53)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة ص (53)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	تحقق من فهمك	كتاب الطالب	تنويع التعليم	دليل المعلم
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تنويع الواجبات المنزلية	دليل المعلم
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه!	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة، للفصل 6، ص (84-81)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (85)	دليل المعلم
			دليل الدراسة والمراجعة، ص (84 - 81)	كتاب الطالب
	اختبار الفصل، ص (85)	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 6**			
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

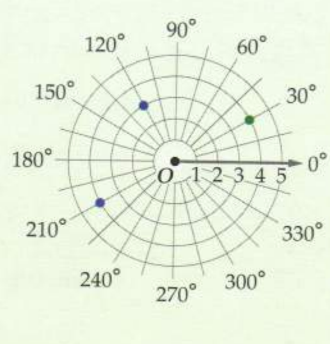
المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى مجموعات من الطلاب استعمال فرجار وخريطة لإحدى مدن المملكة العربية السعودية؛ لتعيين بعض المواقع باستعمال الإحداثيات القطبية والديكارتية. فمثلًا، تقع مكتبة المدينة عند النقطة $(2, 45°)$ أو $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب تعيين بعض النقاط على منحنى قطبي، ثم تحويل كل نقطة إلى الإحداثيات الديكارتية، وتمثيلها على المستوى الديكارتي. ثم اطلب إليهم أن يلاحظوا أنهم حصلوا على المنحنى القطبي نفسه.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

المتعلمون الحركيون دع الطلاب يلعبوا لعبة «الصيد القطبي» في مجموعات، وزوّد كل مجموعة بشبكة قطبية كبيرة، ونوعين مختلفين من حبوب البقوليات الجافة كالفاصوليا والفول. يكتب كل طالب 10 نقاط قطبية على بطاقات ويضعونها. في كومة على طاولة، اطلب إلى أحد طلاب كل مجموعة أن يسحب بطاقة عشوائيًّا ويُعيّن النقطة على الشبكة القطبية بوضع نوع من حبوب البقوليات الخاص به ثم يتبادل الدور مع زميله. وفي هذه الأثناء، إذا اكتشف أحد الطلاب خطأً في تمثيل زميله، فإنه يصحح الموقع ويضع حبة من حباته عندها. وحال الانتهاء من تمثيل النقاط جميعها بصورة صحيحة يربح الطالب الذي له أكبر عدد من الحبوب على الشبكة.



$(3, 120°)$
$(-4, 30°)$
$(4, 30°)$

الفصل 6
المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 6

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال صيغة المسافة؛ لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي (نظام الإحداثيات الديكارتية).
- تعريف الأعداد التخيلية وتبسيطها، وجمعها وضربها، وحل معادلات ذات حلول تخيلية.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها.
- إيجاد مرافق العدد المركب.
- إيجاد الجذر النوني للأعداد وللعبارات الجبرية.

الفصل 6

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.
- تمثيل المعادلات القطبية البسيطة بيانيًا.
- التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية.
- التحويل بين المعادلات الديكارتية والقطبية.
- تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية، والعكس.
- إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.

ما بعد الفصل 6

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- إيجاد الطول التقريبي لقوس من منحنى.
- إيجاد ميل المماس لمنحنى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- حل نظام معادلات قطبية.

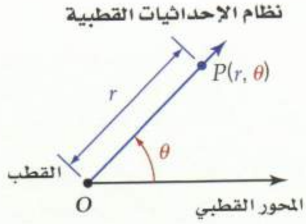
نظرة على الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية

يتكون نظام الإحداثيات القطبية مما يأتي:

- نقطة الأصل، نقطة ثابتة O تُسمَّى القطب.
- المحور القطبي، شعاع يمتد أفقيًا من القطب ويكون متجهًا إلى اليمين.
- الإحداثيات القطبية لنقطة هي $P(r, \theta)$، حيث r المسافة المتجهة من O إلى النقطة، θ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$

نظام الإحداثيات القطبية



في نظام الإحداثيات القطبية، لكل نقطة إحداثيات قطبية هي (r, θ)، ولها أيضًا الإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)180°)$، حيث n عددًا صحيحًا.
المعادلة القطبية هي معادلة معطاة بدلالة الإحداثيات القطبية، ويمكن تمثيلها بيانيًا بتعيين جميع النقاط (r, θ) التي تحققها.
أسهل معادلة يمكن تمثيلها في نظام الإحداثيات القطبية هي المعادلة $r = k$ (وهي دائرة مركزها القطب)، والمعادلة $\theta = k$ (وهي معادلة مستقيم يمر بالقطب)، حيث k ثابت.
ويمكن إيجاد المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$، $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي باستعمال الصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

لتحويل الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y)، استعمل صيغتي التحويل الآتيتين:

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$

لتحويل الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ)، استعمل صيغتي التحويل الآتيتين:

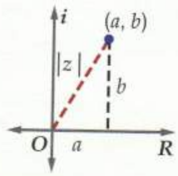
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الجزء الحقيقي للعدد المركب z المُعطى بالصورة الديكارتية $a + bi$ هو a، والجزء التخيلي bi. يمكن تمثيل العدد المركب في المستوى بالنقطة (a, b). حيث يُعيَّن الجزء الحقيقي على المحور الأفقي والجزء التخيلي على المحور الرأسي والذي يسمى المحور التخيلي. القيمة المطلقة للعدد المركّب $z = a + bi$ هي المسافة بين العدد ونقطة الأصل في المستوى المركّب، وتساوي

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث تمثل r القيمة المطلقة أو المقياس، والزاوية θ سعة العدد المركّب.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, a = r\cos\theta, b = r\sin\theta,$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$، $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

تُسهِّل الصورة القطبية للعدد المركب عملية ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وصيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية هي

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

أما صيغة قسمتها فهي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$ ، حيث $z_2 \neq 0$، $r_2 \neq 0_1$

اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي ديموافر نمطًا في ضرب العدد المركب في نفسه عدة مرات، وقاده ذلك النمط إلى وضع نظرية سميت باسمه.

ونصت نظريته على أنه إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ويمكن استعمال نظرية ديموافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة.

الفصل 6 ملاحظات

مشروع الفصل

تصميم لوحة سهام

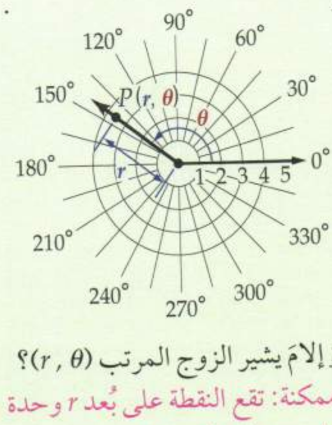
يستعمل الطلاب التمثيل القطبي للإحداثيات والمعادلات؛ لتصميم تشكيلات هندسية؛ لذا اطلب إليهم:

- تصميم لوحة سهام في مستوى قطبي، تتكون من 5 دوائر متحدة المركز، بحيث يكون للحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية، ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 5 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب.
- تحديد أنصاف أقطار الحلقات.
- تحديد ثلاثة مواقع (نقاط مكتوبة بالإحداثيات القطبية) أصابها لاعب أطلق ثلاثة أسهم على اللوحة.
- تمثيل النقاط التي أصابها اللاعب في المستوى القطبي.
- إيجاد مجموع النقاط التي حصل عليها اللاعب.
- تحويل إحداثيات كل نقطة منها إلى الإحداثيات الديكارتية.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: نظام الإحداثيات القطبية هو نظام يستعمل الإحداثيات القطبية (r, θ). حيث r المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P، وθ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{PO}$.

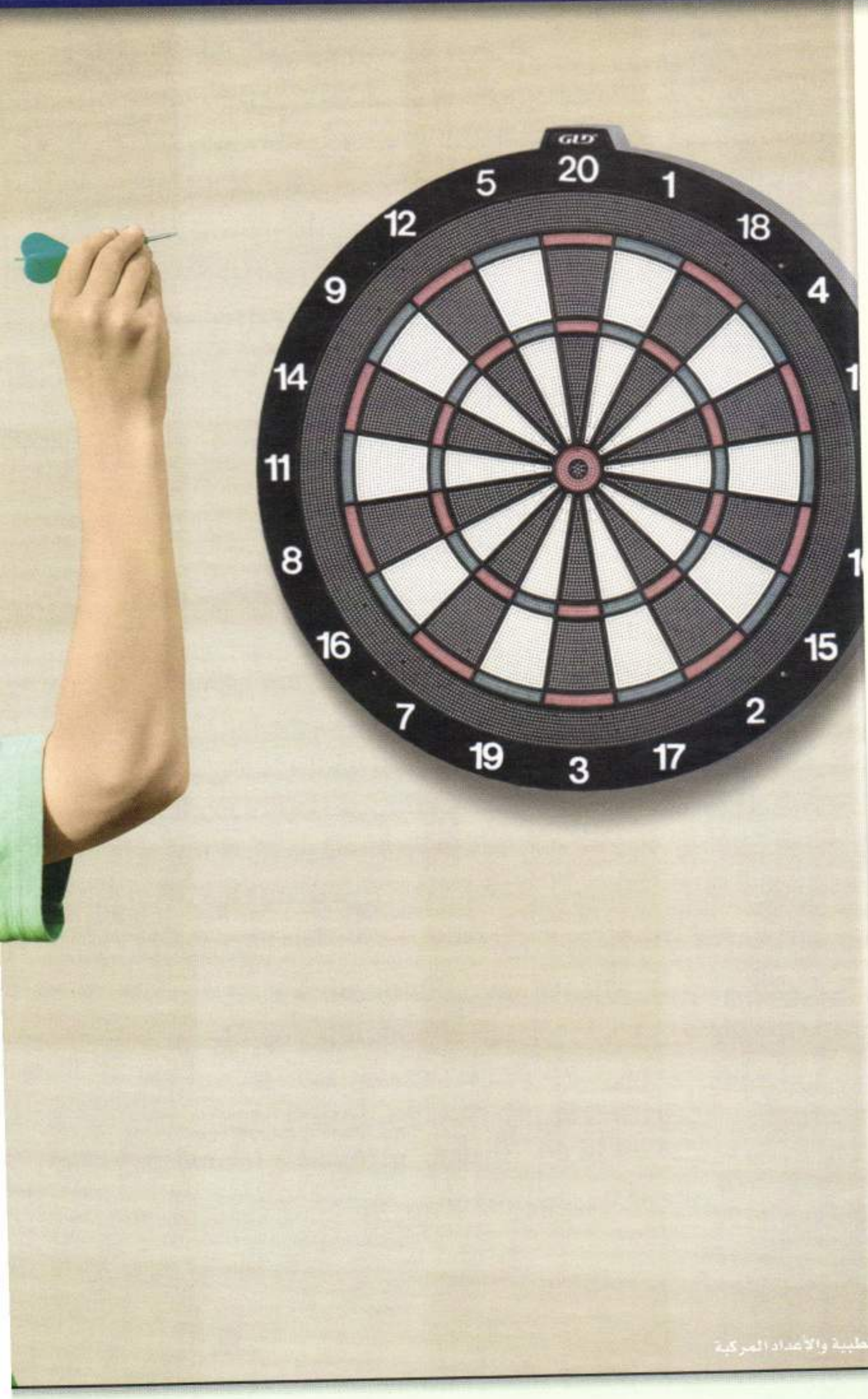
مثال:



سؤال: إلامَ يشير الزوج المرتب (r, θ)؟

إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد r وحدة من القطب، وعلى الشعاع الذي يصنع زاوية قياسها θ مع المحور القطبي.

الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers



فيما سبق:

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أُمثِّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- أحولُ بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية والمعادلات.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

قبل القراءة: استعمل مقدمة كل درس في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي: **(1-6) انظر ملحق الإجابات**

اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

(1 $200°$

(2 $-45°$

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثلهما في الوضع القياسي:

(3 $165°$

(4 $-10°$

(5 $\frac{4\pi}{3}$

(6 $-\frac{\pi}{4}$

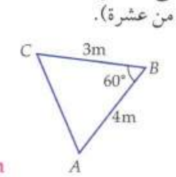
حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

(7 $-60°$ $-\frac{\pi}{3}$

(8 $\frac{3\pi}{2}$ $270°$

(9 أوجد القيمة الفعلية لـ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(10 أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرب إلى أقرب جزء من عشرة).



3.6 m تقريبًا

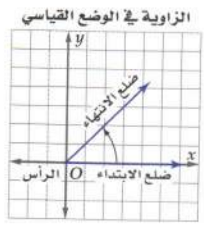
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة رأس الزاوية عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.



قياس الزاوية (Measure of an Angle)
مقدار واتجاه الدوران اللازم للانتقال من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية.

متطابقات المجموع والفرق (Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا... فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في: موضوع الزوايا وأنظمة قياسها، ومتطابقات جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بينهما.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

لوحة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل 6، ويمكن استعمال هذه القائمة كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

6-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

رسم زوايا موجبة وسالبة معطاة بالدرجات والراديان في الوضع القياسي.

الدرس 6-1

تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.
تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًّا.

ما بعد الدرس 6-1

تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية وبالعكس

2 التدريس

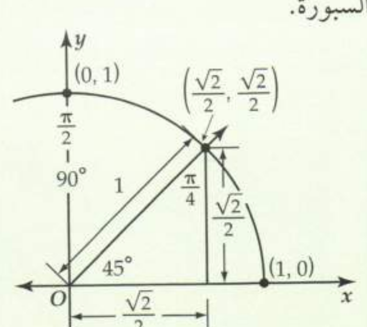
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إلامَ يشير الإحداثيان في الزوج المرتب (x, y)؟ المسافة الأفقية والمسافة الرأسية عن نقطة الأصل.
- ما قياس الزاوية الناتجة عن المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة A $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؟ $45°$

ارسم الجزء الآتي من دائرة الوحدة على السبورة.



إلامَ يشير الزوج المرتب $(1, 45°)$؟
إجابة ممكنة: تقع النقطة على بعد وحدة واحدة من نقطة الأصل وعلى نصف المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $45°$ مع المحور x.

6-1 الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

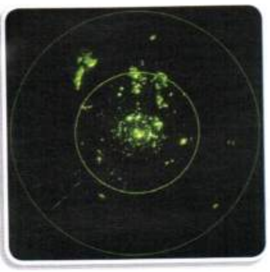
فيما سبق:
درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي.

والآن:
- أمثل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أمثل بيانيًّا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات:
نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system
القطب
pole
المحور القطبي
polar axis
الإحداثيات القطبية
polar coordinates
المعادلة القطبية
polar equation
التمثيل القطبي
polar graph

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

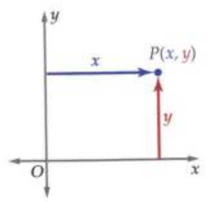


يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

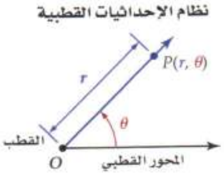
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x, y هما المحوران الأفقي والعمودي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما O نقطة الأصل. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x, y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والعمودية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(3, -4)$ على بُعد 3 وحدات إلى يمين المحور y، وعلى بُعد 4 وحدات إلى أسفل المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو شعاع يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات القطبية** (r, θ)، حيث r المسافة المتّجهة من القطب إلى النقطة P، و θ الزاوية المتّجهة من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



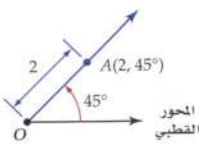
لتمثيل نقطة معطاة بإحداثيات قطبيّة، فإن القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، وإذا كانت r موجبة، فإن P واقعة على ضلع الانتهاء للزاوية θ. أما إذا كانت سالبة، فإن P واقعة على الشعاع المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ.

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

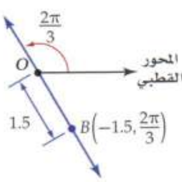
a) $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها؛ ولأن $r = 2$، عيِّن نقطةً A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، كما في الشكل المجاور.



b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.

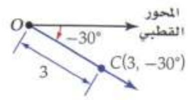


مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (57)	• تنويع التعليم، ص (57)	• تنويع التعليم، ص (60)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)

$C(3, -30°)$ (c

بما أن $\theta = -30°$ ، ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك (1A–1C) انظر ملحق الإجابات

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

$D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ (1A $E(2.5, 240°)$ (1B $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$ (1C

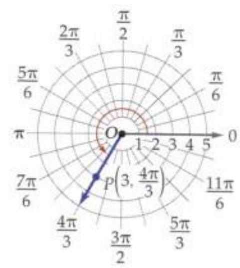
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

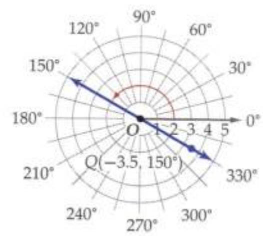
$P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ (a

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



$Q(-3.5, 150°)$ (b

بما أن $\theta = 150°$ ، ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.

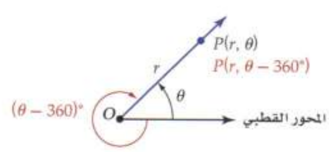


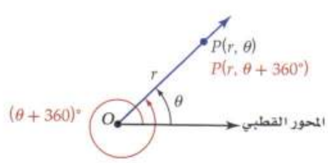
تحقق من فهمك

مثِّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي: (2A, 2B) انظر ملحق الإجابات

$R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ (2A $S(-2, -135°)$ (2B

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





إرشادات للدراسة

القطب يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$ ، حيث θ أي زاوية.

تمثيل الإحداثيات القطبية

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تمثيل الإحداثيات القطبية على الصورة (r, θ)، عندما تُعطى θ بالدرجات أو الراديان في نظام الإحداثيات القطبية.

المثال 3 يبيّن كيفية إيجاد إحداثيات قطبية متعددة تمثل نقطة واحدة.

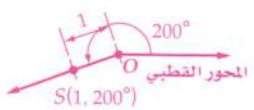
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

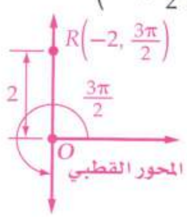
مثال إضافي

1 مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

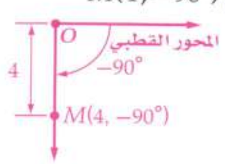
$S(1, 200°)$ (a



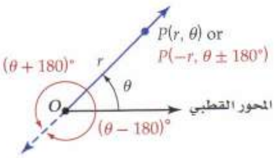
$R\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$ (b



$M(4, -90°)$ (c



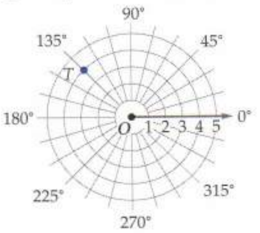
وكذلك؛ لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي التمثيلات الثلاثة الأخرى.

$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ بطرح 360° من θ
$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ بوضع $-r$ بدلًا من r، وإضافة 180° إلى θ
$= (-4, 315°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ بوضع $-r$ بدلًا من r، بطرح 180° من θ
$= (-4, -45°)$

تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(3A $(5, 240°)$ **(3B** $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

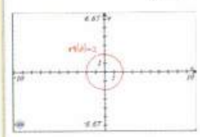
(3A $(5, -120°), (-5, 60°), (-5, -300°)$
(3B $\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{7\pi}{6}\right), \left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبية**. فمثلًا، $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = 2$ ، و $y = -3$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل، فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = k$ ، حيث k عدد ثابت، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

إرشاد تقني

تمثيل المعادلات القطبية
لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الحاسبة البيانية TI-nspire، اضغط على menu أولًا ثم 3: Graph Type و 2: Add Graphs وغيِّر وضع الرسم إلى 3: Polar، لاحظ أن المتغير التابع تغيَّر من $f(x)$ إلى r، والمتغيِّر المستقل من x إلى θ. مثل $r = 2$.

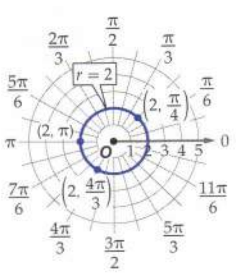


مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2$

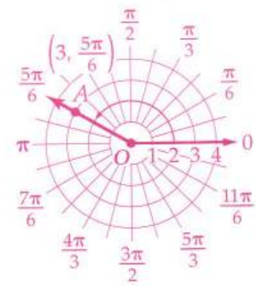
تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.
يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه، فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب)، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



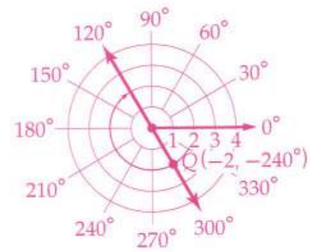
مثالان إضافيان

2 مثل كلًّا من النقطتين الآتيتين في المستوى القطبي:

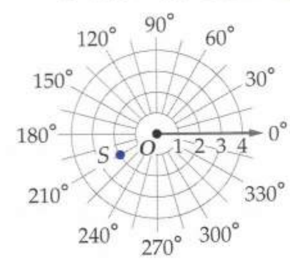
a) $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



b) $Q(-2, -240°)$



3 أوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة S ، إذا كانت $-360° < \theta < 360°$.



$(2, -150°), (2, 210°), (-2, 30°), (-2, -330°)$

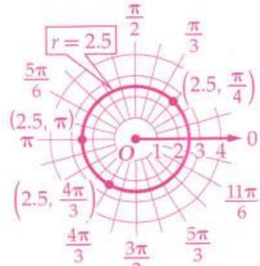
التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثال 4 يُبيّن كيفية تمثيل معادلات قطبية بسيطة مثل الدوائر والمستقيمات.
مثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين معطاتين بالإحداثيات القطبية باستعمال الصيغة القطبية للمسافة.

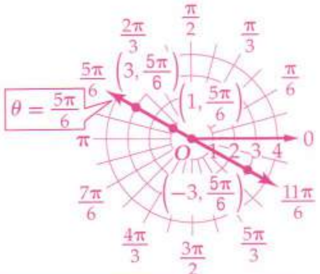
مثال إضافي

4 مثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2.5$

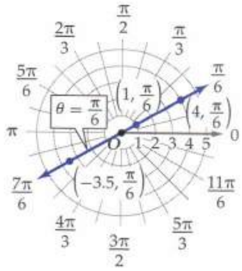


b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$



$\theta = \frac{\pi}{6}$ (b

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.



تحقق من فهمك (4A, 4B انظر ملحق الإجابات

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

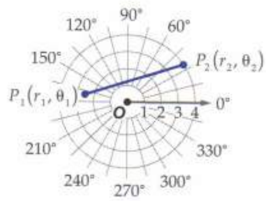
$r = 3$ (4A $\qquad$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (4B

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

مفهوم أساسي — المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



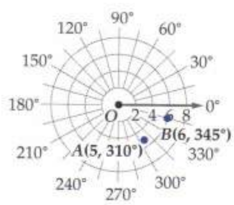
سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 56

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية: يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها 310°، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها 345°، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن:

$$AB = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)} \qquad \text{المسافة بالصيغة القطبية}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44 \qquad (r_1, \theta_1) = (5, 310°),\ (r_2, \theta_2) = (6, 345°)$$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه، فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

تحقق من فهمك

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$، حيث r بالأميال.

A) فمثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي. A) انظر ملحق الإجابات

B) ما المسافة بين القاربين؟ 8.30 mi

تنبيه!

تهيئة الحاسبة البيانيّة
عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان حسب قياسات الزوايا المعطاة.

الربط مع الحياة

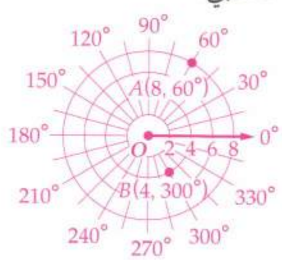
لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi .

المصدر: A History of the World Semiconductor Industry

مثال إضافي

5 **حركة جويّة** يتابع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(8, 60°)$, $B(4, 300°)$، وتُقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.



b) استعمل الصيغة القطبية للمسافة لتوجد المسافة بين الطائرتين؟ 10.6 mi تقريبًا

المحتوى الرياضي

المسافة في المستوى القطبي

انظر إلى المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي على أنها ضلع ثالث لمثلث، ضلعاه الآخران هما نصفا مستقيم ينطلقان من القطب ويمران بالنقطتين. لاحظ أن صيغة المسافة في المستوى القطبي هي إحدى صيغ قانون جيب التمام المستعملة في إيجاد طول ضلع ثالث في مثلث بمعلومية كل من الزاوية المقابلة له وطولي الضلعين الآخرين.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا وأعطه مجموعة نقاط في المستوى القطبي. واطلب إليه استعمال الكاميرا التوثيقية؛ لتوضيح كيفية تمثيلها بيانيًّا في مستوى قطبي، وإيجاد المسافة بين كل نقطتين منها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون ارسم مستوى قطبيًّا مكبرًا بمقياس رسم معلوم على سطح الأرض مستعملًا قلمًا قابلًا للمسح. ثم قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثلاثية، وأعطِ كل مجموعة شريط قياس. واطلب إلى أحد طلاب المجموعة الوقوف عند القطب، ويقف الطالبان الآخران عند نقطتين مختلفتين في المستوى القطبي، واطلب إليهم حساب المسافة بين الطالبين باستعمال شريط القياس ومقياس الرسم، وقارن النتيجة بنتيجة استعمال الصيغة القطبية للمسافة.

تدرب وحل المسائل

1-10) انظر ملحق الإجابات

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 1 , 2)

1) $R(1, 120°)$ 2) $T(-2.5, 330°)$

3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 4) $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

5) $B(5, -60°)$ 6) $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$

7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$ 8) $C(-4, \pi)$

9) $M(0.5, 270°)$ 10) $W(-1.5, 150°)$

11) **رماية:** يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(114, 45°)$, $(82, 315°)$, $(30, 240°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 1 , 2)

a) مثِّل النقاط التي أصابها الرَّامي في المستوى القطبي. **a) انظر ملحق الإجابات**

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرَّامي؟ **13 نقطة**

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3) **12-19) انظر الهامش**

12) $(1, 150°)$ 13) $(-2, 300°)$

14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ 17) $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

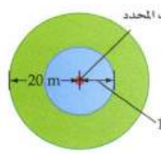
18) $(2, -30°)$ 19) $(-1, -240°)$

مثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: (مثال 4) **20-23) انظر ملحق الإجابات**

20) $r = 1.5$ 21) $\theta = 225°$

22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ 23) $r = -3.5$

24) **القفز بالمظلات:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2 m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10 m و 20 m. (مثال 4) **$r = 1, r = 10, r = 20$**



a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثِّل حدود المناطق الثلاث للهدف.

b) مثِّل هذه المعادلات في المستوى القطبي. **انظر ملحق الإجابات**

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي. (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ **5.39** 26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ **10.70**

27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ **5.97** 28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ **8**

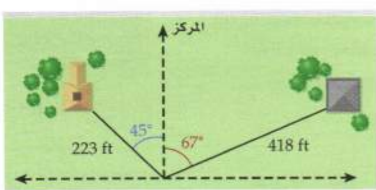
29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ **1** 30) $(4, -315°), (1, 60°)$ **3.05**

31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ **7.21** 32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ **5**

33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ **4.84** 34) $(7, -90°), (-4, -330°)$ **6.08**

35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **4.26** 36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$ **5.35**

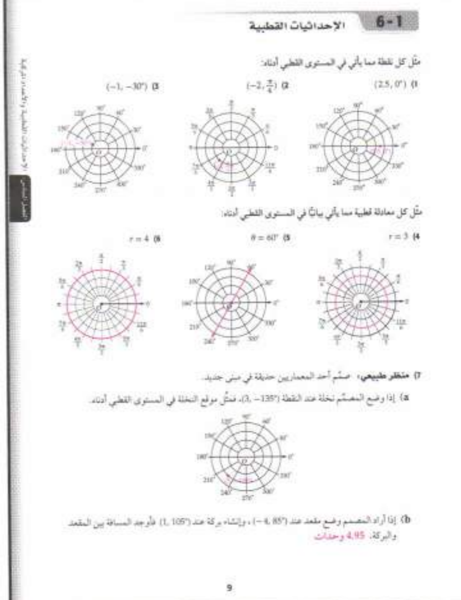
37) **مساحون:** أراد مسّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft، بزاوية 45° إلى يسار المركز، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5) **542.5 ft**



38) **مراقبة:** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثِّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \le r \le 40$, $-60° \le \theta \le 150°$، حيث r بالأمتار.

a) مثِّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها. **انظر ملحق الإجابات**

b) أوجد مساحة المنطقة. **حوالي $2932.2\ m^2$**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-37 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة!

المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

خطأ شائع في الأسئلة 25-36، قد يحسبُ الطلاب المسافة بين نقطتين قطبيتين خطأً. لذا، اقترح عليهم التأكد مرتين من الإجابة عند تعويض قيم سالبة لـ θ في معادلة المسافة القطبية، وكذلك التأكد من ضبط الآلة الحاسبة على وضعية الدرجات أو الراديان بحسب المسألة.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-37، 54، 56-73
ضمن المتوسط	1-45، (فردي)، 46، 48، 50، 51، 53، 54، 56-73
فوق المتوسط	38-73

الإجابات:

12) $(-1, 330°), (1, -210°), (-1, -30°)$

13) $(2, 120°), (2, -240°), (-2, -60°)$

14) $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{-\pi}{6}\right)$

15) $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{-4\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{-\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{-7\pi}{6}\right)$

17) $\left(5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right)$

18) $(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$

19) $(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$ ، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$ $(-5, 60°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$ $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$ $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

42) $(1.25, -920°)$ $(1.25, 160°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

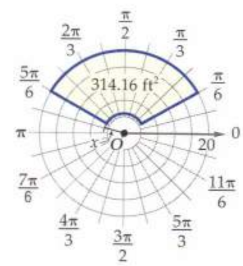
44) $(-6, -1460°)$ $(6, 160°)$

45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $30 \le r \le 240$ ، $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي. a) انظر ملحق الإجابات

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,ft^2$، فكم مقعدٍ يتسع المسرح؟ 8906 مقاعد تقريبًا

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ ، $x \le r \le 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,ft^2$ ، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x . 10 ft تقريبًا



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°)$, $P_2 = (r, 75°)$, $P_1P_2 = 4.174$
$r = 6$ أو $r = -1.404$

48) $P_1 = (5, 125°)$, $P_2 = (2, \theta)$, $P_1P_2 = 4$, $0 \le \theta \le 180°$
174.46° (48

49) $P_1 = (3, \theta)$, $P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right)$, $P_1P_2 = 5$, $0 \le \theta \le \pi$ $\frac{5\pi}{18}$

50) $P_1 = (r, 120°)$, $P_2 = (4, 160°)$, $P_1P_2 = 3.297$
$r \approx 5.13$ أو $r \approx 1$

51) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تتحقق من العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.
a – e) انظر ملحق الإجابات

a) **بيانيًا:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والمحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x.

b) **عدديًا:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

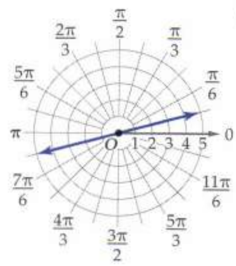
c) **بيانيًا:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x ، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.

d) **تحليليًا:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

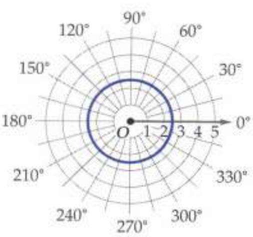
e) **تحليليًا:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) ، والإحداثيات الديكارتية (x, y) .

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52) إجابة ممكنة: $\theta = \frac{\pi}{12}$



53) $r = -2.5$ أو $r = 2.5$



تمثيلات متعددة

في السؤال 51 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل، لاستقصاء العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مسائل مهارات التفكير العليا

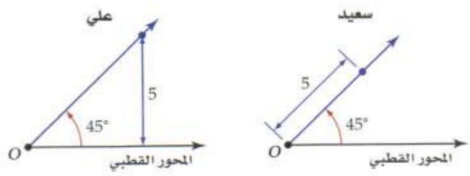
54) **تبرير:** وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟ انظر ملحق الإجابات

55) **تحدٍّ:** أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$. $(5, 233°)$ تقريبًا

56) **برهان:** أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.
(إرشاد: استعمل قانون جيوب التمام). انظر ملحق الإجابات

57) **تبرير:** وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسّر هذا التغيّر.
انظر ملحق الإجابات

58) **اكتشف الخطأ:** قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات



59) **اكتب:** خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كان u, v متعامدين أولًا: (الدرس 5-5)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7\rangle$ -3، ليسا متعامدين

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8\rangle$ 0، متعامدان

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0\rangle$ -14، ليسا متعامدين

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 5, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, -6, 5\rangle$. فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 5-4)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ $\langle 16, -29, 36\rangle$

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$ $\langle 1, 44, -17\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u, v لكل مما يأتي: (الدرس 5-5)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$ $133.9°$

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ $144.3°$

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$ $61.45°$

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية: (مهارة سابقة)

68) $x^2 + (y-1)^2 = 9$ المركز $(0, 1)$، ونصف القطر 3

69) $(x+1)^2 + y^2 = 16$ المركز $(-1, 0)$، ونصف القطر 4

70) $x^2 + y^2 = 1$ المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 1

تدريب على اختبار

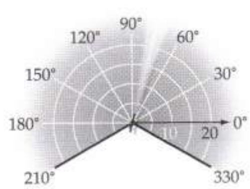
71) يقوم مراقب حركة الطيران بمراقبة طائرتين على الارتفاع نفسه، إذا كانت إحداثيات الطائرتين $(5, 310°), (6, 345°)$، حيث r بالأميال، فما المسافة التقريبية بين الطائرتين؟ C

A 2.97 mi
B 3.25 mi
C 3.44 mi
D 3.71 mi

72) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟ A

A $\langle 7, -10\rangle$ C $\langle -7, 10\rangle$
B $\langle -3, 10\rangle$ D $\langle -3, -10\rangle$

73) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$، $-30° \le \theta \le 210°$، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟ B



A $821\ ft^2$ C $852\ ft^2$
B $838\ ft^2$ D $866\ ft^2$

4 التقويم

طاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة بعض الجمل للمقارنة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية وإبراز التباين بينهما.

تنويع التعليم

فوق

توسع اكتب الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

- $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ $A(0, 4)$
- $B(2, 270°)$ $B(0, -2)$
- $C(3, \pi)$ $C(-3, 0)$
- $D(1, 360°)$ $D(1, 0)$

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات
Polar and Rectangular Forms of Equations

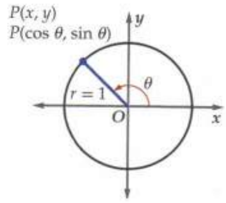
فيما سبق:
درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

والآن:
- أحوِّل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة r، والزاوية θ. ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.



الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

بالضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

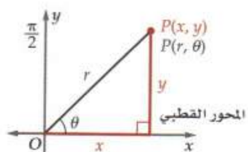
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



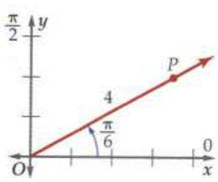
مثال 1: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلٍّ نقطة مما يأتي:

(a $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بالتبسيط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$



أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

6-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2
استعمال نظام الإحداثيات القطبية لتمثيل النقاط وبعض المعادلات البسيطة.

الدرس 6-2
التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

ما بعد الدرس 6-2
تحويل الأعداد المركبة من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

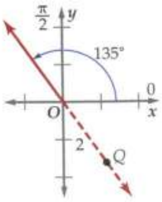
واسأل:
- إذا وُضع نظام الإحداثيات الديكارتية منطبقًا على نظام الإحداثيات القطبية، فأي النقاط القطبية ستنطبق على نقطة الأصل؟ $(0, 0)$ أو $(0, 0°)$.
- أي النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(4, 0)$؟ $(4, 0)$ أو $(4, 0°)$.
- أي النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية $(0, 4)$؟ $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(4, 90°)$
- أي النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, \pi)$؟ $(-4, 0)$
- أي النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, 270°)$؟ $(0, -4)$

مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (63)	• تنويع التعليم ص (63)	• تنويع التعليم ص (69)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)

$Q(-2, 135°)$ (b

بما أن إحداثيات النقطة $Q(-2, 135°)$، فإن $r = -2, \theta = 135°$.

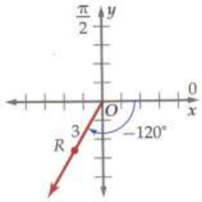


$y = r \sin \theta$	صيغ التحويل	$x = r \cos \theta$
$= -2 \sin 135°$	$r = -2, \theta = 135°$	$= -2 \cos 135°$
$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$	بالتبسيط	$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

$V(3, -120°)$ (c

بما أن إحداثيات النقطة $V(3, -120°)$، فإن $r = 3, \theta = -120°$



$y = r \sin \theta$	صيغ التحويل	$x = r \cos \theta$
$= 3 \sin -120°$	$r = 3, \theta = -120°$	$= 3 \cos -120°$
$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	بالتبسيط	$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي: انظر الهامش

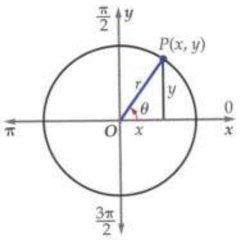
$R(-6, -120°)$ (1A $\quad$ $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ (1B $\quad$ $T(-3, 45°)$ (1C

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية التي يصنعها موقع تلك النقطة مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.

إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات
إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.



$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

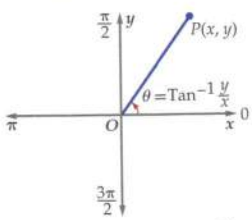
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل.

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

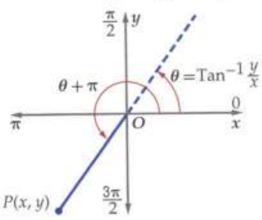
$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ دالة معكوس الظل

تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $[-90°, 90°]$ في نظام الإحداثيات الديكارتية. وتعطي قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أو عندما تكون $x > 0$، كما في الشكل **6.2.1**. وإذا كانت $x < 0$، فعليك إضافة π أو $180°$ إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **6.2.2**.



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل 6.2.1



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 6.2.2

الإحداثيات القطبية والديكارتية

المثال 1 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

المثال 2 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية.

المثال 3 يُبيّن كيفية التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

(a $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad$ $D(1, \sqrt{3})$ أو $D(1, 1.37)$

(b $F(-5, 45°)$ $\quad$ $F\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $F(-3.54, -3.54)$

(c $H(4, -240°)$ $\quad$ $H(-2, 2\sqrt{3})$ أو $H(-2, 3.46)$

إرشادات للمعلم الجديد

ضبط الوضعية ذكّر الطلاب بأن عليهم ضبط وضعية الآلة الحاسبة في المثال 1a لتكون RADIAN (راديان)، وذلك بالضغط على (on) ثم 5 Settings ثم الاختيار. أما في المثالين 1b, 1c، فإن عليهم ضبط الوضعية لتكون DEGREE (درجة) بنفس الطريقة.

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A $(3, 3\sqrt{3})$ أو $(3, 5.20)$ تقريبًا

(1B $(2.5, 2.5\sqrt{3})$ أو $(2.5, 4.33)$ تقريبًا

(1C $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(-2.1, -2.1)$ تقريبًا

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

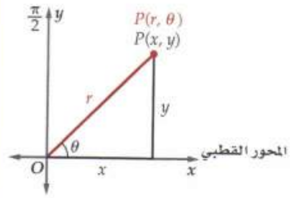
إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.



تذكّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مثال 2 — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$ ، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

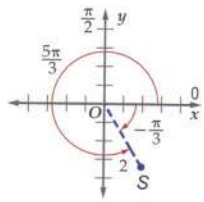
ولأن $x > 0$ ، استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بالتبسيط	$= -\frac{\pi}{3}$

أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π .

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ ، كما في الشكل المجاور.



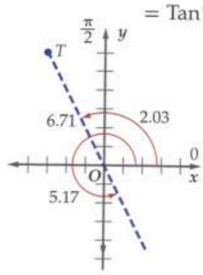
b) $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$ ، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$ ، استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$y = 6, x = -3$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بالتبسيط	$= \text{Tan}^{-1}(-2) + \pi \approx 2.03$ rad

أي أن $(6.71, 2.03)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T ، ويمكن إيجاد تمثيل آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r من خلال $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$ ، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8, 10)$ $(12.8, 0.90), (-12.8, 4.04)$

2B) $W(-9, -4)$ $(9.85, 3.56), (-9.85, 6.70)$

مثال إضافي

2 أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كلٍّ مما يأتي:

a) $E(2, -4)$ $E(4.47, -1.11)$ أو $E(4.47, 5.17)$

b) $G(-2, -4)$ $G(4.47, 4.25)$ أو $G(-4.47, 7.39)$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حل عدة أمثلة على التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. وخَزِّن حلولك في ملف وأرسله إلى الطلاب؛ لاتخاذه مرجعًا إضافيًّا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثلاثية. واطلب إلى أحد طلاب كل مجموعة تسمية إحداثيات قطبية لنقطة ما. ثم يقوم طالب آخر بتحويل إحداثيات النقطة إلى إحداثيات ديكارتية ويُمرِّرُها إلى الطالب الثالث الذي يعيد تحويلها إلى إحداثيات قطبية. اطلب إليهم المقارنة بين الصورتين القطبيتين للنقطة. إذا لم تكونا متساويتين، فاسأل الطلاب عن الخطأ الذي أدى إلى ذلك. كرر النشاط مبتدئًا بإحداثيات ديكارتية.

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية ، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة — التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

	صيغ التحويل	
$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5 , \theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بالتبسيط	≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11 , -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3 , 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3 , y = 7$	$= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بالتبسيط	$\approx 66.8°$

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62 وقياس الزاوية بينهما 66.8°

الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

المصدر: The New York Times

تحقق من فهمك

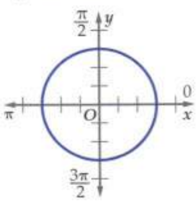
3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟ $(-3.44, 4.91)$ تقريبًا

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2 , 6)$ ، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟ $(6.32, 108°)$ تقريبًا

المعادلات القطبية والديكارتية سوف تحتاج في التفاضل والتكامل إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس، وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقّدة صورتها القطبية أسهل بكثير. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

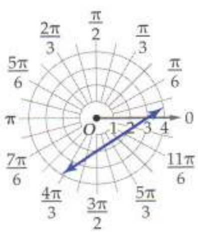
المعادلة على الصورة الديكارتية
$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية
$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقّدة صورتها الديكارتية أسهل بكثير، لاحظ معادلة المستقيم أدناه.

المعادلة القطبية
$r = \dfrac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$



المعادلة الديكارتية
$2x - 3y = 6$

مثال إضافي

رجل آلي: عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس ومثال 3. افترض أن الرجل الآلي متجه إلى الشرق وأن المِجَسّ قد رصد جسمًا عند النقطة $(3, 280°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟ $(0.52, -2.95)$

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(4, 9)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟ $(9.85, 66.0°)$ تقريبًا

المحتوى الرياضي

الإحداثيات القطبية الثلاثية الأبعاد

كما هو الحال في النقاط والمتجهات في الفضاء الديكارتي الثلاثي الأبعاد، فإنه يمكن تمثيل الإحداثيات القطبية في فضاء ثلاثي الأبعاد؛ وذلك بتوسعة نظام الإحداثيات القطبية بإحدى الطريقتين الآتيتين: الطريقة الأولى: نضيف إحداثيًّا ثالثًا يقيس ارتفاع النقطة عن المستوى، وهذه الطريقة تعرّف نظام الإحداثيات الأسطوانية. أما الطريقة الثانية: فهي إضافة إحداثي ثالث يقيس الزاوية مع المحور الثالث، وهذه الطريقة تعرّف نظام الإحداثيات الكرّوية. لاحظ أن نظام الإحداثيات الكروية يشبه نظام دوائر العرض وخطوط الطول لكرة نصف قطرها ثابت.

المعادلات القطبية والديكارتية

المثال 4 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.

المثال 5 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

4 حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

a) $(x+2)^2+y^2=4$

دائرة طول نصف قطرها 2، ومركزها $(-2,0)$، $r=-4\cos\theta$

b) $x^2-y^2=4$

قطع زائد، معادلته $r^2=4\sec 2\theta$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$، ثم نبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

التمثيل البياني للمعادلة $(x-4)^2+y^2=16$ هو دائرة طول نصف قطرها 4، ومركزها $(4,0)$. ولإيجاد الصيغة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	بالضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	بطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	بوضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	بالتحليل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	بقسمة الطرفين على r

b) $y=x^2$

شكل المنحنى الممثل للمعادلة $y=x^2$ قطع مكافئ، رأسه نقطة الأصل، واتجاه فتحته إلى أعلى.

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	بالضرب
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	بقسمة الطرفين على $r\cos^2\theta$
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta\sec\theta=r$	المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية

من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتية.

✓ تحقق من فهمك

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

4A) $x^2+(y-3)^2=9$

4B) $x^2-y^2=1$

4A) دائرة، معادلتها $r=6\sin\theta$

4B) قطع زائد، معادلته $r^2=\sec 2\theta$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$r^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

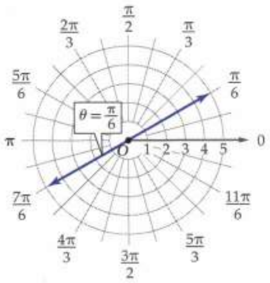
65 الدرس 2-6 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

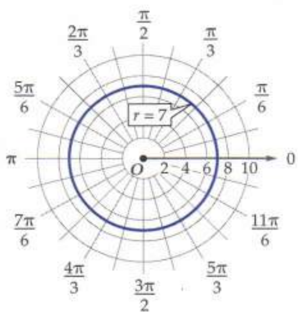
$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	بأخذ tan الطرفين
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	بضرب الطرفين في x



تمثيل هذه المعادلة هو مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $r = 7$

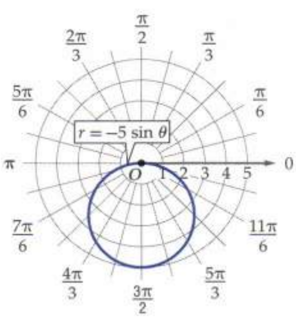
$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	بتربيع الطرفين
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$



تمثل هذه المعادلة الديكارتية دائرة طول نصف قطرها 7، ومركزها نقطة الأصل.

c) $r = -5\sin\theta$

$r = -5\sin\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r\sin\theta$	بضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2,\ y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	بإضافة $5y$ إلى الطرفين



ويمكن كتابة المعادلة الأخيرة على الصورة $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$ ، وتمثّل هذه المعادلة دائرة طول نصف قطرها 2.5 ، ومركزها $(0, -2.5)$.

تحقق من فهمك (5A-5C) انظر الهامش

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني:

5A) $r = -3$ 5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 5C) $r = 3\cos\theta$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$. والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$ ، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

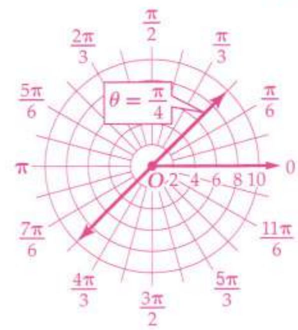
إرشادات للدراسة

التحويل إلى الصورة الديكارتية هناك بعض التعويضات التي يمكن استعمالها بدلًا من $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ، وهي: $r = \frac{y}{\sin\theta}$ ، $r = \frac{x}{\cos\theta}$.

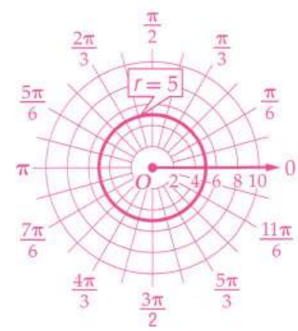
مثال إضافي

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني:

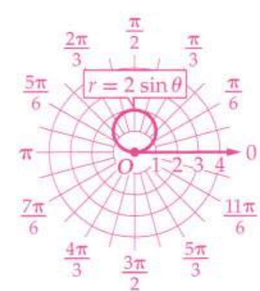
a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ مستقيم يمر بنقطة الأصل، وميله يساوي 1، ومعادلته $y = x$.



b) $r = 5$ دائرة طول نصف قطرها 5 ومركزها $(0, 0)$، ومعادلتها $x^2 + y^2 = 25$.

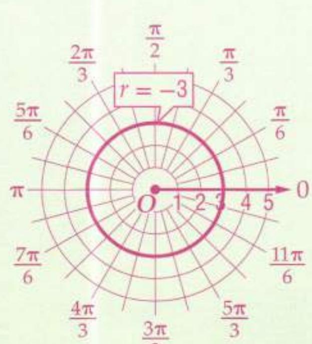


c) $r = 2\sin\theta$ دائرة طول نصف قطرها 1، ومركزها $(0, 1)$، ومعادلتها $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

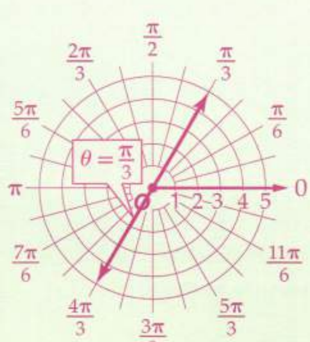


إجابات (تحقق من فهمك):

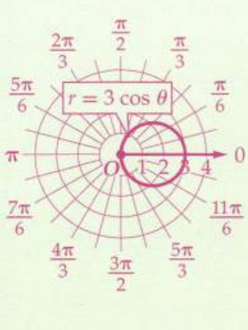
5A) $x^2 + y^2 = 9$ ، دائرة



5B) $y = \sqrt{3}x$ ، مستقيم



5C) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ ، دائرة



3) $(-2.5, -4.33)$ أو $(-2.5, -2.5\sqrt{3})$

تدرب وحل المسائل

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلٍّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

3) $(5, 240°)$

4) $(2.5, 250°)$ $(-0.86, -2.35)$

5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $\left(1, \sqrt{3}\right)$

6) $(-13, -70°)$ $(-4.45, 12.22)$

7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

8) $(-2, 270°)$ $(0, 2)$

9) $(4, 210°)$ $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2) **11-22) انظر الهامش**

11) $(7, 10)$

12) $(-13, 4)$

13) $(-6, -12)$

14) $(4, -12)$

15) $(2, -3)$

16) $(0, -173)$

17) $(1, 3)$

18) $(-14, 14)$

19) $(52, -31)$

20) $(3, -4)$

21) $(1, -1)$

22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها 53° شرق الشمال كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين **a** , **b**. (مثال 3)

1.2 mi شرقًا وَ 0.90 mi شمالًا

a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟ **$(2.06, 194.04°)$**

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية، وعزز إجابتك بتمثيل المعادلة في المستوى القطبي: (مثال 4) **24-31) انظر ملحق الإجابات**

24) $x = -2$

25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

26) $y = -3$

27) $x = 5$

28) $(x-2)^2 + y^2 = 4$

29) $x^2 + (y+3)^2 = 9$

30) $y = \sqrt{3}x$

31) $x^2 + (y+1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني، وعزز إجابتك بتمثيل المعادلة في المستوى القطبي: (مثال 5) **32-41) انظر ملحق الإجابات**

32) $r = 3\sin\theta$

33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

34) $r = 10$

35) $r = 4\cos\theta$

36) $\tan\theta = 4$

37) $r = 8\csc\theta$

38) $r = -4$

39) $\cot\theta = -7$

40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

41) $r = \sec\theta$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6\sin\theta$، حيث r مقاسه بالأميال. (مثال 5) **b) انظر ملحق الإجابات**

a) اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني. **$x^2 + y^2 - 12.6y = 0$، دائرة**

b) أوجد مركز الزلزال، وَصِف المنطقة المتأثرة به.

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني، وعزِّز إجابتك بتمثيل المعادلة في المستوى القطبي: **43-50) انظر ملحق الإجابات**

43) $r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

44) $r = 10\csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$

45) $r = 3\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

46) $r = -2\sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$

47) $r = 4\sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$

48) $r = \frac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

49) $r = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

50) $r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية، وعزّز إجابتك بتمثيل المعادلة في المستوى القطبي: **51-54) انظر ملحق الإجابات**

51) $6x - 3y = 4$

52) $2x + 5y = 12$

53) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

54) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 42-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة راقب الطلاب الذين يخطئون في التعويض عن x, y, r, θ بما يكافئها عند التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. واطلب إليهم كتابة صيغ التحويل بين x, y, r, θ على بطاقة والاحتفاظ بها.

إجابات:

11) $(12.21, 0.96), (-12.21, 4.1)$

12) $(13.6, 2.84), (-13.6, 5.98)$

13) $(13.42, 4.25), (-13.42, 1.11)$

14) $(12.65, 5.03), (-12.65, 1.89)$

15) $(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16)$

16) $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$

17) $(3.16, 1.25), (-3.16, 4.39)$

18) $\left(14\sqrt{2}, 0.75\pi\right), \left(-14\sqrt{2}, 1.75\pi\right)$

19) $(60.54, 5.75), (-60.54, 2.61)$

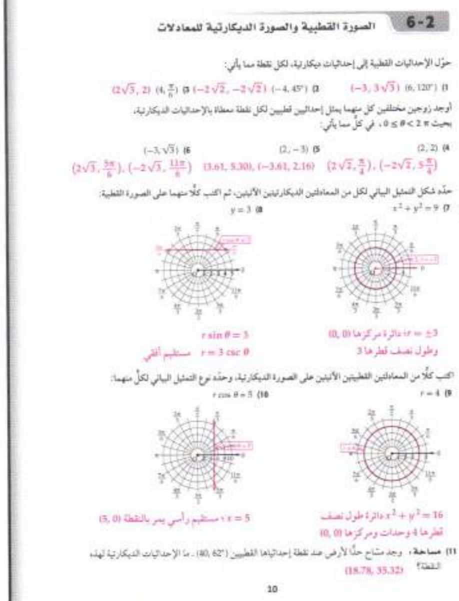
20) $(5, 5.36), (-5, 2.21)$

21) $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

22) $(2.45, 0.62), (-2.45, 3.76)$

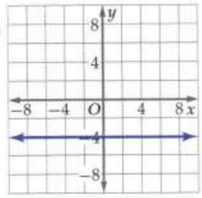
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–42، 61، 63، 64، 66–81
ضمن المتوسط	1–63 فردي، 64، 66–81
فوق المتوسط	43–81

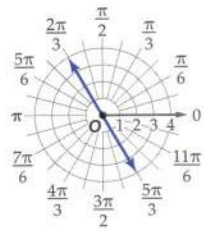


اكتب معادلة ديكارتيّة، وأخرى قطبية لكل منحنى مما يأتي:

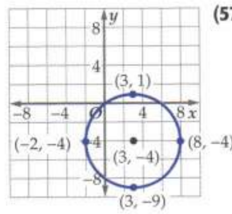
55) $y = -4, r = -4 \csc \theta$



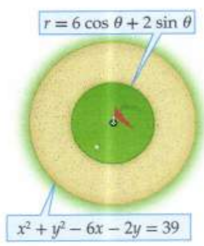
56) $y = -\sqrt{3}x, \theta = \frac{2\pi}{3}$



57) انظر الهامش



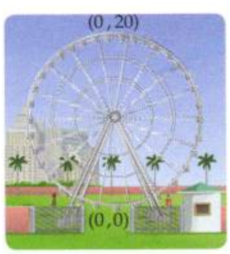
58) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثِّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة الياردة. $39\pi \text{ yd}^2 \approx 122.52 \text{ yd}^2$



59) **عجلة دوّارة:** إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوّارة $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها $(0, 20)$.

a) اكتب معادلة العجلة الدوّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.
$x^2 + (y - 10)^2 = 100$

b) اكتب المعادلة في الفرع a بالصيغة القطبية.
$r = 20 \sin \theta$



60) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية. a-f انظر ملحق الإجابات

a) **بيانيًا:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مثِّل العدد المركب $6 + 8i$ في المستوى الديكارتي.

b) **عدديًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع a .

c) **بيانيًا:** عزِّز إجابتك في الفرع b بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

d) **بيانيًا:** مثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

e) **بيانيًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع d. ومثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

f) **تحليليًا:** أوجد العبارات الجبرية التي تبيِّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

61) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin \theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.
انظر ملحق الإجابات

62) **تحدٍّ:** اكتب معادلة الدائرة $r = 2a \cos \theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.
$(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ، المركز $(a, 0)$ ، نصف القطر a

63) **اكتب:** اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا. انظر ملحق الإجابات

64) **برهان:** استعمل $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$؛ لإثبات أن $r = x \sec \theta, r = y \csc \theta$، حيث $\sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0$.
انظر ملحق الإجابات

65) **تحدٍّ:** اكتب المعادلة:
$$r^2(4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
على الصورة الديكارتية. (**إرشاد:** فك الأقواس قبل تعويض قيم r^2، r. تمثِّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًّا). انظر الهامش

تمثيلات متعددة

في السؤال 60 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل، لاستقصاء العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في السؤال 61، اقترح على الطلاب البدء بتمثيل كل من المعادلة الأصلية، وإجابتي باسل وتوفيق بيانيًّا، ثم كتابة المعادلة $r = \sin \theta$ بالصورة الديكارتية.

إجابات:

57) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25, r = 6 \cos \theta - 8 \sin \theta$.

65)
$$r^2(4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta - 8a\, r \cos \theta + 6b r \sin \theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2 - 8a(r \cos \theta) + 6b\,(r \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$$
$$4(x^2 - 2ax + a^2) + 3(y^2 + 2by + b^2) = 12$$
$$4(x - a)^2 + 3(y + b)^2 = 12$$
$$\frac{(x - a)^2}{3} + \frac{(y + b)^2}{4} = 1$$

مراجعة تراكمية

مَثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (الدرس 1-6)

66-68) انظر ملحق الإجابات

66) $A(-2, 45°)$

67) $D(1, 315°)$

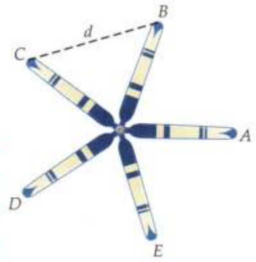
68) $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

أوجد الزاوية بين المتّجهين u, v في كل مما يأتي: (الدرس 3-5)

69) $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$ **91.8°**

70) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$ **90°**

71) **طائرات:** تتكون مروحة طائرة من 5 شفرات، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل شفرة منها 11.5 ft. (الدرس 1-6)



$A(11.5, 3°)$, $B(11.5, 75°)$, $C(11.5, 147°)$, $D(11.5, 219°)$, $E(11.5, 291°)$

a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي $3°$، فاكتب زوجًا يمثِّل الإحداثيات القطبية لطرف كل شفرة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي شفرتين متتاليتين؟ **13.5 ft**

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام. (مهارة سابقة)

72) $x^2 - 7x = -15$ **$\frac{7 \pm i\sqrt{11}}{2}$**

73) $x^2 + 2x + 4 = 0$ **$-1 \pm i\sqrt{3}$**

74) $12x^2 + 9x + 15 = 0$ **$\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$**

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-5)

75) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$ **5.10; (1.5, −13, 13.5)**

76) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$ **15.78; (2.5, 4, 4)**

77) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$ **19.31; (2.5, −2, −3)**

تدريب على اختبار

78) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟ **A**

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

79) إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle, \mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{k}$، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$؟ **A**

A $\langle -17, 11\rangle$

B $\langle -17, -5\rangle$

C $\langle 17, -11\rangle$

D $\langle -17, 5\rangle$

80) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟ **C**

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

81) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$؟ **C**

A $\langle -10, 10, 25\rangle$

B $\langle -10, -10, 25\rangle$

C $\langle -10, -10, -25\rangle$

D $\langle -10, 10, -25\rangle$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب كتابة فقرة يوضح فيها كيف يساعد موضوع هذا الدرس على فهم موضوع الدرس التالي حول كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلاب إثبات أن المعادلة $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ هي معادلة دائرة، وذلك بتحويلها إلى الصورة الديكارتية، ثم اطلب إليهم إيجاد مركزها وطول نصف قطرها.

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$r^2 = ra\cos\theta + rb\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$$

المركز $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$، طول نصف القطر $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

6-3

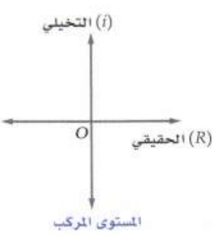
الأعداد المركبة ونظرية ديموافر
Complex Numbers and De Moivre's Theorem

لماذا؟

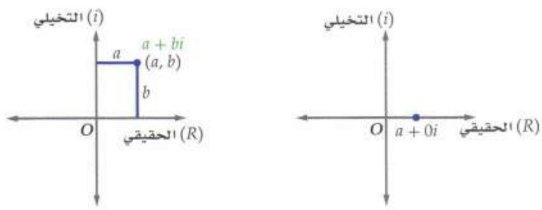
يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: الجهد E، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $E = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز التيار I).

(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

الصيَغ القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب. يُعيِّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي**، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي**. ويمكن تسمية المستوى المركب بـ**مستوى آرجاند**.



في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.

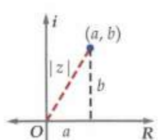


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي **القيمة المطلقة لعدد مركب**

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية.

والآن:

- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجدُ حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:

المستوى المركب
complex plane
المحور الحقيقي
real axis
المحور التخيلي
imaginary axis
مستوى آرجاند
Argand plane
القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number
الصورة القطبية
polar form
الصورة المثلثية
trigonometric form
المقياس
modulus
السعة
argument
الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

www.obeikaneducation.com

6-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة على الصورة الديكارتية.

الدرس 6-3

تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها على الصورة القطبية.

ما بعد الدرس 6-3

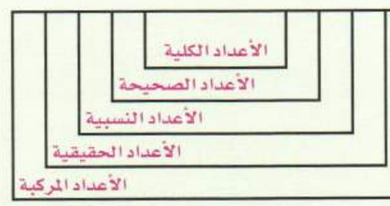
إثبات نظرية ديموافر.

2 التدريس

سئلة التعزيز

لب إلى الطلاب قراء فقرة "لماذا؟".

سم خمسة صناديق متداخلة على السبورة.



سأل:

استعمل شكل ڤن؛ لتوضيح العلاقة بين الأعداد المركبة، والحقيقية، والنسبيَّة، والصحيحة، والكلية. انظر الشكل أعلاه.

هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي على صورة عدد مركب؟ نعم، يمكن كتابة أي عدد حقيقي a على الصورة $a + 0i$.

بما أن مجموعة الأعداد المركبة تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية، فهل تعتقد أنه بإمكاننا جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها؟ نعم

مصادر الدرس 6-3

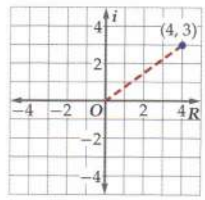
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (73)	• تنويع التعليم ص (73, 80)	• تنويع التعليم ص (80)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

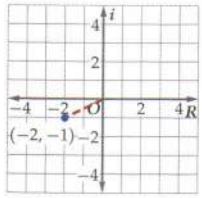
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

b) $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2, b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بالتبسيط

القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تحقق من فهمك (1A,1B) انظر الهامش

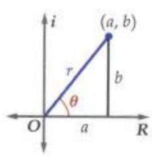
مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$ **1B)** $-3 + 4i$

تنبيه!

الصورة القطبية يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق النسب المثلثية التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لتمثيل قيم a, b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$ $r\sin\theta = b$ بضرب كل طرف في r

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

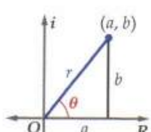
$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بأخذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب، فإن r تمثل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب



الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$ ،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ ، عندما $a < 0$.

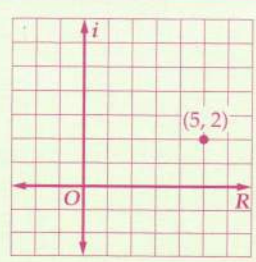
أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$

إرشادات للدراسة

السعة كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدة، مع أنها تُعطى عادة في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

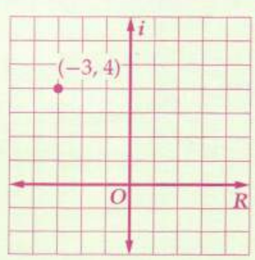
إجابة (تحقق من فهمك):

1A)



$\sqrt{29} \approx 5.39$

1B)



5

الصيغ القطبية للأعداد المركبة

المثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل عدد مركب في المستوى المركب، وإيجاد قيمته المطلقة.

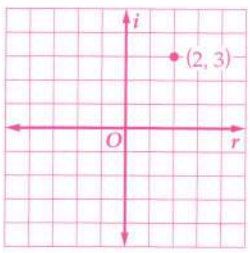
المثال 2 يُبيّن كيفية كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

المثال 3 يُبيّن كيفية تمثيل العدد المركب بيانيًّا في المستوى القطبي، ثم تحويله إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

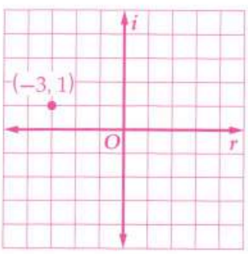
1 مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 2 + 3i$



$\sqrt{13} \approx 3.61$

b) $z = -3 + i$



$\sqrt{10} \approx 3.16$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب العمل من خلال مجموعات ثنائية لكتابة مدونة تصف كيفية التعبير عن العدد المركب على الصورة القطبية. تأكد أنهم ضمنوا وصفهم إيجاد المقياس والسعة.

إرشادات للمعلم الجديد

مستوى آرجاند يُسمى المستوى المركب أيضًا بمستوى آرجاند نسبة إلى العالم روبرت آرجاند (1768 – 1822).

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6+8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ صيغ التحويل $\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}+\pi$

$=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$ $a=-6,\ b=8$ $=\text{Tan}^{-1}-\frac{8}{6}+\pi\approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6+8i$ هي $10(\cos 2.21+i\sin 2.21)$ تقريبًا.

b) $4+\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ صيغ التحويل $\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

$=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}$ $a=4,\ b=\sqrt{3}$ $=\text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sqrt{19}\approx 4.36$ بالتبسيط ≈ 0.41

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4+\sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41+i\sin 0.41)$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9+7i$ $11.4(\cos 0.66+i\sin 0.66)$ 2B) $-2-2i$ $2.83(\cos 3.93+i\sin 3.93)$

قراءة الرياضيات

الصورة القطبية

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ تختصر عادةً على الصورة $r\text{ cis }\theta$. ففي مثال 2a، يكتب العدد $-6+8i$ على النحو $10\text{cis}2.21$ حيث $10=\sqrt{(-6)^2+8^2}$، $2.21=\text{Tan}^{-1}-\frac{8}{6}$

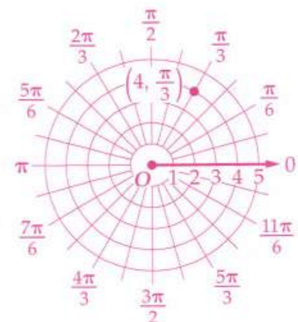
مثالان إضافيان

عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $-2+5i$ $5.39(\cos 1.95+i\sin 1.95)$ تقريبًا

b) $6+2i$ $6.32(\cos 0.32+i\sin 0.32)$ تقريبًا

مثّل العدد $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.



$2+2\sqrt{3}i$

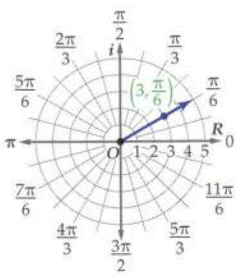
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال قيم r, θ كما في الإحداثيات القطبية (r, θ). كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثّل العدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $(3, \frac{\pi}{6})$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.

$3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

$=3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش

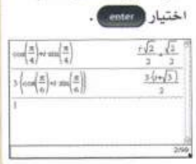
مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 3B) $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

إرشاد تقني

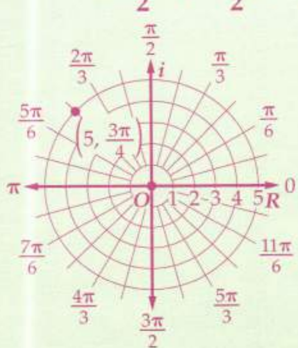
تحويل الأعداد المركبة

يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، بفتح صفحة Calculate وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter.

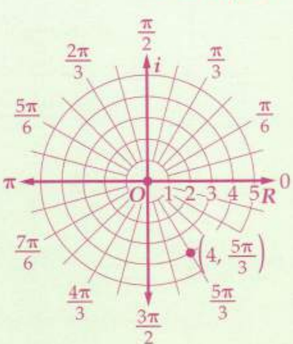


إجابات:

3A) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$



3B) $2-2\sqrt{3}i$



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل قسمة عددين مركبين بالصورة القطبية.

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال نظرية ديموافر؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد جذور الأعداد المركبة.

المثال 8 يُبيّن كيفية إيجاد جذور العدد واحد.

مثال إضافي

4 أوجد ناتج $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$10(\cos \pi + i \sin \pi), -10$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ الصورة القطبية للعددين المركبين z_1 ، z_2

$= r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$ فك الأقواس

$= r_1r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + (i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$ بتجميع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدال i^2 بـ -1

$= r_1r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$ بإخراج i عاملًا مشتركًا

$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي: ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

مثال 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد ناتج $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ بالتبسيط

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ بالتعويض عن قيم النسب المثلثية

$= 4\sqrt{3} - 4i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$ ، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ $15\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right), -3.88 + 14.49i$

(4B $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ $12\left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}\right), 3.11 + 11.59i$

كما تقدم في مقدمة الدرس، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى مجموعات من الطلاب كتابة أدلة مفصّلة لحل مسائل معينة، تشبه المثال 4. واطلب إليهم تضمينها كل التفاصيل على اعتبار أن الشخص الذي سيقرأ الدليل لديه معرفة قليلة بالموضوع. ثم اطلب إلى مجموعات أخرى التحقق من منطقية تتابع خطوات الحل في الأدلة ومنطقيتها.

مثال إضافي

كهرباء: إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية يساوي 100V، وكانت معاوقتها Z تساوي $\Omega\,(4-3j)$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة الديكارتية باستعمال المعادلة $E = I \cdot Z$.

$(16 + 11.9j)$ أمبير تقريبًا

مثال 5 من واقع الحياة — قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية يساوي 150 V، وكانت معاوقتها Z تساوي $\Omega\,(6-3j)$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة الديكارتية باستعمال المعادلة $E = I \cdot Z$.

اكتب كل عدد على الصورة القطبية.

$$150 = 150\,(\cos 0 + j \sin 0) \qquad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$$

$$6 - 3j = 3\sqrt{5}\,[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)] \qquad r = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5},\ \theta = \text{Tan}^{-1} -\frac{3}{6} \approx -0.46$$

حُلّ $I \cdot Z = E$ بالنسبة لـ I.

$I \cdot Z = E$ المعادلة الأصلية

$I = \dfrac{E}{Z}$ بقسمة كل طرف على Z

$I = \dfrac{150\,(\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\,[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$ $\quad E = 150\,(\cos 0 + j \sin 0)$, $Z = 3\sqrt{5}\,[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

$I = \dfrac{150}{3\sqrt{5}}\,\{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$ صيغة القسمة

$I = 10\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ بالتبسيط

والآن حَوِّل شدة التيار إلى الصورة الديكارتية.

$I = 10\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ الصورة القطبية

$= 10\sqrt{5}\,(0.90 + 0.44j)$ بإيجاد قيم النسب المثلثية

$= 20.12 + 9.84j$ خاصية التوزيع

أي أن شدة التيار تساوي $(20.12 + 9.84j)$ أمبير تقريبًا.

الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية. $(9.6 - 7.2j)\,\Omega$ تقريبًا

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر. وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النموذج الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$z \cdot z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$ بالضرب

$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$ صيغة الضرب

$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ بالتبسيط

والآن، أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$ بالضرب

$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$ صيغة الضرب

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ بالتبسيط

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نظرية — **نظرية ديموافر**

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن: $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

مثال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بالتبسيط	$= \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بالتبسيط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن، استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \quad \text{الصورة القطبية}$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{نظرية ديموافر}$$

$$= 262144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= 262144(1 + 0i) \quad \text{بتعويض قيم النسب المثلثية}$$

$$= 262144 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

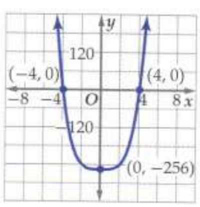
✓ تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية:

6A) $(1 + \sqrt{3}i)^4$ $\quad -8 - 8\sqrt{3}i$

6B) $(2\sqrt{3} - 2i)^8$ $\quad -32768 + 32768\sqrt{3}i$

يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في نظام الأعداد الحقيقية هما -4 ، 4. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4$ ، -4 ، بينما في نظام الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.



درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لكثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

تاريخ الرياضيات

...ام ديموافر
(16... م – 1754 م)

...ي فرنسي عُرف بالنظرية ...ماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات *Doctrine of Chance*. ويُعدّ ...افر من الرياضيين الروّاد في ...سة التحليلية والاحتمالات.

...راجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر لأي كثيرة حدود من الدرجة n ، حيث $n > 0$ ، يوجد على الأقل صفر واحد (حقيقي أو مركب) في نظام الأعداد المركبة.

مثال إضافي

6 أوجد $(3 + 3\sqrt{3}i)^4$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.
$-648 - 648\sqrt{3}i$

إرشادات للمعلم الجديد

نظرية ديموافر يمكن للطلاب استعمال مبدأ الاستقراء الرياضي الذي درسوه سابقًا؛ لإثبات صحة نظرية ديموافر لجميع القوى الصحيحة الموجبة n .

ولإيجاد جميع جذور كثيرة حدود يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح موجب n، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n-1$، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta+2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

مثال 7 **جذور العدد المركب**

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

أولًا: اكتب $-4-4i$ على الصورة القطبية.

$$-4-4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$ $r = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2},\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

والآن، اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$ $\theta = \frac{5\pi}{4},\ n = 4,\ r^{\frac{1}{n}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$ بالتبسيط

لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k = 0, 1, 2, 3$.

$k=0$: $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$ صيغة الجذور المختلفة

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) \approx 0.86 + 1.28i$ الجذر الأول

$k=1$: $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) \approx -1.28 + 0.86i$ الجذر الثاني

$k=2$: $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) \approx -0.86 - 1.28i$ الجذر الثالث

$k=3$: $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) \approx 1.28 - 0.86i$ الجذر الرابع

الجذور الرباعية للعدد $-4-4i$ هي $0.86 + 1.28i,\ -1.28 + 0.86i,\ -0.86 - 1.28i,\ 1.28 - 0.86i$

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$. $1.37 + 0.37i,\ -1 + i,\ -0.37 - 1.37i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8. $2,\ -1 + \sqrt{3}i,\ -1 - \sqrt{3}i$

مثال إضافي

7 أوجد الجذور الخماسيَّة للعدد المركب $-2-2i$
$0.87 + 0.87i,\ -0.56 + 1.10i,\ -1.22 - 0.19i,\ -0.19 - 1.22i,\ 1.10 - 0.56i$

إرشادات للمعلم الجديد

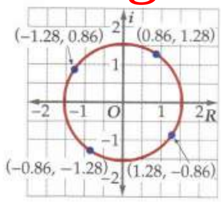
معادلة الجذور المختلفة برهان معادلة الجذور المختلفة أعلى من مستوى هذا الكتاب.

مثال إضافي

8 أوجد الجذور الخماسية للعدد واحد.
$1,$
$0.3090 + 0.9511i,$
$-0.8090 + 0.5878i,$
$-0.8090 - 0.5878i,$
$0.3090 - 0.9511i$ تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الجذور النونية للعدد واحد
التمثيل الهندسي للجذور النونية للعدد واحد تقع دائمًا على دائرة الوحدة في المستوى المركب، حيث تمثل هذه النقاط رؤوس مضلع منتظم له n ضلعًا. لاحظ أن أحد جذور الواحد هو 1 دائمًا.



يمكننا إضافة الملاحظة الآتية حول الجذور المختلفة لعدد، وذلك بتمثيلها في المستوى الإحداثي، كما في الشكل المجاور، فإن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته 1.54 تقريبًا، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة من تمثيل الجذور في المستوى الإحداثي؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$

والآن، اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$1\left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{8}\right)$ $\quad \theta = 0,\ n = 8,\ r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

$= \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4}$ بالتبسيط

افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

$k = 0 \quad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$ صيغة الجذور المختلفة

$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1. ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.

$\cos 0 + i \sin 0 = 1$ الجذر الأول

$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ الجذر الثاني

$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ الجذر الثالث

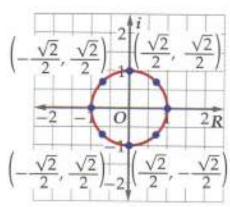
$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ الجذر الرابع

$\cos \pi + i \sin \pi = -1$ الجذر الخامس

$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ الجذر السادس

$\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$ الجذر السابع

$\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ الجذر الثامن



الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$
كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.
8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$.
سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$
$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -1,$
$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 39-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

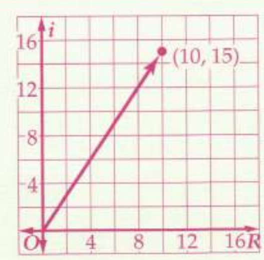
المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة فيها المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل السؤال 32، ذكِّر الطلاب أنه عند حل مسائل بقوى سالبة، فإننا لا نحسب القوى الموجبة، ثم نضرب النتيجة في سالب. فمثلًا: 2^{-5} لا تساوي $-(2^5)$، ولكن 2^{-5} تساوي $\frac{1}{2^5}$.

إجابات:

7a)



8) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

9) $\sqrt{5}\,(\cos 2.68 + i\sin 2.68)$

10) $3\sqrt{2}\,(\cos -0.34 + i\sin -0.34)$

11) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

12) $\sqrt{41}\,(\cos 0.90 + i\sin 0.90)$

13) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

32) $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1) 1-6) انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني

1) $z = 4 + 4i$ ≈5.66

2) $z = -3 + i$ ≈3.16

3) $z = -4 - 6i$ ≈7.21

4) $z = 2 - 5i$ ≈5.39

5) $z = -7 + 5i$ ≈8.60

6) $z = 8 - 2i$ ≈8.25

7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N). (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب. a) انظر الهامش

b) أوجد مقياس واتجاه المتجه. مقياسه 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية 56.31°

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2) 8-13) انظر الهامش

8) $4 + 4i$

9) $-2 + i$

10) $4 - \sqrt{2}i$

11) $2 - 2i$

12) $4 + 5i$

13) $-1 - \sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3) 14-17) انظر ملحق الإجابات

14) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

15) $\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

16) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

17) $\frac{3}{2}(\cos 360° + i\sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4، 5) 18-27) انظر ملحق الإجابات

18) $6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

19) $5(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i\sin 45°)$

20) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

21) $2(\cos 90° + i\sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i\sin 270°)$

22) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

23) $4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

24) $\frac{1}{2}(\cos 60° + i\sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i\sin 150°)$

25) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

26) $5(\cos 180° + i\sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i\sin 135°)$

27) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي، وعبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

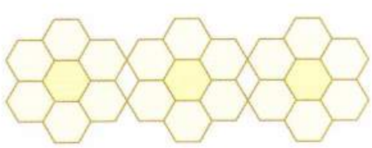
28) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$ 4096

29) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ 256

30) $(2 + 3i)^{-2}$ $-0.03 - 0.07i$

31) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ -16

32) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس السداسي بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7) انظر الهامش



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	37-1، 41-39، 48، 64-51
ضمن المتوسط	47-1 فردي، 48، 64-51
فوق المتوسط	64-38


6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:
الان 7, 8 (33, 34) انظر ملحق الإجابات

الجذور السداسية للعدد i

الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3}-4i$

الجذور التربيعية للعدد $-3-4i$ $-1+2i, 1-2i$

الجذور التربيعية للعدد واحد. ± 1

الجذور الرباعية للعدد واحد. $\pm 1, \pm i$

كهرباء: تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + j\sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + j\sin 0.4)\Omega$.
(a-c انظر الهامش)

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

b) اجمع الناتجين في الفرع a؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

حاصل الضرب لكلٍّ مما يأتي: (39-42) انظر ملحق الإجابات

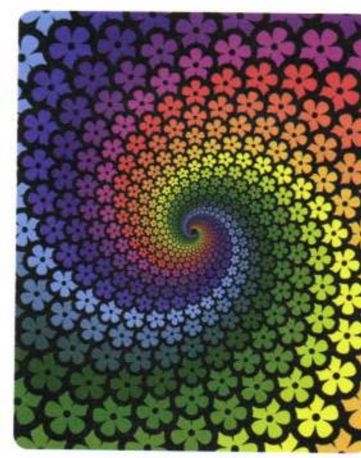
$(1-i)(4+4i)$

$(3+i)(3-i)$

$(3-i)(4+i)$

$(-6+5i)(2-3i)$

كسريات: الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر وبمقاسات متناقصة، كما في الشكل أدناه.
انظر ملحق الإجابات



في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z)=z^2$، حيث $z_0 = 0.8+0.5i$.

a) احسب z_1, z_2, z_3, z_4, z_5، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

44) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-i)$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى. انظر الهامش

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة: (45-47) انظر الهامش

45) $x^3 = i$

46) $x^4 = 81i$

47) $x^3 + 1 = i$

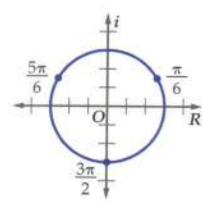
مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ:** يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمٌ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

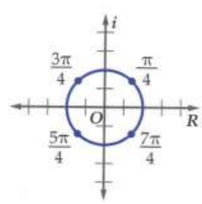
تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه وعبّر عنها على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.

(49, 50) انظر ملحق الإجابات

49)



50)



تنبيه!

اكتشف الخطأ عند حل السؤال 48، ذكِّر الطلاب بأن عليهم البدء بكتابة العدد المركب $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ على الصورة القطبية، ثم إكمال الحل.

إجابات:

38a) $3.11+3.92j, 7.37+3.12j$

38b) $(10.48+7.04j)\Omega$

38c) $12.63(\cos 0.59 + j\sin 0.59)\Omega$

44) $-4; 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

45) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -i$

46) $2.77+1.15i, -1.15+2.77i, -2.77-1.15i, 1.15-2.77i$

47) $0.79+0.79i, -1.08+0.29i, 0.29-1.08i$

48) باسم؛ إجابة ممكنة؛ لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط؛ لذا عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة $(1+i)^5$. $-4-4i$

51) **برهان:** إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$. انظر ملحق الإجابات

52) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا: انظر ملحق الإجابات

«إذا كان مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$. فإن $z + \bar{z}, z \cdot \bar{z}$ تكون أعدادًا حقيقية.»

53) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددين مركبين على الصورة $a + bi$، بحيث $a \neq 0, b \neq 0$، والقيمة المطلقة لكلٍّ منهما $\sqrt{17}$.
إجابة ممكنة: $4 - i, 1 - 4i$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 1-6)
54, 55) انظر ملحق الإجابات

54) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

55) $P(4.5, -210°)$

حدِّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية، وعزِّز إجابتك بتمثيلها في المستوى القطبي: (الدرس 2-6) 56, 57) انظر ملحق الإجابات

56) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

57) $x^2 + y^2 = 2y$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 1-6)

58) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\sqrt{29}$

59) $(1, -45°), (-5, 210°)$ 4.84

حوِّل الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية: (الدرس 2-6)

60) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

61) $(4, 210°)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$

تدريب على اختبار

62) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2), B(-5, 2, 1)$؟ A

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

63) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$؟ C

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

64) أي مما يأتي يمثل تقريبًا الصورة القطبية للعدد المركب $20 - 21i$

A $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

B $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

C $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

D $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

تنويع التعليم

ضمن فوق

أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد -1.

$-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

✓ التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

✓ التقويم الختامي

أحاجي المفردات:

تتعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

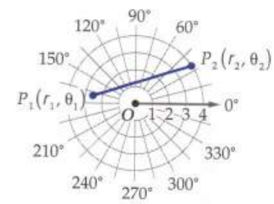
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 1-6)

- يُعيِّنُ موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ .
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-6)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$ ، أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 3-6)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي: $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1 ، z_2 هي: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], r_2 \neq 0$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية ص 54	المحور التخيلي ص 70
القطب ص 54	مستوى أرجاند ص 70
المحور القطبي ص 54	القيمة المطلقة لعدد مركب ص 70
الإحداثيات القطبية ص 54	الصورة القطبية ص 71
المعادلة القطبية ص 56	الصورة المثلثية ص 71
التمثيل القطبي ص 56	المقياس ص 71
المستوى المركب ص 70	السعة ص 71
المحور الحقيقي ص 70	الجذور النونية للعدد واحد ص 77

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة. التمثيل القطبي

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ . المستوى المركب أو مستوى آرجاند

3) يُحدِّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال بُعدها المتجه من نقطة ثابتة، وزاوية من محور ثابت. نظام الإحداثيات القطبية

4) ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. السعة

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ . القطب

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ . المقياس

7) ________ هو اسم آخر للمستوى المركب. مستوى آرجاند

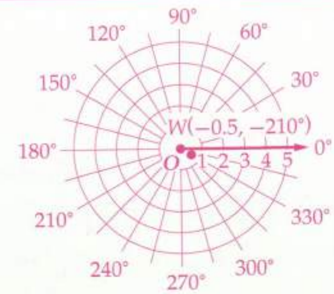
8) ________ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، وعادةً ما يكون أفقيًّا باتجاه اليمين. المحور القطبي

مراجعة الدروس

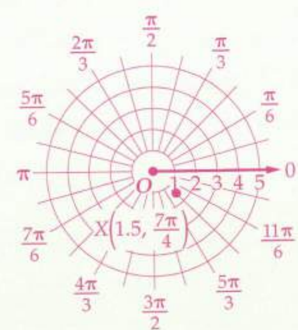
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم على مكان مراجعة تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

إجابات :

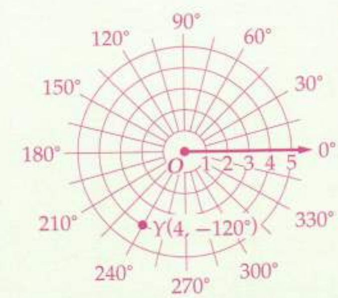
(9



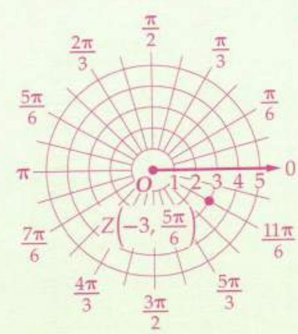
(10



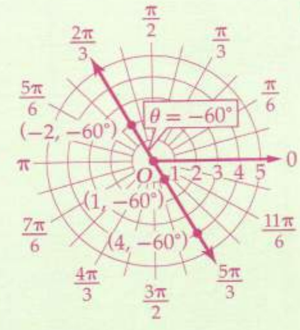
(11



(12



(13



6 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 54-60)

مَثِّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: **12-9) انظر الهامش**

9) $W(-0.5, -210°)$ 10) $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

11) $Y(4, -120°)$ 12) $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مَثِّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: **16-13) انظر الهامش**

13) $\theta = -60°$ 14) $r = \frac{9}{2}$

15) $r = 7$ 16) $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

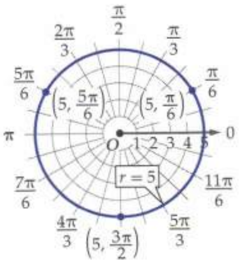
17) $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **4.36** 18) $(-3, 60°), (4, 240°)$ **1**

19) $(-1, -45°), (6, 270°)$ **6.74** 20) $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ **7.28**

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 61-69)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

21) $(-1, 5)$ **(5.10, 1.77), (−5.10, 4.91)**

22) $(3, 7)$ **(7.62, 1.17) , (−7.62, 4.31)**

23) $(1,2)$ **(2.24, 1.11) , (−2.24, 4.25)**

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني: **27-24) انظر ملحق الإجابات**

24) $r = 5$

25) $r = -4 \sin \theta$

26) $r = 6 \sec \theta$

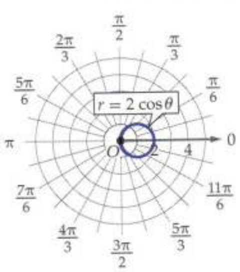
27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

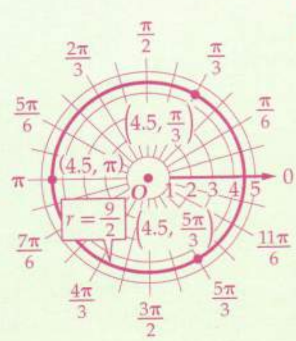
اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	بضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r \cos \theta$ ، $r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	بطرح $2x$ من الطرفين

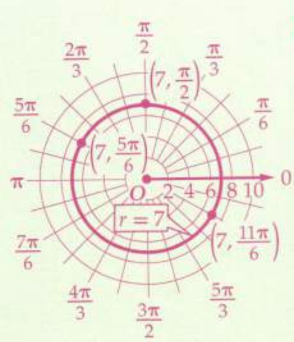
أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1,0)$ وطول نصف قطرها 1.



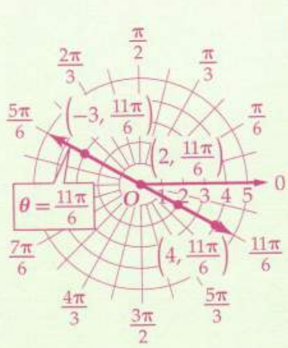
(14



(15



(16



إجابات:

32) $3.317(\cos 0.441 + i \sin 0.441)$

33) $9.434[\cos(2.1294) + i \sin(2.1294)]$

34) $4.359(\cos 3.55 + i \sin 3.55)$

35) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

40) $-4\sqrt{3} - 4i$

41) $3.86 - 1.04i$

42) $\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} i$

43) $1 + i\sqrt{3}$

45) $1.07 + 0.21i$, $-0.21 + 1.07i$, $-1.07 - 0.21i$, $0.21 - 1.07i$

28-31) انظر ملحق الإجابات

مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

28) $z = 3 - i$ 29) $z = 4i$

30) $z = -4 + 2i$ 31) $z = 6 - 3i$

32-35) انظر الهامش

عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

32) $3 + \sqrt{2}i$ 33) $-5 + 8i$

34) $-4 - \sqrt{3}i$ 35) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية: 36-39) انظر ملحق الإجابات

36) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

37) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

38) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

39) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية: 40-43) انظر الهامش

40) $-2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot -4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

41) $8(\cos 225° + i \sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$

42) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

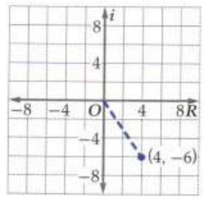
43) $6(\cos 210° + i \sin 210°) \div 3(\cos 150° + i \sin 150°)$

44) أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$، واكتبه على الصورة الديكارتية: $-23 - 119i$ تقريبًا

45) أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$. انظر الهامش

مثال 3

مثّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ $a = 4, b = -6$

أوجد السعة.

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4, b = -6$

≈ -0.98 بالتبسيط

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:

$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i \sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوّله إلى الصورة الديكارتية.

$-3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= (-3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بالتبسيط

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

$= -15[-0.26 + i(-0.966)]$ بتعويض قيم النسب المثلثية

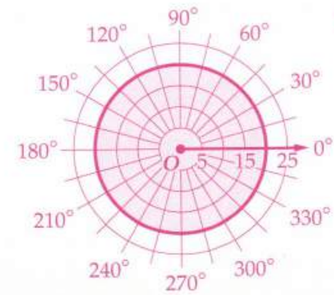
$= 3.9 + 14.5i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $3.9 + 14.6i$ تقريبًا.

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

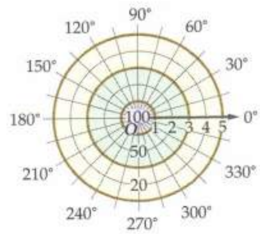
إجابات :

(47a



تطبيقات ومسائل

46) العاب: قُسِّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 1-6)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟ **20**

b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أي منهما؟ **إجابة ممكنة: $(2, 0°)$ أو $(2, 180°)$**

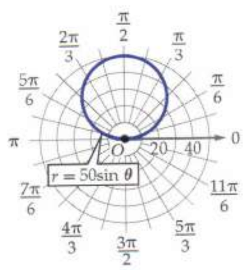
47) حدائق: تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft. (الدرس 1-6)

انظر الهامش

a) حدِّد المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها في المستوى القطبي.

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \le \theta \le 210°$. **$838\ ft^2$ تقريبًا**

48) عجلة دوّارة: يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$. (الدرس 2-6)



$\left(12.9, \frac{\pi}{12}\right)$

a) عيِّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر).

b) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. **$(12.5, 3.3)$**

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **3 ft**

49) كهرباء: تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل جهدًا قدره V... للفرعين a, b استعمل المعادلة $E = I \cdot Z$، حيث فرق الجهد E ... بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (الدرس 3-6)

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$ أمبير، فأوجد المعاوقة. **$(15.2 - 37.9j)\ \Omega$**

b) إذا كانت معاوقة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$، فأوجد شدة التيار. **$(21.9 + 66.0j)$ أمبير**

50) تحويل جوكوسكي (Jowkoski): يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = a + bi$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة كل من العددين المركبين الآتيين وفق التحويل. (الدرس 3-6)

a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **1**

b) $z = 2 - 2i$ **$\frac{9}{4} - \frac{7}{4}i$**

84 الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

المعالجة:

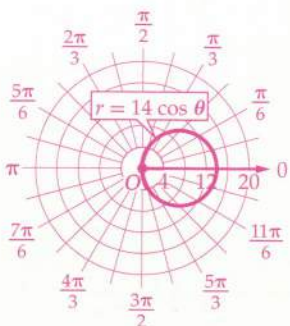
بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكّل تحديًّا للطلاب.

إجابات:

1) $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$

2) $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$

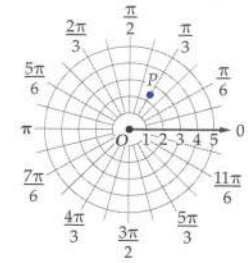
8) دائرة، $r = 14 \cos \theta$



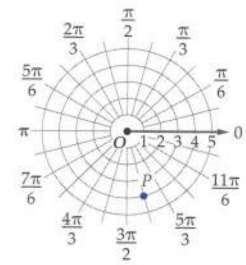
6 اختبار الفصل

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 1, 2، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. (1, 2 انظر الهامش

1)



2)



مثّل بيانيًّا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية: (3-6 انظر ملحق الإجابات

3) $\theta = 30°$

4) $r = 1$

5) $r = 2.5$

6) $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7) **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل. $(-28, 60)$

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(50, -75)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

7b) إجابة ممكنة: $(90, 303.7°)$

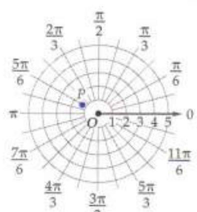
c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل. 156 mi

8) حدِّد شكل التمثيل البياني للمعادلة $(x - 7)^2 + y^2 = 49$ ، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية، وعزِّز إجابتك بتمثيل المعادلة في المستوى القطبي. انظر الهامش

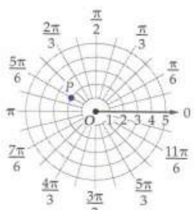
9) **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3 - 4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة Z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $E = I \cdot Z$.
$(16.2 + 21.6j)\Omega$

10) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟ D

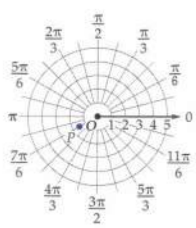
A



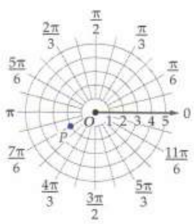
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $(-1 + 4i)^3$ $\quad 47 - 52i$

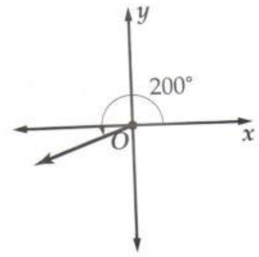
12) $(6 + i)^4$ $\quad 1081 + 840i$

مخطط المعالجة

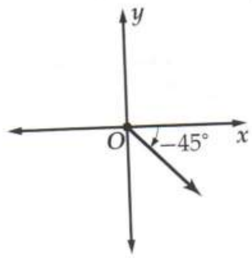
المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-6 ،2-6 ،1-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (52)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة للفصل 6 ص (53)

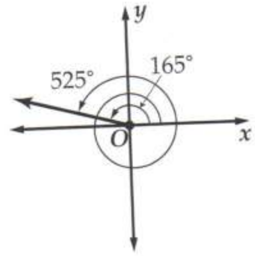
(1

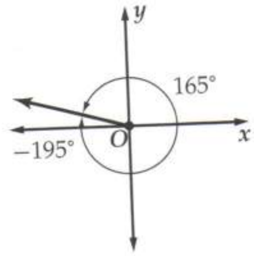


(2

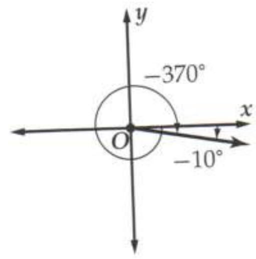


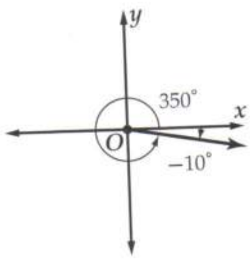
(3 525°, −195°



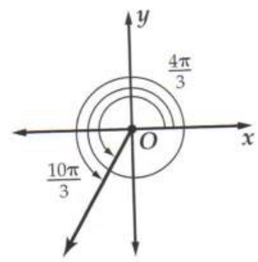


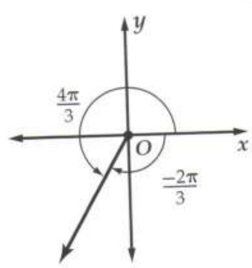
(4 350°, −370°



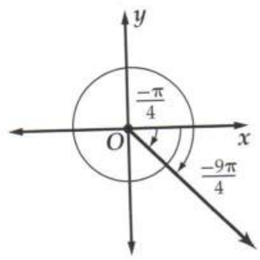


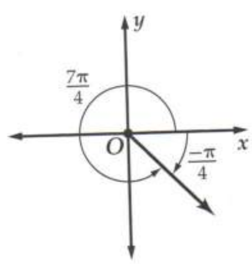
(5 $\frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$





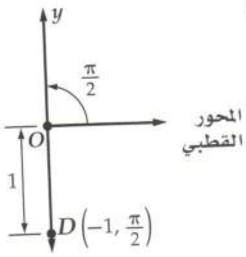
(6 $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$



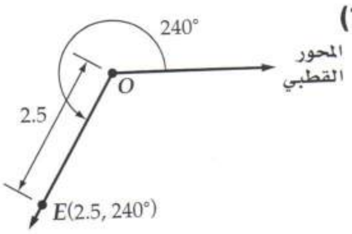


الدرس 1-6 (تحقق من فهمك) ص (55, 57)

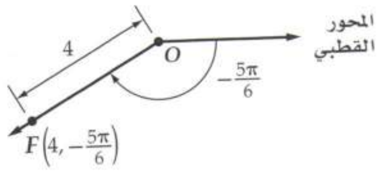
(1A



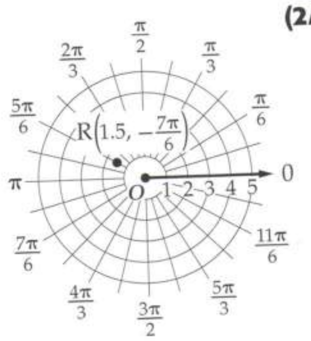
(1B



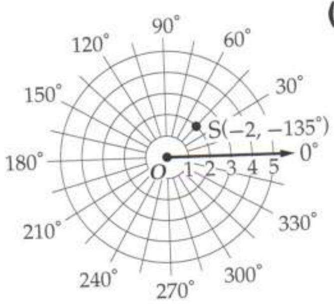
(1C



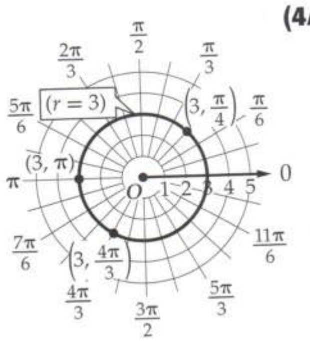
(2A



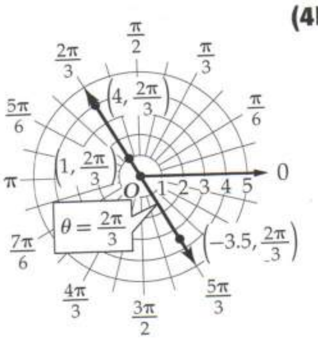
(2B



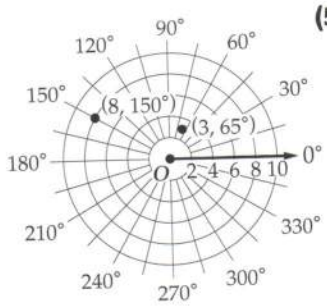
(4A



(4B

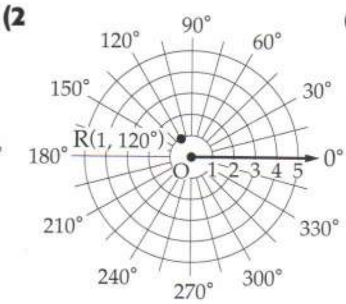


(5A

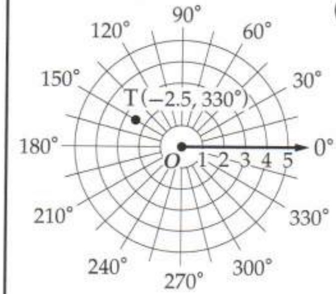


الدرس 1-6، ص (58-60)

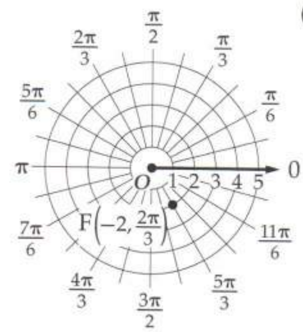
(1



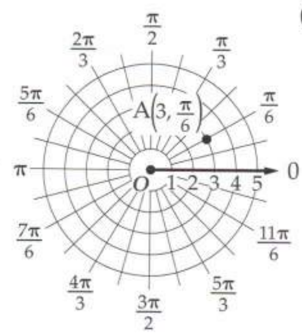
(2



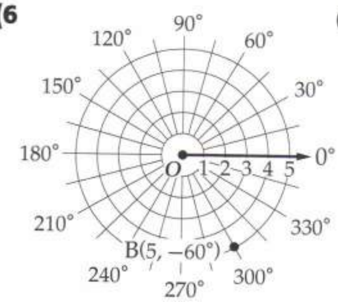
(3



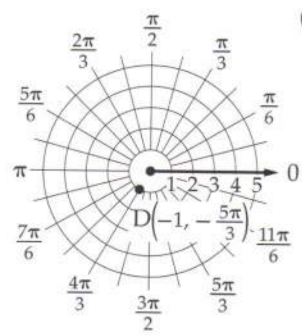
(4



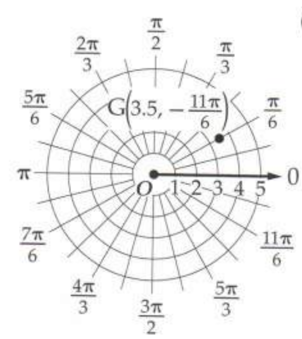
(5



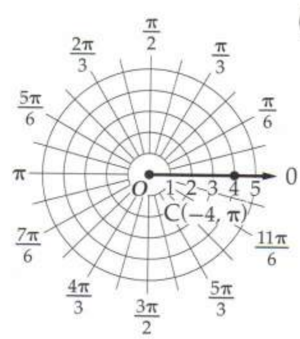
(6



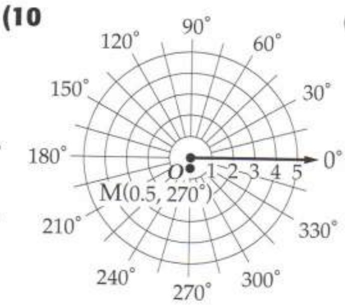
(7



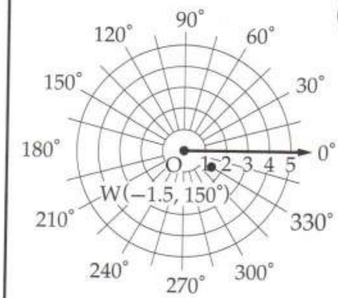
(8



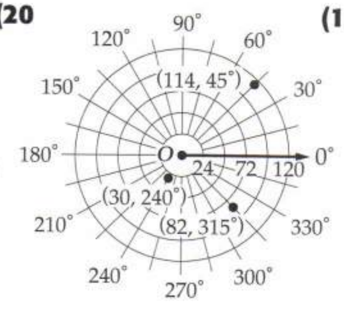
(9



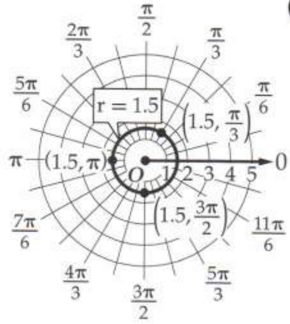
(10



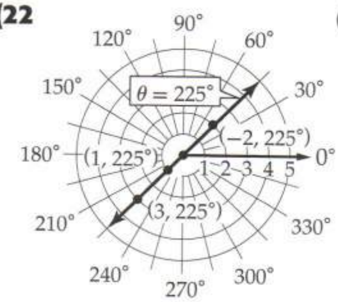
(11a



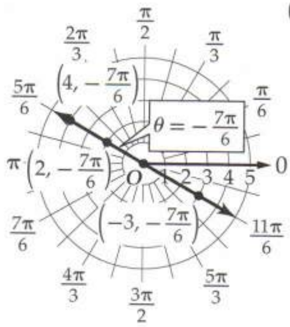
(20



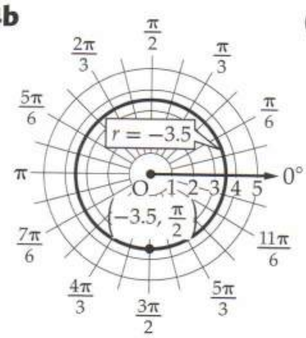
(21



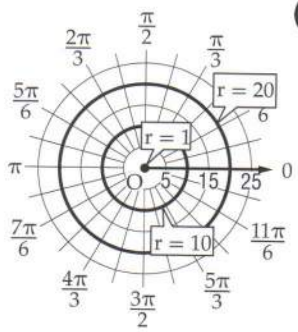
(22



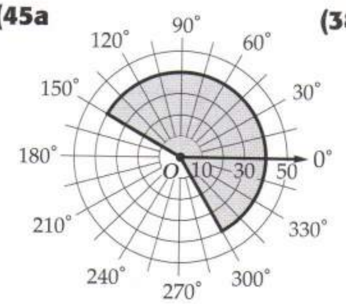
(23



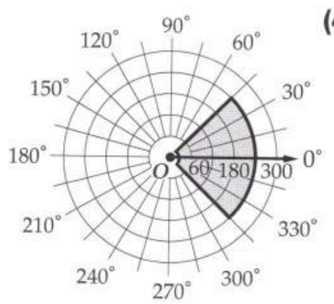
(24b



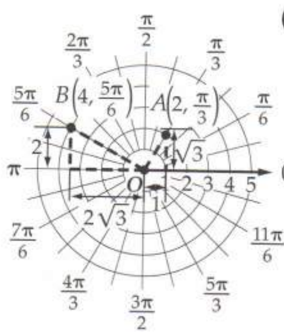
(38a



(45a



(51a–c

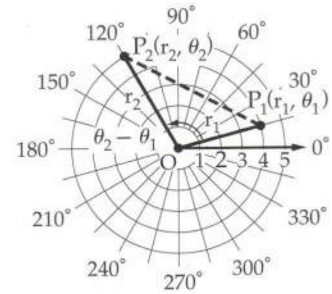


(51d يمثل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

(51e إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

54) إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتي ضرب قيم r وجمعها، وكلتا العمليتين إبدالية. والدالة $\cos\theta$ دالة زوجية. لذا، $\cos(-\theta)=\cos\theta$، ومنه $\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_2-\theta_1)$.

56)



في المثلث الذي رؤوسه P_1, P_2 والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة بينهما؛ لذا وباستعمال قانون جيب التمام، فإن:

$(P_1P_2)^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$ أو

$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$.

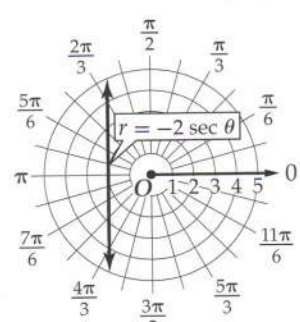
57) عندما $(\theta_2-\theta_1)=\frac{\pi}{2}$، فإن $\cos\frac{\pi}{2}=0$، وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية يعطي $\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2}$. وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

58) سعيد؛ إجابة ممكنة: عيّن علي نقطة على المحور القطبي ورسم منها قطعة مستقيمة رأسية طولها 5 وحدات، بينما كان عليه تعيين نقطة تبعُد 5 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

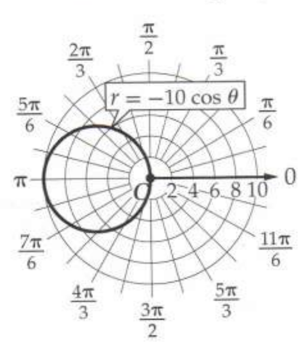
59) في الإحداثيات القطبية، لا يؤخذ ارتفاع الطائرة في الحسبان لتحديد موقعها بشكل دقيق.

الدرس 6-2 ، ص (67–69)

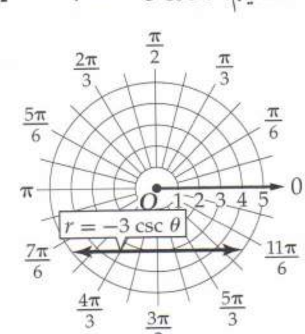
24) مستقيم، $r=-2\sec\theta$



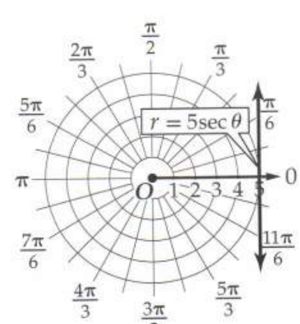
25) دائرة، $r=-10\cos\theta$



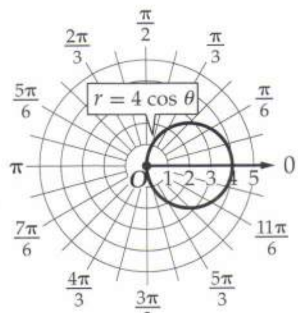
26) مستقيم، $r=-3\csc\theta$



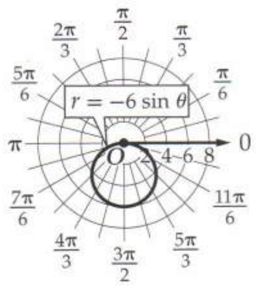
27) مستقيم، $r=5\sec\theta$



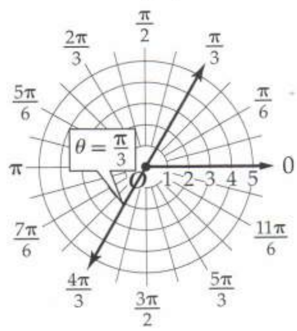
28) دائرة، $r=4\cos\theta$



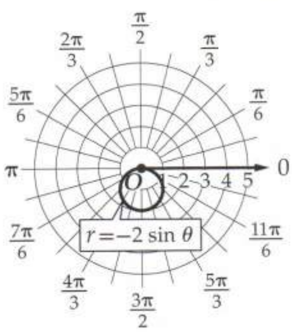
29) دائرة، $r=-6\sin\theta$



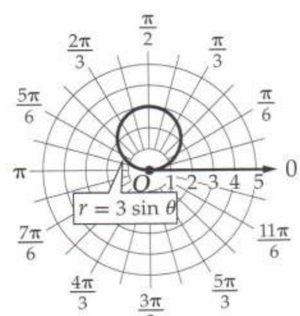
30) مستقيم، $\theta=\frac{\pi}{3}$



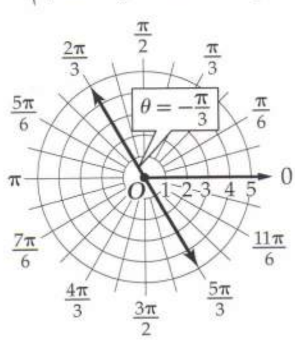
31) دائرة، $r=-2\sin\theta$



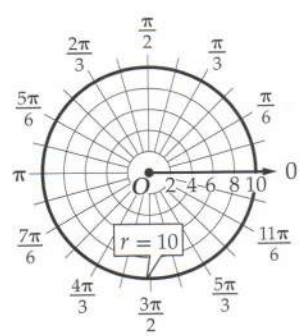
32) $x^2+y^2-3y=0$ ، دائرة



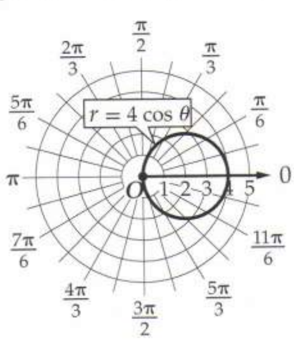
33) $y=-\sqrt{3}x$ ، مستقيم



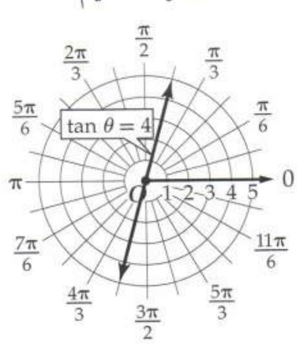
34) $x^2+y^2=100$، دائرة



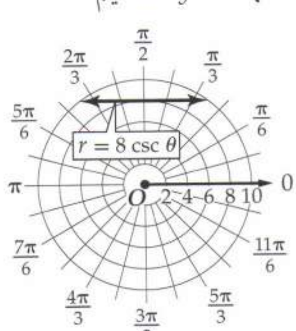
35) $x^2-4x+y^2=0$، دائرة



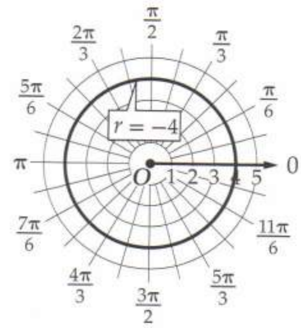
36) $y=4x$، مستقيم



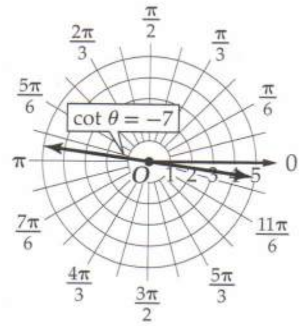
37) $y=8$، مستقيم



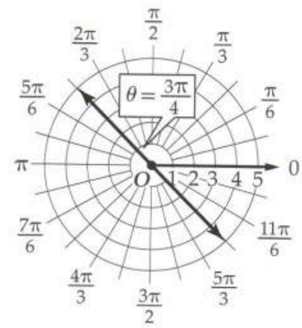
38) $x^2 + y^2 = 16$، دائرة



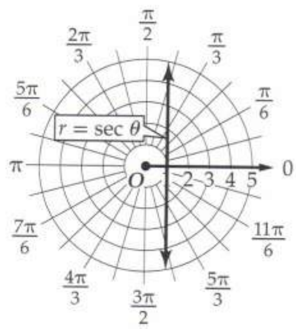
39) $x = -7y$ أو $y = -\frac{1}{7}x$، مستقيم



40) $y = -x$، مستقيم

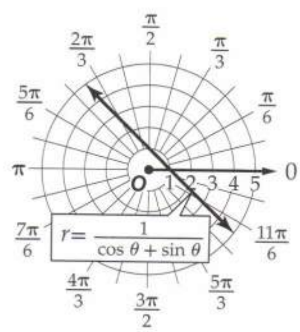


41) $x = 1$، مستقيم

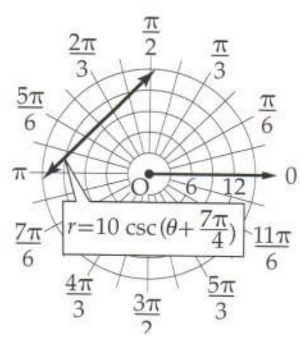


42b) $(0, 6.3)$؛ إجابة ممكنة: سيشعر بالزلزال الناس الذين يبعدون 6.3 mi فما دون عن مركز الأمواج الزلزالية.

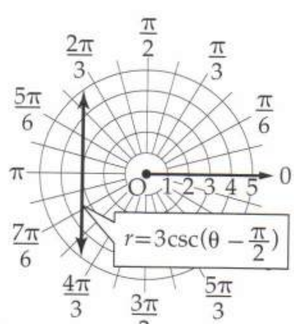
43) $x + y = 1$ أو $y = 1 - x$، مستقيم



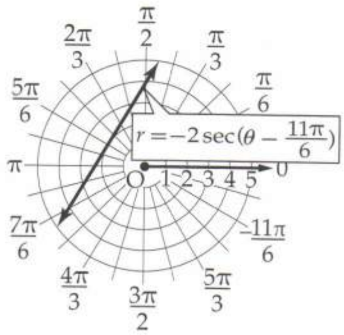
44) $\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10$ أو $y = x + 10\sqrt{2}$، مستقيم



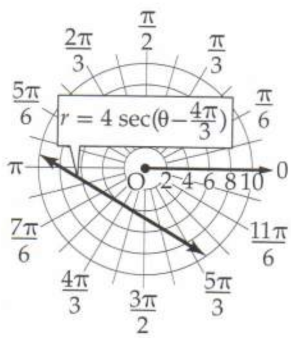
45) $x = -3$، مستقيم



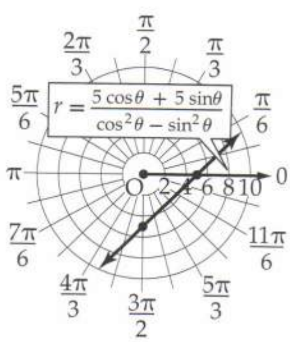
46) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2$ أو $y = \sqrt{3}x + 4$، مستقيم



47) $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$، مستقيم



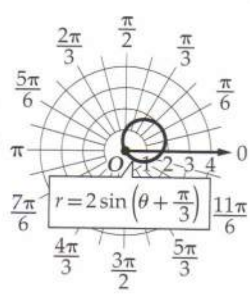
48) $x - y = 5$ أو $y = x - 5$، مستقيم



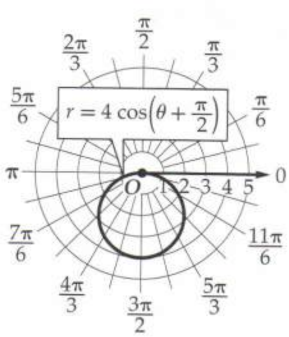
49) $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$ أو

$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

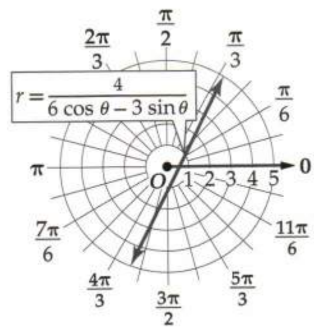
دائرة



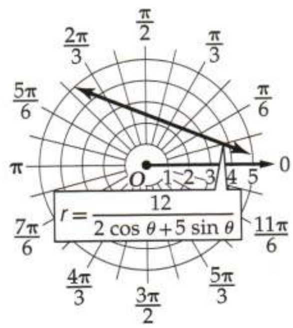
50) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ أو $x^2 + (y + 2)^2 = 4$، دائرة



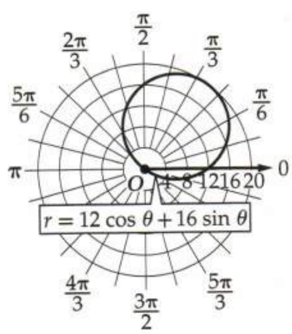
(51 $r = \dfrac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$ ، مستقيم



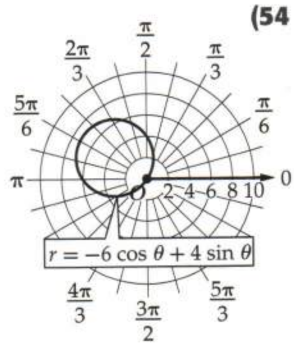
(52 $r = \dfrac{12}{2\cos\theta + 5\sin\theta}$ ، مستقيم



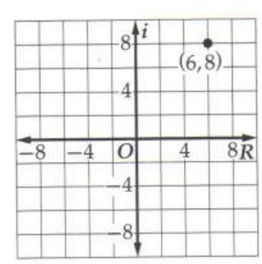
(53 $r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$ ، دائرة



(54 $r = -6\cos\theta + 4\sin\theta$ ، دائرة

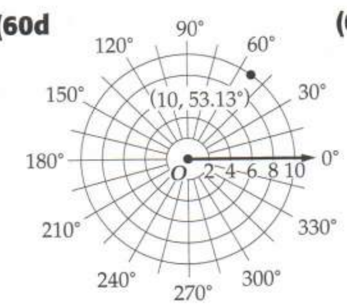


(60a

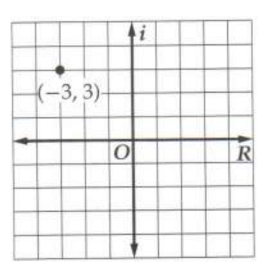


(60b $(10, 0.93)$ أو $(10, 53.13°)$

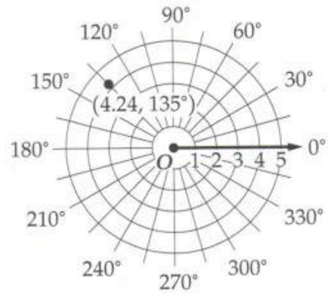
(60c



(60d



(60e $(4.24, 135°)$ أو $\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$



(60f , $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$, عندما a موجبة،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

(61 توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية، في حين تمثل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

(63 إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثل دوالًا، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية، في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوالًا كالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

(64

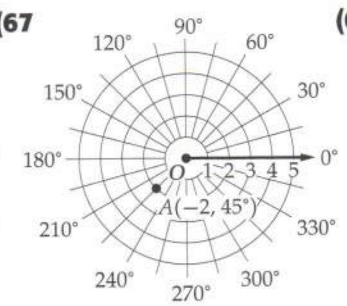
$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$\dfrac{x}{\cos\theta} = r \qquad \dfrac{y}{\sin\theta} = r$

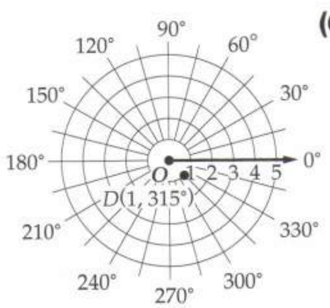
$x \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} = r \qquad y \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} = r$

$x\sec\theta = r \qquad y\csc\theta = r$

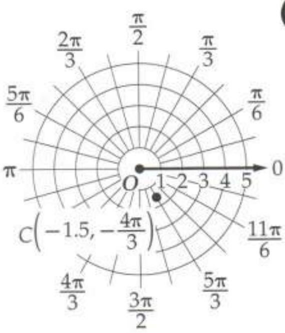
(66



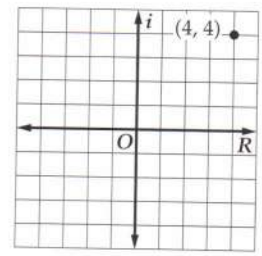
(67

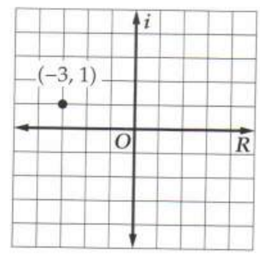


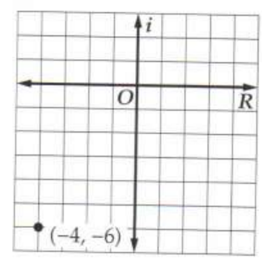
(68

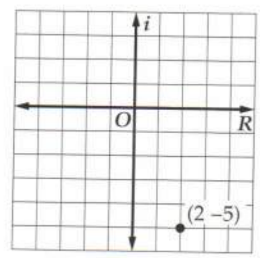


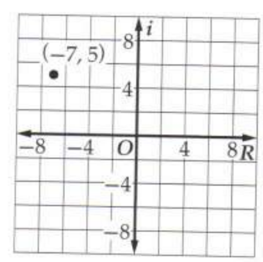
الدرس 3-6، ص (80-78)

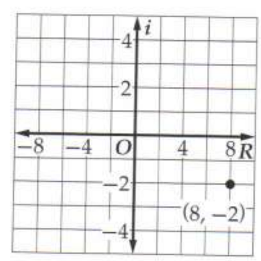
1)


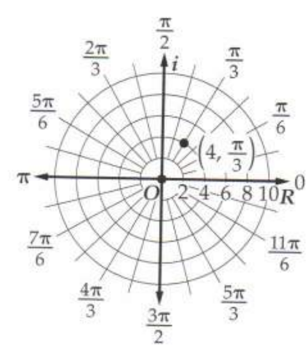
2)


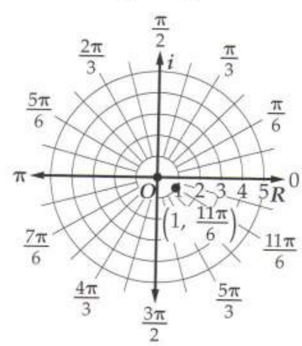
3)


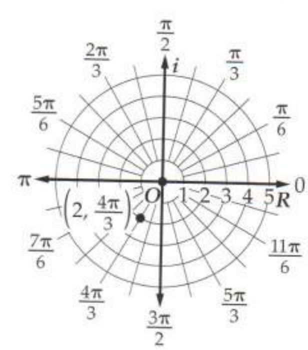
4)


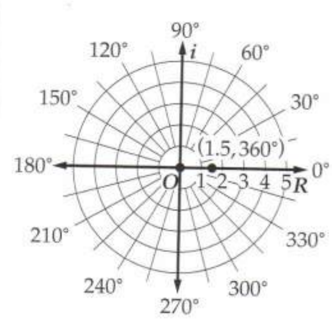
5)


6)


14) $2+2\sqrt{3}\,i$


15) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$


16) $-1-\sqrt{3}i$


17) $\frac{3}{2}$


18) $24\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -12\sqrt{2}+12\sqrt{2}i$

19) $10(\cos 180°+i\sin 180°), -10$

20) $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], 3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$

21) $4(\cos 360°+i\sin 360°), 4$

22) $\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], -\frac{3}{4}i$

23) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

24) $3(\cos 210°+i\sin 210°), -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

25) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), 3i$

26) $10(\cos 315°+i\sin 315°), 5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i$

27) $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), \frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{12}i$

33) $0.97+0.26i, 0.26+0.97i, -0.71+0.71i,$
$-0.97-0.26i, -0.26-0.97i, 0.71-0.71i$

34) $0.22+1.67i, -1.67+0.22i,$
$-0.22-1.67i, 1.67-0.22i$

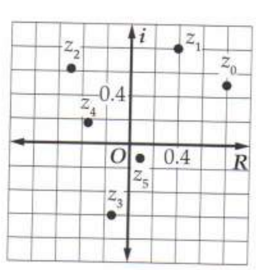
39) $(1-i)(4+4i)=8,$
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\cdot 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=8$

40) $(3+i)(3-i)=10, \sqrt{10}(\cos 0.3218+i\sin 0.3218)\cdot$
$\sqrt{10}(\cos(-0.3218)+i\sin(-0.3218))=10$

41) $(3-i)(4+i)=13-i,$
$\sqrt{10}(\cos(-0.3218)+i\sin(-0.3218))\cdot$
$\sqrt{17}(\cos 0.245+i\sin 0.245)=13-i$

42)
$(-6+5i)(2-3i)=3+28i,$
$\sqrt{61}(\cos 2.447+i\sin 2.447)\cdot$
$\sqrt{13}(\cos(-0.9828)+i\sin(-0.9828))$
$\approx 3+28i$

43a) $z_1=0.39+0.8i, z_2=-0.49+0.62i,$
$z_3=-0.14-0.61i, z_4=-0.35+0.17i,$
$z_5=0.09-0.12i$

43b)


43c) إجابة ممكنة: عند تطبيق $f(z)=z^2$، في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر.

49) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), 3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$
$3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right), 27i$

(50 $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$
$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right), -16$

(51

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_2+i\sin\theta_2\cos\theta_2-i^2\sin^2\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\right)$$

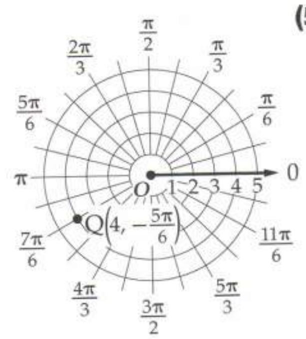
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_1)]$$

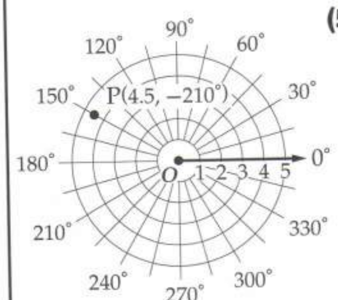
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

(52 دائمًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$ ، فإن
$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a, (z\cdot\bar{z})=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

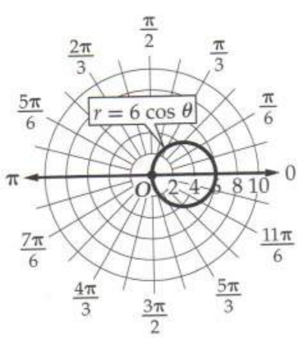
(54



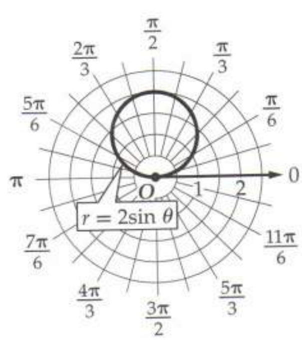
(55



(56 دائرة، $r=6\cos\theta$

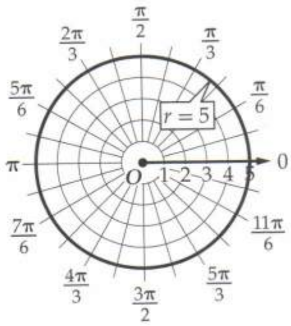


(57 دائرة، $r=2\sin\theta$

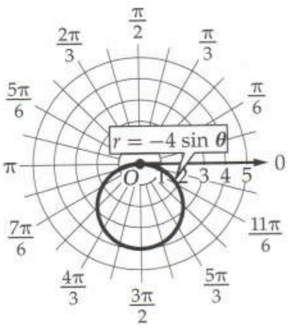


دليل الدراسة والمراجعة، ص (81-84)

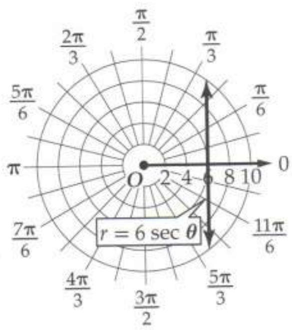
(24 $x^2+y^2=25$، دائرة



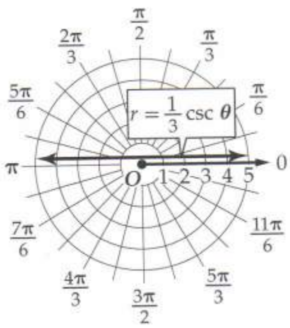
(25 $x^2+(y+2)^2=4$، دائرة



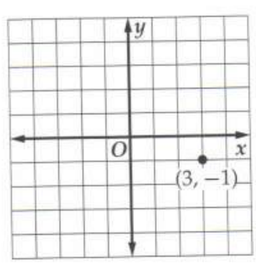
(26 $x=6$، مستقيم



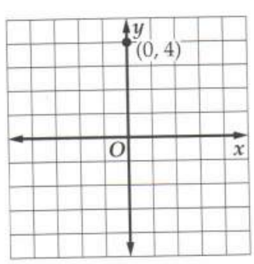
(27 $y=\frac{1}{3}$، مستقيم



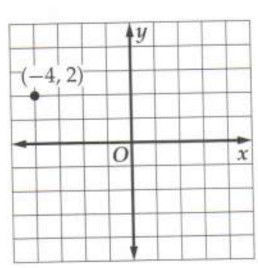
(28 $\sqrt{10}$



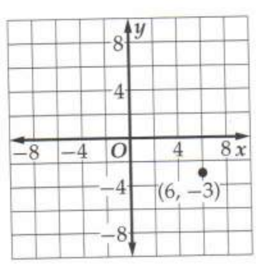
(29 4



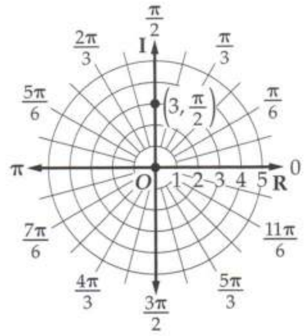
(30 $2\sqrt{5}$



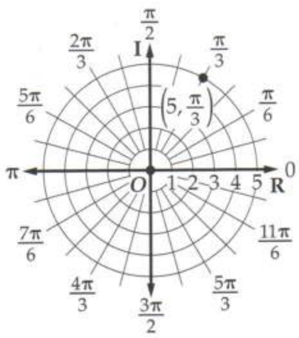
(31 $3\sqrt{5}$



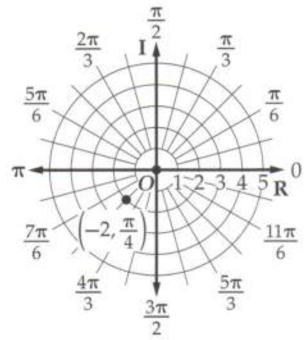
(36 $3i$



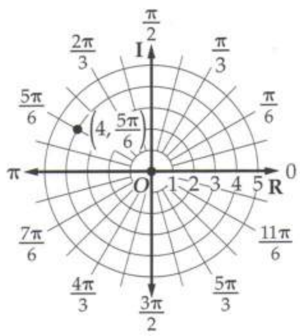
(37 $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



(38 $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

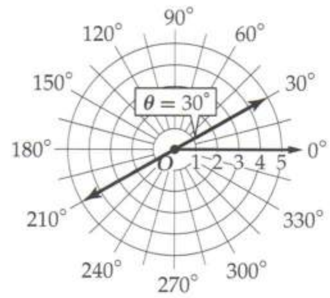


(39 $-2\sqrt{3} + 2i$

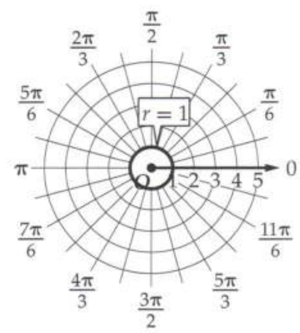


اختبار الفصل ، ص (85)

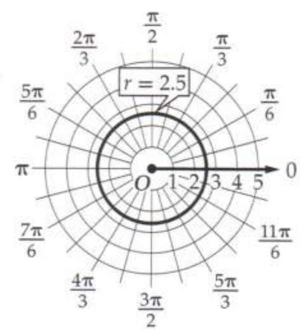
(3



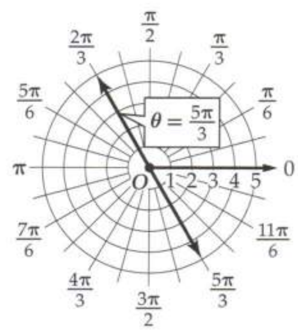
(4



(5



(6



مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص 87

	الدرس 1-7 (3) حصص	توسع 1-7 حصة	الدرس 2-7 (4) حصص	الدرس 3-7 (4) حصص
العنوان	الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة	معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة	التحليل الإحصائي	الاحتمال المشروط
الأهداف	• تقويم الدراسات المسحية، والدراسات بالملاحظة، والدراسات التجريبية. • التمييز بين الارتباط والسببية.	• استعمال تطبيق Spreadsheet في الحاسبة البيانية لتقويم بيانات منشورة.	• استعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمقارنة مجموعات من البيانات. • تعرف مقاييس التشتت.	• إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثةً أخرى قد وقعت. • استعمال الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.
المفردات الأساسية	الدراسة المسحية المجتمع الكلي التعداد العام العينة المنحازة غير المنحازة الدراسة بالملاحظة الدراسة التجريبية المجموعة التجريبية المجموعة الضابطة الارتباط السببية		المتغير بيانات في متغير واحد مقياس النزعة المركزية المعلمة الإحصائي هامش خطأ المعاينة مقياس التشتت التباين الانحراف المعياري	الاحتمال المشروط الجدول التوافقي التكرار النسبي
تمثيلات متعددة				
مصادر الدرس	• كتاب التمارين، ص(12) دون ضمن فوق		• كتاب التمارين، ص (13) دون ضمن فوق	• كتاب التمارين، ص (14) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• صفحة على الانترنت	• الحاسبة البيانية	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية
تنويع التعليم	ص (90, 92)		ص (95, 98)	ص (100, 102)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، (103)

المفاتيح: ضمن ضمن المستوى دون دون المستوى فوق فوق المستوى

الاحتمال والإحصاء

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(25) حصة	(4) حصة	(29) حصة

الدرس 7-4 (4) حصص	الدرس 7-5 (4) حصص	توسع 7-5 حصة	الدرس 7-6 (4) حصص
الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية	**التوزيع الطبيعي**	**معمل الجبر: القانون التجريبي والمئينات**	**التوزيعات ذات الحدين**
• إيجاد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق. • إيجاد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية. • تكوين رسوم بيانية للتوزيعات الاحتمالية واستعمالها.	• تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزعة توزيعًا طبيعيًا أو ملتويًا. • استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.	• استعمال القانون التجريبي للربط بين المئينات والتوزيع الطبيعي.	• إيجاد احتمالات تجارب ذات الحدين . • إيجاد احتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.
الاحتمال النجاح الفشل فضاء العينة المتغير العشوائي المتغير العشوائي المنفصل التوزيع الاحتمالي المنفصل الاحتمال النظري الاحتمال التجريبي القيمة المتوقعة	التوزيع الاحتمالي المتصل التوزيع الطبيعي التوزيع الملتوي		تجربة ذات الحدين توزيع ذات الحدين
• كتاب التمارين ، ص (15) دون ضمن فوق	• كتاب التمارين ، ص (16) دون ضمن فوق		• كتاب التمارين ، ص (17) دون ضمن فوق
• الكاميرا التوثيقية	• الرسائل الفورية		• البحث في شبكة الإنترنت
ص (105, 108)	ص (112, 114)		ص (117, 119)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (122-126)
- اختبار الفصل، ص (127)

الفصل 7

التقويم والمعالجة

التقويم	التشخيص	المرجع	إرشاد المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 7**			
	التهيئة للفصل السابع ص (87)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة ص (87)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	تحقق من فهمك مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! (الخطوة 4)، التقويم زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب كتاب الطالب دليل المعلم دليل المعلم دليل المعلم	تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	دليل المعلم دليل المعلم
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (103)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (103) دليل الدراسة والمراجعة، ص (126 - 122) زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	دليل المعلم كتاب الطالب
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 7، ص (126-122) اختبار الفصل، ص (127) زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	كتاب الطالب كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (127)	دليل المعلم
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 7**			
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اطلب إلى كل طالب أن يستعمل شريطًا متريًّا، ويقيس محيط المعصم لـ 15 طالبًا من زملائه إلى أقرب سنتمتر. واطلب إليهم أن يجدوا المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري للبيانات التي جمعوها، ثم اطلب إليهم أن يبحثوا في توزيع بياناتهم، وما إذا كانت موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا، أو كانت موجبة الالتواء أو سالبة الالتواء.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية لعمل قائمتي مقابلة، بحيث تقوم كل مجموعة بوضع واحدة من قائمتين: تتضمّن القائمة الأولى المصطلحات وتعريفات لها، وتتضمّن القائمة الثانية أمثلة رياضية عليها.
ثم اطلب إلى كل مجموعة نسخ ما عملته وتوزيعه على الآخرين؛ وعمل مقابلة بين عناصر كل قائمة. اطلب إلى الطلاب الاحتفاظ بقائمتي المقابلة لاستعمالها في مراجعة الفصل.

البديل 2 دون المتوسط دون

وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية أو رباعية، واطلب إلى كل طالب أن يختار المتوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال، وأن يكوّن بيانات من 15 قيمة بحيث يكون استعمال المقياس الذي اختاره أفضل مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي قام بوضعها. اطلب إلى كل طالب تقديم ما عمله لمجموعته، ومناقشة ذلك ضمن المجموعة، بحيث تقرر المجموعة أي مقاييس النزعة المركزية يكون استعماله أفضل لكل مجموعة بيانات.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يعملوا جدولًا يوضّحون فيه العلاقات بين معاملات ذات الحدين ورمز التوافيق. وفيما يأتي مثال يوضح ذلك:

رموز ذات الحدين:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{n-r+1}y^{r-1} + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

رموز التوافيق:

$$(x+y)^n = {}_nC_0\,x^n + {}_nC_1\,x^{n-1}y + {}_nC_2\,x^{n-2}y^2 + {}_nC_3\,x^{n-3}y^3 + \dots + {}_nC_{r-1}\,x^{n-r+1}y^{r-1} + \dots + {}_nC_{n-1}\,xy^{n-1} + {}_nC_n\,y^n$$

الفصل 7

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 7

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تكوين فضاء العينة لتجارب بسيطة أو مركّبة.
- إيجاد الاحتمالات لحوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة.
- استعمال الاحتمالات النظرية والتجريبية؛ لعمل التوقعات واتخاذ القرارات.
- اختيار المقياس المناسب من مقاييس النزعة المركزية أو المدى لوصف مجموعة بيانات.
- اختيار التمثيل المناسب لمناقشة أو عرض العلاقات بين البيانات التي تم جمعها.
- تقويم طرائق المعاينة لتحديد صدق الاستدلال الذي يتم التوصل إليه من مجموعة من البيانات.

الفصل 7

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال التباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات وحل المسائل.
- إيجاد احتمال حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة.
- استعمال مقياس من مقاييس النزعة المركزية لتمثيل مجموعة بيانات، وإيجاد بعض مقاييس التشتت لوصف التباين في مجموعة بيانات.
- تحديد ما إذا كانت العينة منحازة أو لا، وإيجاد هامش خطأ المعاينة.
- إنشاء واستعمال منحنيات التوزيعات الاحتمالية.
- حل مسائل تتوزّع البيانات فيها توزيعًا طبيعيًّا.
- استعمال توزيع ذات الحدين لإيجاد الاحتمالات.
- التعرُّف على الاحتمالات المشروطة وحسابها.

ما بعد الفصل 7

تعريف توزيعات احتمالية أخرى واستعمالاتها.

نظرة على الدروس

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

يقوم الطلاب في هذا الدرس بما يأتي :

- استكشاف ومناقشة العلاقة بين النتائج التي يتم التوصل إليها من عينة الدراسة المسحية بالنتائج التي يتم التوصل إليها من المجتمع الكلي للدراسة. والتعرّف على أن العينة العشوائية أو غير المنحازة تتميّز بإتاحة الفرصة نفسها لكل فرد في المجتمع الكلي؛ ليكون في العينة.
- تعلم الحالات التي تُستعمل فيها الدراسة المسحية أو الدراسة بالملاحظة (وفيها تتم ملاحظة الأفراد دون أي تدخل خارجي) أو الدراسة التجريبية (وفيها يتم إجراء معالجة معينة للمجموعة التجريبية، وتتم ملاحظة أثر ذلك في مقابل ما يتم ملاحظته في المجموعة الضابطة) لجمع البيانات المطلوبة.
- تمييز ما إذا كانت العلاقة بين حادثتين ارتباطية، أو أن العلاقة بينهما سببية (إحدى الحادثتين سبب مباشر لوقوع الحادثة الأخرى).

7-2 التحليل الإحصائي

يُحدّد الطالب في هذا الدرس المقياس الأفضل من مقاييس النزعة المركزية (المتوسط، الوسيط، المنوال) لتمثيل عينة بيانات.

هامش خطأ المعاينة وهو فترة توضّح الاختلاف في الاستجابة بين العينة والمجتمع.

تقيس مقاييس التشتت مدى تباعد أو انتشار مجموعة من البيانات، ويُعد المدى أحد هذه المقاييس. أمّا المقياسان الآخران فهما التباين، والانحراف المعياري، وهذان المقياسان يصفان المدى الذي تتجمع فيه البيانات حول المتوسط.

- قانون الانحراف المعياري للعينة هو :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}{n-1}}$$ ، ($\overline{x}$ المتوسط للعينة).

- قانون الانحراف المعياري للمجتمع الكلي هو :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$ ، (μ المتوسط للمجتمع الكلي).

الاحتمال والإحصاء

7-3 الاحتمال المشروط

يُسمّى احتمال وقوع حادثة ما إذا وقعت حادثة أخرى بالاحتمال المشروط، ويُعرّف الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B إذا علم أن الحادثة A قد وقعت على النحو الآتي:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$، وتُستعمل الجداول التوافقية لتسجيل بيانات تُنتجُ نتائج مختلفة في مواقف مختلفة. وتُستعمل البيانات في هذه الجداول؛ لتوضيح الاحتمالات المشروطة وإيجادها.

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

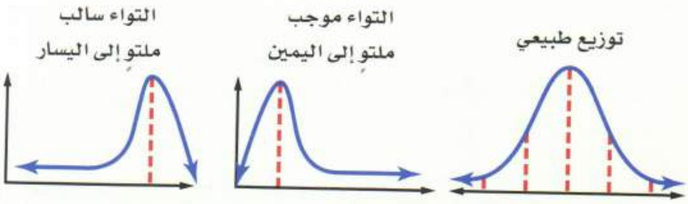
توصف الأرجحية في وقوع حادثة، من خلال الاحتمال كما يأتي:

- احتمال نجاح وقوع حادثة هي نسبة عدد مرات النجاح لوقوع الحادثة إلى عدد مرات تكرار التجربة.
- الاحتمال يكون دائمًا عددًا يقع بين 1 , 0.
- مجموع احتمالات النجاح والفشل لحادثة ما يساوي 1.

يستكشف الطلاب التوزيعات الاحتمالية المنفصلة من خلال النظر إلى جداول توزيعات الاحتمال النظرية. ومن خلال تمثيل التوزيعات بيانيًا بالأعمدة. ويستعمل الطلاب معلوماتهم حول الأوساط الموزونة لإيجاد قيمة التوقع $E(X)$ لقيم المتغير العشوائي X في التوزيع الاحتمالي.

7-5 التوزيع الطبيعي

يُعّد التوزيع الطبيعي واحدًا من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة. حيث يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية ويُمثّل التوزيع المتصل بمنحنى، ويكون متماثلًا، ويشبه شكل الجرس. ويتم وصف خصائص التوزيعات الطبيعية عن طريق القانون التجريبي. وتُسمّى التوزيعات غير المتماثلة التوزيعات الملتوية، وقد يكون التوزيع موجب الالتواء أو سالب الالتواء.



7-6 التوزيعات ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية ناتجها إحدى حادثتين بسيطتين، أمّا توزيع ذات الحدين فيُبيّن احتمالات نتائج تجربة ذات الحدين، ويُستعمل عادة مخطّط الرسم الشجري ليوضّح هذه التوزيعات.

ويمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي الكامل لتجربة ذات الحدين من خلال مفكوك ذات الحدين الذي هو على الصورة $(p + q)^n$، حيث n عدد مرات إجراء التجربة بصورة مستقلة، p يُشير إلى احتمال نجاح التجربة، q يُشير الى احتمال الفشل. ولتمثيل توزيع ذات الحدين توضع النواتج الممكنة على المحور x، بينما تكون الاحتمالات المقابلة على المحور y.

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء
Probability and Statistics

فيما سبق:
درست إيجاد المتوسط الموزون.

والآن:
- أقوّم المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا؟
التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب؛ لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

الفصل 7 ملاحظات

مشروع الفصل

إحصاءات تربوية
يستعمل الطلاب ما تعلموه حول الاحتمال والإحصاء؛ ليصمّموا دراسات مسحية عن مدرستهم، ويحلّلوا نتائجها.

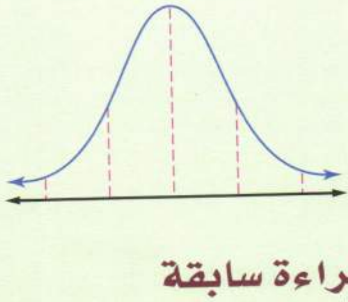
- وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية أو رباعية، بحيث تقوم كل مجموعة بتصميم سؤال لدراسة مسحية تتناول سمات يتصف بها طلاب المدرسة. ومن الموضوعات التي يمكن للدراسات المسحية تناولها (المواد المفضلة، والمواد الصعبة، والرياضة المفضلة والأنشطة خارج المدرسة، والخطط بعد التخرج من المدرسة الثانوية، ...إلخ) تأكّد أن كل سؤال من الأسئلة غير متحيّز.
- جمّع الأسئلة في استبانة واحدة، حيث يمكن للطلاب تطبيقها على عينة من طلاب المدرسة. اطلب إلى الطلاب التأكد من العشوائية في اختيار العينة.
- اطلب إلى كل مجموعة أن تُمثّل البيانات لنتائج الإجابات عن السؤال الذي وضعوه بالأعمدة.
- وأخيرًا، اطلب إلى كل مجموعة أن تطرح سؤالًا يتضمّن تطبيق احتمال باستعمال توزيع ذات الحدين، وأن تجيب عنه. فمثلًا يمكن طرح السؤال الآتي: ما احتمال أن أكثر من 3 طلاب يُفضّلون مادة الرياضيات من بين الطلاب الذين يتم اختيارهم عشوائيًّا؟

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: التوزيع الطبيعي هو توزيع تكراري، يحدث عادة عندما توجد أعداد كبيرة من قيم البيانات، ويكون 68% تقريبًا من البيانات ضمن انحراف معياري واحد عن المتوسط، 95% من البيانات ضمن انحرافين معياريين تقريبًا عن المتوسط، 99% من القيم ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط تقريبًا.

مثال: يوضّح هذا الشكل توزيعًا طبيعيًّا

توزيع طبيعي



سؤال: ماذا تلاحظ في منحنى التوزيع الطبيعي؟
يشبه شكل الجرس، وهو متماثل.

قراءة سابقة
شجّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حدد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثل قصة من مكتبة. مستقلة

2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أنّ الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد. غير مستقلة

3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية. مستقلة

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

4) اصطفاف سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر. تباديل

5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة». تباديل

6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات. توافيق

اكتب مفكوك كلٍّ من العبارات الآتية: 7-10) انظر الهامش

7) $(a-2)^4$

8) $(2a+b)^6$

9) $(3x-2y)^5$

10) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^5$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر حيث يكون الترتيب فيها مهمًا.

التوافيق (Combinations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events):
تكون A و B حادثتين مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events):
تكون A و B حادثتين غير مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقة ما احتمال حدوث B.

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events):
تكون A و B حادثتين متنافيتين إذا لم يكن وقوعهما ممكنًا في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem):
إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن:

$$(a+b)^n$$
$$={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots+{}_nC_na^0b^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k$$

التهيئة للفصل 7

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة " إذا ... فقم"، في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة

فقم: بمراجعة المفاهيم التالية: الحادثة، الاحتمال، الحوادث المستقلة، التباديل، التوافيق، نظرية ذات الحدين.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة

فقم: بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

7) $a^4-8a^3+24a^2-32a+16$

8) $64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$

9) $243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5$

10) $\frac{a^5}{32}+\frac{5a^4}{8}+5a^3+20a^2+40a+32$

7-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

تصميم محاكاة لتقدير الاحتمالات.

الدرس 7-1

تقويم الدراسات المسحية والدراسات بالملاحظة والدراسات التجريبية.

التمييز بين الارتباط والسببية.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال نتائج الدراسة المسحية على عينة؛ للتوصل إلى استنتاجات عن المجتمع.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، حتى إذا لم تشمل طلاب المدرسة جميعهم ؟ إجابة ممكنة: يمكن ذلك، وتعتمد على طريقة اختيار الطلاب الذين تشملهم الدراسة المسحية.
- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، إذا تمت مقابلة الأشخاص الذين حضروا مباراة كرة القدم؟ على الأغلب لا؛ لأن الأفراد الذين يحضرون مباريات كرة القدم يفضلونها أكثر من الأشخاص الذين يفضلون كرة السلة.

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

Experiments, Surveys, and Observational Studies

فيما سبق:

درست تصميم محاكاة لتقدير الاحتمالات.

والآن:

- أقوّم الدراسات المسحية، والدراسات بالملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميز بين الارتباط والسببية.

المفردات:

الدراسة المسحية survey

المجتمع الكلي population

التعداد العام census

العينة sample

المنحازة biased

غير المنحازة unbiased

الدراسة بالملاحظة observational study

الدراسة التجريبية experimental study

المجموعة التجريبية treatment group

المجموعة الضابطة control group

الارتباط correlation

السببية causation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعمًا لمشروعهم، فقد نفّذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.

الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة تُستعمل **الدراسات المسحية** في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت **المجتمع الكلي**، وفي هذه الحالة تُسمّى هذه العملية **تعدادًا عامًّا**. أمّا إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100طالب بصورة عشوائية، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**.

وتكون الدراسة المسحية **منحازة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلًا: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة منحازة. وتكون العينة **غير منحازة** إذا تم اختيارها عشوائيًّا، أو إذا لم تكن معتمدة على خاصية للمجتمع تم تحديدها مسبقًا، فإذا أرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائيًّا عندها تكون العينة غير منحازة.

مثال 1 من واقع الحياة — العينات المنحازة وغير المنحازة

دراسات مسحية: حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة منحازة، أو غير منحازة، وفسّر إجابتك:

a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

منحازة؛ لأن الأشخاص الذين تم سؤالهم قد يختلفون عن سكان المدينة، حيث إنهم من الطبقة المثقفة.

b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا .

منحازة؛ لأن المجموعة التي تم مسح رأيها لا تُمثّل بالضرورة رأي أهل المدينة؛ لأنهم غالبًا ممن يحبون تربية الماشية.

c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًّا، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

غير منحازة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة الذين استُطلِعت آراؤهم.

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة منحازة، أو غير منحازة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة.

1A) منحازة؛ لأن انحيازهم لكرة السلة هو الأكثر احتمالًا.

1B) منحازة؛ لأن رياضتهم المفضلة الأكثر احتمالًا ستكون كرة القدم.

لتجنُّب التحيّز في الدراسات المسحية لا بدّ من تحقّق أمرين هما عينة عشوائية مناسبة، وأساليب غير منحازة لإجراء عملية المسح، والعينة العشوائية المناسبة هي عينة غير منحازة حجمها كبير نسبيًّا.

مصادر الدرس 1 – 7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (90)	• تنويع التعليم ص (90, 92)	• تنويع التعليم ص (92)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)

إرشادات للدراسة

- إذا كانت العينة غير منحازة، فإنها عينة عشوائية.
- تعدّ العينة منحازة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.

2A) هذا سؤال منحاز؛ لأنه ذكر مادة محدّدة، ولم يذكر غيرها.

2B) سؤال منحاز ؛ لأنه حدد مادتين للاختيار بينهما.

2C) سؤال غير منحاز؛ حيث أنه يعطي الإجابة المرتبطة بهدف السؤال.

مثال 2 من واقع الحياة — تصميم الدراسات المسحية

دراسات مسحية في المدرسة : يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيُّز؟

a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟
هذا سؤال منحاز لصالح مكان محدد.

b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى متنزه سلام؟
هذا سؤال منحاز؛ لأنه يحدد بديلين بالاسم.

c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟
هذا سؤال غير منحاز؛ حيث إنه يعطي الإجابة المرتبطة بهدف السؤال.

✓ تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد المادة الأفضل بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

2C) ما مادتك المفضلة؟

في **الدراسة بالملاحظة**، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي **الدراسة التجريبية**، يتم إجراء تعديل متعمد على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة تجريبية	دراسة بالملاحظة
• من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصًا عشوائيًّا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.	• اختر 100 شخص منهم 50 شخصًا يخضعون للمعالجة.
• اجمع البيانات وحللها.	• اجمع البيانات .
	• حلل البيانات وفسِّرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة **المجموعة التجريبية**. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية فيسمون **المجموعة الضابطة**. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير منحازة.

مثال 3 من واقع الحياة — الدراسات التجريبية والدراسات بالملاحظة

حدد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة بالملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن إن وجد تحيّز أو لا .

a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة .
هذه دراسة بالملاحظة.

b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًّا إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.
هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائيًّا، وإحداهما خضعت للبرنامج التدريبي، والأخرى لم تخضع لأي برنامج تدريبي، وهي دراسة منحازة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

✓ تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة بالملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن إن وجد تحيّز أو لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة. دراسة بالملاحظة

الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية المقارنة بين العينتين المنحازة وغير المنحازة، وكذلك بين الأسئلة المنحازة وغير المنحازة.

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية المقارنة بين الدراسات المسحية، والتجريبية، وبالملاحظة.

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان اضافيان

1 **دراسات مسحية :** حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة منحازة، أو غير منحازة، وفسر إجابتك:

a) استطلاع رأي مشاهدي الكرة الطائرة لمعرفة أكثر الألعاب شعبية. منحازة؛ لأن اللعبة الشعبية الأكثر احتمالًا من وجهة نظرهم ستكون الكرة الطائرة.

b) الاتصال بكل عاشر شخص في قائمة المشاركين في شراء صحيفة محددة، للاستفسار عن نوع الخدمة المقدّمة. غير منحازة؛ لا يوجد ما يوحي بأنها منحازة.

c) الاتصال من خلال الإنترنت لإيجاد نسبة الأشخاص الذين يلجؤون إلى وكلاء السفر. منحازة؛ لأن الأشخاص الذين تشملهم الدراسة المسحية أقل إمكانية لأن يلجؤوا إلى وكلاء السفر.

2 **رياضة :** أي الأسئلة الآتية، يُحدّد الرياضة المفضلة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيز؟

a) هل تُعدّ لعبة كرة القدم ممتعة؟
هذا سؤال منحاز لصالح كرة القدم .

b) ما أفضل لعبة رياضية تحب مشاهدتها؟
هذا سؤال غير منحاز؛ حيث إنه يعطي الإجابة المرتبطة بهدف السؤال .

c) هل تحب مشاهدة مباراة التنس؟
هذا سؤال منحاز لصالح لعبة التنس.

المحتوى الرياضي

الدراسة المسحية والتعداد السكاني

بما أن التعداد السكاني يتناول جميع أفراد المجتمع السكاني، فإن نتائجه تكون صحيحة، ولكن الدراسة المسحية تعتمد على جزء من المجتمع فقط، ولذلك فإن نتائجها دائمًا تضمّن بعضًا من النتائج غير المؤكّدة.

التعليم باستعمال التقنيات

صفحة على الإنترنت اطلب إلى الطلاب تصميم دراسة مسحية، وإرسالها إلى صفحة الإنترنت الخاصة بالمدرسة. اطلب إليهم تفحّص العينة التي أجابت عن الدراسة المسحية متناولين مصادر التحيّز المحتملة في هذه العينة.

كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات بالملاحظة؟ تتضمّن الدراسات المسحية اختيار عينات عشوائية من أفراد المجتمع، بينما تتضمّن الدراسات التجريبية تعيين المعالجات عشوائيًّا على الأفراد. وللدراسات التجريبية مجموعات ضابطة إلى جانب المجموعات التجريبية، بينما لا توجد مجموعات ضابطة في الدراسات بالملاحظة. وفي الدراسات التجريبية فإنك بصفتك باحثًا تمتلك القدرة على إحداث التغيّرات على الأفراد، وليس لك مثل هذه القدرة في الدراسات بالملاحظة.

مثال 4 الدراسات المسحية والتجريبية وبالملاحظة

حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك:

a) تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.

يستدعي ذلك إجراء دراسة تجريبيّة يكون المستهدفون فيها مرضى يشكّلون المجموعة التجريبية، وتخضع هذه المجموعة للعلاج، بينما يخضع أفراد المجموعة الضابطة الآخرون وهم مرضى كذلك لعلاج شكلي.

b) تريد أن تجمع آراء حول القواعد المعتمدة في انتخاب رئيس الصف.

يستدعي هذا دراسة مسحية للآراء، حيث من الأفضل أن تختار أشخاصًا من الصف بصورة عشوائية؛ لتحصل على عينة غير منحازة.

c) تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثّر في سعة الرئة أو لا.

يستدعي هذا إجراء دراسة بالملاحظة تقارن فيها سعة رئة المدخنين لمدة 10 سنوات، مع سعة الرئة لعدد مساوٍ لهم من غير المدخنين.

تحقق من فهمك دراسة مسحية؛ تم اختيار 200 فرد عشوائيًّا من المدارس الثانوية، كما تم طرح السؤال عليهم، بحيث وضعوا إجاباتهم وفق مقياس مدرج من 1 إلى 5 .

حدّد إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) اختير 200 طالب عشوائيًّا من مدرسة ثانوية، واستطلعت آراؤهم حول وسيلة المواصلات المدرسية في المدارس الثانوية؛ ليضعوا تقييمهم على مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).

التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة ملاحظة بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد **ارتباط** بين ظاهرتين، فإن كلًّا من الظاهرتين تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد **سببية**، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى. وبينما يكون بيان الارتباط بين ظاهرتين سهل الملاحظة، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.

إرشادات للدراسة
السببية إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.

مثال 5 الارتباط والسببية

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

a) أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطًا بعد تناول الغداء .

ارتباط. أهملت العبارة العوامل الرئيسة التي تؤثّر في الظاهرتين.

b) إذا رَفعتُ أثقالًا، أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .

ارتباط. يوجد عوامل عديدة تتدخل.

c) عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع .

طريقة جيدة لتحديد السببية هي البحث عن بدائل أخرى تسبّب طلوع النهار، وحيث إنها غير موجودة فهي سببية.

تحقق من فهمك ارتباط؛ حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز، ولكنها غير مضمونة .

بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

التمييز بين الارتباط والسببية

المثال 5 يبيّن كيفية المقارنة بين الارتباط والسببية.

مثالان إضافيان

3 **دراسة تجريبية:** حدّد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تتطلب دراسة تجريبية، أو دراسة بالملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، حدّد المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة، ثم بيّن إن كان هناك تحيز أو لا:

a) اختر 100 طالب، ووزّعهم في مجموعتين متساويتين عشوائيًّا، الأولى تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والأخرى لا تفعل ذلك. دراسة تجريبية، المجموعة التجريبية هي التي تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والضابطة التي لا تسير، والدراسة التجريبية منحازة؛ حيث إن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها .

b) اختر 100 طالب، نصفهم يعمل بعد المدرسة، وقارن نتائج تحصيلهم الدراسي. دراسة بالملاحظة.

4 حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسِّر إجابتك:

a) تريد أن تعرف ما إذا كان الركض هرولة يقوّي العضلات. دراسة بالملاحظة، مقارنة عضلات الذين يركضون هرولة، مع عدد مماثل لهم ممن لا يقومون بذلك.

b) تريد أن تعرف أكثر المعلمين شعبية في مدرستك. دراسة مسحية، ومن الأفضل أن تقابل الطلاب بصورة عشوائية للحصول على عينة غير منحازة.

c) تريد اختبار تطعيم ضد أحد الأمراض. دراسة تجريبية، الذين يخضعون للتطعيم هم المجموعة التجريبية، أمّا الذين لا يخضعون ويأخذون تطعيمًا حياديًّا، فهم المجموعة الضابطة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لتصميم سؤال لدراسة مسحية. واطلب إليهم أن تتدرب كل مجموعة على طرح هذا السؤال بحيث يظهر التحيّز في نغمة الصوت وتعبيرات الوجه. ثم اطلب إليهم طرح هذا السؤال على مجموعتين من الطلاب بحيث يظهر التحيّز في طرح السؤال على إحدى المجموعتين ولا يظهر هذا التحيّز عند طرحه على المجموعة الثانية. اطلب إلى المجموعة التي قامت بتصميم السؤال أن يدرسوا ما إذا كانت نسبة الإجابات أعلى في المجموعة التي كان طرح السؤال عليها متحيّزًا.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل من الدراستين المسحيتين الآتيتين تتبنى عينة منحازة، أو غير منحازة، وفسّر إجابتك: (مثال 1) 1-3 انظر الهامش

1) استطلاع رأي كل شخص ثالث يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبًا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

حدّد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل. (مثال 2)

4) يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة. b

a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟

b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟

c) ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة؟

5) يريد سليمان أن يحدد الرغبة في تكوين أول نادٍ للشطرنج في المدرسة. c

a) في أي يوم ترغب في أن تتأخر في المدرسة؟

b) هل تحب الشطرنج؟

c) هل تحب أن تنضم إلى نادي الشطرنج في المدرسة؟

6) يريد هاني أن يتعرف الطالب المثالي في المدرسة. a

a) من ترى أنه الطالب المثالي في المدرسة؟

b) هل تُفضّل الطالب الذي لا يبادر بالمساعدة، أم الذي يبادر بها؟

c) إذا طُلِب إليك إبداء الرأي، فهل تفعل؟

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية دراسة تجريبية، أو دراسة بالملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيّن إن كان هناك تحيز أو لا: (مثال 3)

7) قبل الاختبار، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى. ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما. انظر الهامش

8) وجد عادل 100 شخص، نصفهم متطوعون في مأوى للمحرومين الفقراء، وقارن بين متوسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين. دراسة بالملاحظة

9) اختر 300 شخص، واقسمهم عشوائيًا إلى مجموعتين: إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئًا، ثم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين. انظر هامش الصفحة التالية

10) اختر 250 شخصًا نصفهم في الفِرق الرياضية، وقارن بين كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات. دراسة بالملاحظة.

11) اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية، وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية. دراسة بالملاحظة.

12-16) انظر هامش الصفحة التالية

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك: (مثال 4)

12) تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

13) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

14) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثّر في حركة الركبة أو لا.

15) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثّر في جدار المعدة أو لا.

16) تريد اختبار معالجة معيّنة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلانًا.

بيّن ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك: (مثال 5) 17-22 انظر هامش الصفحة التالية

17) عندما أمارس الرياضة أكون في وضع نفسي أفضل.

18) عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

19) عندما يكون الطقس حارًا في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

20) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

21) دلّت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

22) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

23) **دراسة مسحية:** بيّن ما إذا كانت الدراسة المسحية الآتية تتبنى عينة منحازة أو غير منحازة، فسر إجابتك.
استطلاع آراء طلاب في كلية الطب؛ لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.
منحازة؛ لأن مهنتهم المستقبلية المفضلة الأكثر احتمالًا ستكون الطب.

24) **استبانات:** توزّع شركة استبانات على العاملين الذين تركوا العمل في الشركة، وكان أحد أسئلة الاستبانة هو كيف يرى العامل خبرته التي اكتسبها في الشركة؟ هل هذه دراسة مسحية منحازة؟ فسّر السبب. إجابة ممكنة: نعم منحازة؛ معظم العاملين الذين يتركون عملهم غير سعداء، والأغلبية السعيدة لا تترك وظائفها.

مثال اضافي

5) بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك.

a) يكون مد البحر أعلى، عندما يكون القمر بدرًا. سببية؛ لأن مراحل القمر لها تأثير مباشر على ارتفاع المد.

b) فئران المختبر التي تُمنَع من النوم، يكون معدل أوزانها أقل. ارتباط؛ مع أن قلة النوم قد تُقلّل من الوزن، ولكن هذا غير مضمون.

c) الأشخاص الذين يسكنون المدن يشربون عددًا أكبر من زجاجات الماء. ارتباط؛ يوجد أكثر من عامل لهذه النتيجة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-22 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول المجاور في هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-22، 24، 25، 27-42
ضمن المتوسط	1-27 فردي، 28-42
فوق المتوسط	17-42

إجابات:

1) منحازة؛ لأن الوجبة الأكثر احتمالًا من وجهة نظرهم ستكون المشويات.

2) منحازة؛ لأن الأشخاص المستهدفين يميلون إلى العلوم أكثر من غيرهم.

3) غير منحازة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

7) دراسة تجريبية: اختار المعلم شعبتين بشكل عشوائي. المجموعة التجريبية تراجع المادة مع المعلم في الحصص. والمجموعة الضابطة هي شعبة أخرى، وهذه تجربة منحازة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 25 أنه في الدراسة التجريبية غير المنحازة، لا يجوز لأي شخص أن يعرف إن كان في المجموعة الضابطة أو في المجموعة التجريبية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب مخططًا لدراسة تجريبية من اختياره، يعرّف فيها كلًا من المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة.

إجابات:

9) دراسة تجريبية، وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمّن المجموعة التجريبية من يقرأ القرآن الكريم قبل النوم، وتتضمّن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وهذه تجربة منحازة؛ لأن كل مشارك يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

12) دراسة تجريبية: المستهدَفون أشخاص لديهم صلع. والمجموعة التجريبية تتلقّى معالجة، بينما المجموعة الضابطة تتلقّى معالجة شكلية.

13) مسحية، من الأفضل أن تستطلع آراء أشخاص يختارون بصورة عشوائية.

14) دراسة بالملاحظة.

15) دراسة بالملاحظة.

16) دراسة تجريبية: الفئة المستهدفة. بساتين فيها غزلان. والمجموعة التجريبية بساتين تلقى حماية بطريقة محدّدة، وبقية البساتين هي المجموعة الضابطة وتتلقّى حماية بطريقة شكلية.

17) ارتباط، مع أن التدريب يجعل الإنسان في نفسية أفضل، إلا أن أحدًا منهما لا يتسبّب بالضرورة في الآخر.

18) سببية؛ حيث إن حالة الطقس سبب مباشر في تعطيل الدراسة.

19) سببية، الحرّ في الصيف سبب مباشر في زيادة مبيعات المشروبات الباردة.

20) ارتباط، مع أن الاثنين يرتبطان ببعضهما، لكن كثرة القراءة قد لا تؤثر في الذكاء.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير منحازة. هل وفّق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

سامي
- خذ مجموعة من 20 شخصًا بطريقة عشوائية.
- ضع لنصفهم عشوائيًا غذاءً من الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام
- خذ 20 لاعبًا لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم أن يقفزوا 500 قفزة إلى الأعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى الأعلى لكل مجموعة بعد الأسابيع الثلاثة.

26) **تحدٍّ:** كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيّزًا للعينة في النتيجة؟ إجابة ممكنة: الدراسات المسحية بالهاتف تكون عادة منحازة؛ لأن الذين لم تُدرج أسماؤهم لن يتم الاتصال بهم، وكذلك الذين ليس لديهم هواتف.

27) **اكتب:** قارن من خلال ذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين العينة العشوائية في اختيار الأفراد من المجتمع الكلي، وبين الاختيار العشوائي للمعالجة في الوحدات التجريبية. انظر ملحق الإجابات

28) **مسألة مفتوحة:** صمّم دراسة لكل ممّا يأتي: 28a, 28c) انظر ملحق الإجابات
a) مسحية
b) بالملاحظة
c) تجريبية

28b) إجابة ممكنة: ألاحظ 20 طالبًا نصفهم لديه غرفة للدراسة، وأقارن درجاتهم في نهاية الفصل.

29) **تبرير:** كيف يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثر في النتيجة؟ أعطِ مثالًا على ذلك. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 6\rangle$، فأوجد كلًا مما يأتي: (الدرس 5-2)

30) $2\mathbf{u}$ $\langle 4, -6\rangle$

31) $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ $\langle 3, 3\rangle$

32) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $\langle 3, -12\rangle$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-4)

33) $A(2, 2, 7), B(1, 3, -4)$ $\langle -1, 1, -11\rangle, \sqrt{123}$

34) $A(4, 5, 10), B(7, 1, 8)$ $\langle 3, -4, -2\rangle, \sqrt{29}$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (الدرس 6-2)

35) $(3, 90°)$ $(0, 3)$

36) $(2, 210°)$ $(-\sqrt{3}, -1)$

37) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (الدرس 6-3)

38) $6 + 8i$ $\approx 10(\cos 0.93 + i \sin 0.93)$

39) $-1 - i$ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

تدريب على اختبار

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت منحازة أو لا.

40) اختر 220 شخصًا عشوائيًا، وقسمهم عشوائيًا إلى مجموعتين. إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعة واحدة يوميًا، والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات، ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين. انظر ملحق الإجابات

41) اختر 200 طالب، نصفهم يمارس كرة القدم، وقارن فترة النوم بين المجموعتين. دراسة بالملاحظة

42) اختر 100 طالب جامعي، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي، وقارن معدلاتهم التراكمية. دراسة بالملاحظة

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع كلّف الطلاب بتقصّي طرائق الحصول على عينات عشوائية. يمكن استعمال جداول الأرقام العشوائية الموجودة في ملحق معظم كتب الإحصاء في الحصول على عينة عشوائية لقائمة من الأعداد. اطلب إلى كل طالب اختيار عينة من الأرقام العشوائية يتألّف كل منها من رقمين، واطلب إليه اختيار عينة عشوائية من هذه الأعداد مستفيدًا من جداول الأرقام العشوائية بحيث يبدأ كل طالب من موقع معين في الجدول، ومارًّا من خلال أحد أعمدة الجدول أو أحد صفوفها. هذا ويمكن استعمال الأرقام العشوائية التي يمكن توليدها باستعمال الآلة الحاسبة، أو أي من برامج الجداول الإلكترونية، مثل برنامج الإكسل.

21) ارتباط، حيث إن للدراسة علاقة بين الاثنين، لكن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

22) ارتباط، مع أنه ربما توجد علاقة بين الاثنين، إلا أن أحدهما قد لا يُسبّب الآخر.

توسع 7-1

معمل الحاسبة البيانية:

تقويم البيانات المنشورة

Evaluating Published Data

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، مع تطبيق Spreadsheet لتقويم البيانات التي يمكن الحصول عليها في الواقع.

يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها معرض للسيارات خلال الفترة 2009–1985، وقد قام المعرض بتمثيل هذه البيانات بالأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور؛ وعرضها في إحدى الصحف، وذلك لدعم المقولة بأن مبيعات المعرض تزداد بشكل كبير جدًا. هل هذا صحيح؟

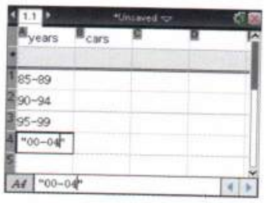
السنوات	1985–1989	1990–1994	1995–1999	2000–2004	2005–2009
عدد السيارات المبيعة	316	451	561	704	823

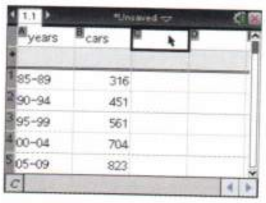
نشاط

تقويم التمثيل البياني للبيانات.

الخطوة 1 أدخل البيانات في تطبيق Spreadsheet.

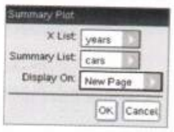
- اضغط (on) ومنها اختر.
- اكتب عنوان البيانات (years) في أعلى العمود (A) وَ (cars) في أعلى العمود (B).
- لإدخال فئات السنوات في كل خلية استعمل " "، فمثلًا لإدخال الفئة الأولى من السنوات في الخلية A_1 اكتب "89-85" ثم اضغط (enter)، وكرّر ذلك لبقية فئات السنوات.
- استعمل الأسهم لإظهار الخلية B_1، ثم أدخل البيانات لكل فئة من السنوات.

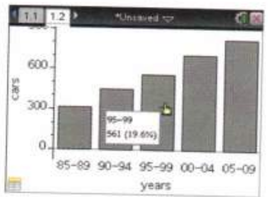




الخطوة 2 مثّل البيانات التي تم إدخالها بالأعمدة.

- اضغط (menu) 3:Data 5: Summary Plot
- اختر years في X list، وَ cars في Summary List، وَ New Page في Display On لإظهار التمثيل البياني على صفحة جديدة، ثم اضغط (OK).
- لمشاهدة المعلومات عن أي عمود في التمثيل البياني، قم بالإشارة إلى ذلك العمود فتظهر معلوماته كما هو موضح في الشكل المجاور.





حلّل النتائج 2) إجابة ممكنة: تمثيل الصحيفة، حيث لم يبدأ التدريج الرأسي في التمثيل البياني من الصفر.

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة.

1) هل يعرض التمثيلان البيانات نفسها؟ نعم
2) أي التمثيلين يُظهر زيادة مفاجئة؟ ولماذا؟
3) لماذا اختار المعرض أن يعرض بياناته بهذه الطريقة؟ هل هي مقبولة؟ ولماذا؟ بصورة واضحة.

3) إجابة ممكنة: يريد المعرض أن يُظهر أنّ الزيادة في المبيعات متسارعة بشكل كبير، وهذا ليس مقبولًا؛ لذا يجب أن تعرض البيانات

من المحسوس إلى المجرد

اسأل

- ما نسبة الزيادة في المبيعات من فئة السنوات الأولى إلى الفئة الأخيرة؟ 160% تقريبًا
- كيف أظهر التمثيل البياني الذي أعده المعرض تشوّهًا في البيانات؟ جعل الزيادة تُقدّر كأنها 350%

توسع 7-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف: استعمال تطبيق Spreadsheet في الحاسبة البيانية TI-nspire، لتقويم بيانات منشورة.

المواد

- الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

إذا ظهرت Spreadsheet قديمة عند بداية التطبيق، يجب على الطالب حفظ القديمة أوّلًا، ثم فتح قائمة جديدة من خلال الضغط على المفاتيح: 1 New Document (on)، ثم فتح Spreadsheet جديدة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

- تحتوي الزاوية العليا في اليسار من Spreadsheet على العنوان الذي يدخله الطلاب.
- [" "] الذي يسبق المدخلة يدل على أن المدخلة نص، ولذلك يجب أن لا تُدخل بيانات عددية يسبقها هذا الرمز.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 3-1

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم مدى إتقان الطلاب لتمثيل البيانات بالأعمدة من خلال تطبيق Spreadsheet.

7-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

تحليل الأوساط الموزونة.

الدرس 7-2

استعمال مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت؛ لمقارنة مجموعات من البيانات.

ما بعد الدرس 7-2

مقارنة إحصائيات العينة ومعالم المجتمع .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا يكون من المفيد، وضع البيانات في قائمة عند دراستها؟ إجابة ممكنة: عندما تكون البيانات مرتّبة يكون من السهل معرفة كل من أصغر قيمة، والوسيط، والمنوال، وأكبر قيمة .
- ما الملاحظات التي يمكنك معرفتها عن الأوقات التي وصل فيها أمجد إلى خط النهاية في المسابقات التي شارك فيها (باستعمال الحساب الذهني فقط)؟ إجابة ممكنة القيمتان العظمى والصغرى هما : (7:29 , 6:48) ، والمدى 41 ثانية.

مقاييس النزعة المركزية

المثال 1 يبيّن كيفية تحديد مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل مجموعة بيانات.

7-2 التحليل الإحصائي
Statistical Analysis

فيما سبق:

درست الأوساط الموزونة.

والآن:

- أتعرف مقاييس التشتت.
- أستعمل مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات:

المتغير
variable

بيانات في متغير واحد
univariate data

مقياس النزعة المركزية
measure of central tendency

المَعْلَمة
parameter

الإحصائي
Statistic

هامش خطأ المعاينة
margin of sampling error

مقياس التشتت
measure of variation

التباين
variance

الانحراف المعياري
standard deviation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

شارك أمجد في 18 سباقًا جبليًّا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثّل الجدول المجاور الزمن بالدقيقة الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أيّ من مقاييس النزعة المركزية يجب أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟

7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

مقاييس النزعة المركزية البيانات التي تشتمل على **متغيّر** واحد ، كما هو الحال في البيانات الموجودة في الجدول تُسمّى **بيانات في متغير واحد**. ويمكن وصف مثل هذه البيانات **بمقياس النزعة المركزية**؛ لأنها تُشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها). وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط، والوسيط، والمنوال.

وعند اختيار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:

مفهوم أساسي — مقاييس النزعة المركزية

استعمل	الناتج من	متى...
المتوسط	قسمة مجموع القيم على عددها	لا يوجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فرديًا، أو المتوسط عند وجود عددين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي .	عندما يكون في البيانات قيم متطرفة ولا توجد فراغات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد التي تظهر أكثر من غيرها.	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.

مثال 1 من واقع الحياة — مقاييس النزعة المركزية

a) **زمن السباق:** إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أيّ مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

بما أن البيانات تنتشر ولا يظهر فيها قيم متطرفة، يكون المتوسط هو الأفضل.

b) أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

بما أنه توجد قيم متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في المتوسط، فإن الوسيط أفضل من غيره لتمثيل البيانات.

تحقق من فهمك المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من القيم متساوية.

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أيّ مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

إرشادات للدراسة

القيمة المتطرفة

هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر بكثير من بقية البيانات.

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة بيانات، هما **المَعْلَمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي. و**الإحصائي** يصف خاصية في العينة. ويتم تحديد المجتمع الكلي للدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، إذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلمي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلمي الرياضيات الذين يُدرسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة منهم لإجراء الدراسة تسمى العينة.

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (95)	• تنويع التعليم ص (95, 98)	• تنويع التعليم ص (95, 98)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)

وعند سحب عينة من مجتمع كلي فهنالك خطورة من وجود خطأ في المعاينة. وكلما زاد حجم العينة قلَّ **هامش الخطأ**، ويُحدَّد هامش الخطأ الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع الكلي.

إرشادات للدراسة

أنواع البيانات

يمكن وضع البيانات النوعية في أصناف مثل الجنس والعمر ونوع المهنة وهكذا، كما يمكن أن تكون البيانات كمية ناتجة عن القياس، مثل الطول والوزن والسعة. وتُمثّل البيانات في المثال 1a بيانات كمية.

مفهوم أساسي **هامش خطأ المعاينة**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال 2 **هامش خطأ المعاينة**

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصًا، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$ قانون هامش خطأ المعاينة

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2148}}$$ $n = 2148$

$$\approx \pm 0.0216$$ بالتبسيط

إذن هامش الخطأ للمعاينة ±2.16% تقريبًا.

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الكلي الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

$0.58 + 0.0216 = 0.6016$ $\quad$ $0.58 - 0.0216 = 0.5584$

الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين أفادوا بأن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة تقع بين 55.84% و 60.16%.

تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟ ±1.75%

2B) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع الكلي المرتاحين للنهضة العلمية؟ بين 39.25% و 42.75%

مقاييس التشتت تصف **مقاييس التشتت** مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ويوجد مقياسان للتشتت هما **التباين**، و**الانحراف المعياري**. ويقيس هذان المقياسان مدى تباعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو تقاربها منه.

يُمثّل الرمز $\bar{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ «x بار»، ويمثّل الرمز μ المتوسط للمجتمع الكلي ويُقرأ «ميو». ويحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع الكلي بالطريقة ذاتها، أمّا طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع الكلي، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة s، والانحراف المعياري للمجتمع σ «سيجما».

مفهوم أساسي **قانونا الانحراف المعياري**

عينة	مجتمع كلي
$s = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$
حيث n عدد قيم العينة	حيث n عدد قيم المجتمع

هامش خطأ المعاينة

المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد هامش خطأ المعاينة في الدراسة المسحية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **رواتب:** يعمل 3 موظفين في شركة براتب سنوي مقداره 200000 ريال لكل منهم، ويعمل 10 آخرين براتب سنوي مقداره 70000 ريال لكل منهم، بينما يعمل 60 موظفًا في الشركة براتب سنوي مقداره 40000 ريال لكل منهم.

a) أيّ مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟ الوسيط أو المنوال؛ حيث يوجد تكرارات للبيانات، ولا توجد فجوات في متوسط البيانات.

b) أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات الآتية؟ ولماذا؟ 37, 33, 40, 31, 33, 38, 35 المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة.

2 في دراسة مسحية عشوائية شملت 1710 شباب، أفاد 76% منهم أنهم يحبون الرياضة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ ±0.0242 تقريبًا

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع الذين يحبون الرياضة؟ بين 73.58% , 78.42%

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب البحث في مجلة، أو صحيفة، أو في الإنترنت عن دراسة مسحية، ثم مقارنة هامش خطأ المعاينة المذكور في الدراسة بالنتائج التي يحسبونها وفق الطريقة التي تعلموها في هذا الدرس.

مقاييس التشتت

المثال 3 يبيّن كيفية حساب الانحراف المعياري لمجموعتين من البيانات والمقارنة بينهما .

مثال إضافي

3 طقس: كانت درجات الحرارة الفهرنهايتية في مدينة ما خلال أول 10 أيام من العام الماضي كما يأتي:

58, 68, 71, 73, 84, 89, 71, 73, 63, 56

وفي هذا العام كانت:

52, 37, 50, 54, 55, 60, 63, 56, 58, 48

a) أوجد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة التي قيست في العام الماضي. 10.4 تقريبًا

b) استعمل الحاسبة، لإيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة لأيام هذا العام. 7.3 تقريبًا

c) قارن الانحراف المعياري في كلا العامين. وُجد تباعد أكبر في درجات حرارة أول عشرة أيام من العام الماضي.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة وضّح للطلاب أن الانحراف المعياري لمجموعة بيانات هو عدد يمثل مدى تباعد مفردات المجموعة عن بعضها بعضًا، كما يخبرك عن مدى تباعد قيم البيانات عن متوسطها .

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل الجداول الإلكترونية، أو أية برمجية مناسبة لحساب إحصائيات متعددة لبيانات تم جمعها من خلال دراسة مسحية. واستمر في عرض هذه المعلومات على السبورة التفاعلية في أثناء تدريسك، بحيث يتم التوصّل إلى معنى كل إحصائية وكيفية تفسيرها .

مثال 3 من واقع الحياة — الانحراف المعياري

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في الفصلين A, B على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الفصلين A, B كما يأتي:

الفصل A	الفصل B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

الربط مع الحياة

يوازن أساتذة الجامعات درجات طلبتهم، وذلك بالتركيز على الاختبارات والتقارير والأبحاث.

a) أوجد الانحراف المعياري لدرجات الفصل A.

الخطوة 1 بما أن المتوسط 75 للفصل جميعها ، فهو يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن: $\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$$ قانون الانحراف المعياري

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2+(80-75)^2+\ldots+(75-75)^2+(75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

المتوسط لدرجات الفصل A يساوي 75 والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9

إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع الكلي عندما يكون المتوسط للمجتمع الكلي μ معلومًا، يمكنه أن يحل مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$ في المعالجات.

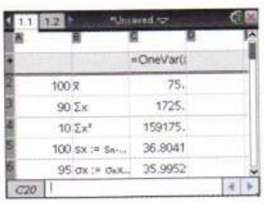
b) استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري للفصل B.

اضغط (on) ثم وأدخل القيم (الدرجات).

ولمشاهدة الإحصائيات اضغط (menu) ثم 4:Statistics

ومنها 1:Stat Calculations ثم 1:One-Variable Statistics...

ثم اضغط OK OK



المتوسط لدرجات الفصل B يساوي 75 والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 36

c) قارن الانحراف المعياري في كلا الاختبارين .

الانحراف المعياري للفصل B أكبر بكثير من الانحراف المعياري للفصل A؛ لذا فدرجات الطلاب في الفصل A أكثر تجانسًا، أي أن قدراتهم قريبة من بعضها مقارنة بالفصل B التي تضم طلابًا متفوقين جدًا وطلابًا دون المتوسط بكثير .

تحقق من فهمك

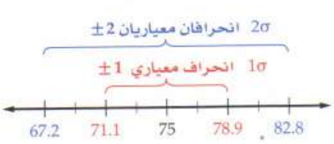
3A) احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع الكلي للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور. $\mu = 30.6, \sigma = 2.74$

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3B) ضع 70 مكان 30، ماذا يحصل لكل من المتوسط والانحراف المعياري، أعد الحسابات للتحقق.

3B) إجابة ممكنة: يجب أن يزداد المتوسط قليلًا تبعًا لذلك، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكل كبير. $\mu = 32.2$ $\sigma = 8.19$

لأيّ مجموعة من البيانات، يقع معظمها عادة ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط، وتقع البيانات جميعها تقريبًا ضمن انحرافين معياريين من المتوسط، ففي اختبار الفصل (A) للمعلم صالح حيث إن المتوسط 75 والانحراف المعياري 3.9 يمكن توضيح ذلك بيانيًا على خط الأعداد كما يأتي:



إرشادات للدراسة

الانحراف المعياري كلما كبر الانحراف المعياري، زاد تباعد قيم البيانات عن المتوسط.

إجابات :

1) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة.

2) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة متطرفة أكبر من القيم الأخرى .

3) الوسيط، لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة أصغر من القيم الأخرى .

4) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة .

5) الوسيط؛ يوجد قيمة واحدة متطرفة أكبر بكثير من بقية القيم هي 66

7a) هامش خطأ المعاينة

$= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ قانون هامش خطأ المعاينة

$= \pm \frac{1}{\sqrt{5824}}$ n = 5824

$\approx \pm 0.0131$ بالتبسيط

7b) $0.29 + 0.0131 = 0.3031 \approx 30.3\%$

$0.29 - 0.0131 = 0.2769 \approx 27.7\%$

الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين أفادوا بأنهم سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز تقع بين 27.7% و 30.3%

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كان الموقف يمثل مجتمعًا أم عينة في كل مما يأتي:

1) يُعقد الاختبار التحصيلي لجميع طلاب الثانوية العامة الراغبين في دخول الجامعات. **مجتمع**

2) يُقدر مركز أبحاث عدد ساعات مشاهدة التلفاز أسبوعيًّا في منازل المملكة. **عينة**

3) نشر فيصل استطلاعًا للرأي حول قضية اجتماعية على موقعه الإلكتروني. **عينة**

4) يقارن محمد نسبة الطلاب إلى المعلمين في جميع مدارس المملكة. **مجتمع**

5) سأل خالد 40 شخصًا قابلهم في السوق حول المكان المفضل لديهم لقضاء إجازة الصيف. **عينة**

أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (مثال 1) 1-5 انظر هامش الصفحة السابقة

6) 833, 796, 781, 776, 758

7) 27.2, 36.8, 50.4, 71.6, 194.7

8) 65, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69

9) 53, 61, 46, 59, 61, 55, 49

10) **تغذية:** يُوضح الجدول أدناه عدد السعرات لكل طبق خضار.

الخضار	السعرات	الخضار	السعرات	الخضار	السعرات
زهرة	10	بركلي	25	باذنجان	14
بندورة	17	ملفوف	17	فاصوليا	30
حبوب	66	جزر	28	فلفل	20
كوسا	17	سبانخ	9	خس	9

11) **طقس:** يبيّن الجدول أدناه، درجات الحرارة أثناء النهار ولمدة أسبوع بالدرجات الفهرنهايتية: **المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.**

اليوم	درجة الحرارة
السبت	64°F
الأحد	73°F
الإثنين	69°F
الثلاثاء	70°F
الأربعاء	71°F
الخميس	75°F
الجمعة	74°F

12) **ألعاب أولمبية:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز. (مثال 2) انظر هامش الصفحة السابقة

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز؟

13) **رياضة:** في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصًا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا. انظر الهامش

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذي يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا؟

14) **قيادة:** تُحدّد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديًا للحوادث، وفيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها. أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه. (مثال 3) **4.3 تقريبًا**

السرعات القصوى للطرقات جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70
65	65	70	65	70	65	65	65	75	55
65	65	75	75	65	70	70	70	70	65
65	75	65	65	75	65	70	70	65	75
65	65	75	65	70	70	65	65	75	70

15) **تمارين رياضية:** في دراسة مسحية شملت 4213 شخصًا اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعيًّا على الأقل.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ **±0.0154**

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعيًّا؟ **بين 76.5% و 79.5%**

16) **تدريب:** في أثناء التمرين سجَّل سلطان الأزمنة التي ركض فيها مسافة 40 m. أوجد الانحراف المعياري للبيانات في الجدول أدناه. **0.12**

أزمنة قطع المسافة 40 m ركضًا بالثواني									
4.8	4.9	4.8	4.7	5.0	4.9	4.8	4.9	4.8	5.0
5.0	5.1	4.8	4.9	4.6	4.8	4.7	4.9	4.8	4.8
5.0	4.9	4.9	5.0	4.9	5.0	4.8	4.8	4.7	4.6

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–9، 12–14، 14، 16–29
ضمن المتوسط	1–13 فردي، 14، 16–29
فوق المتوسط	10–29

12a) المتوسط = 21.18، الوسيط = 21.4. والقيمتان قريبتان من بعضهما بعضًا.

12b) المتوسط الجديد = 21.23

الوسيط الجديد = 21.45

يرتفع كل من المتوسط والوسيط قليلًا.

أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات الآتية بشكل أفضل؟ ولماذا؟

1) {12.1, 14.9, 6.7, 10, 12.8, 14, 18}
المتوسط، لا يوجد قيم متطرفة أو بيانات متكررة.

2) {77.9, 101, 78.9, 105, 4.2, 110, 87.9}
الوسيط، توجد قيمة متطرفة هي 4.2.

3) {10, 14.7, 14.7, 21, 7.4, 14.7, 8, 14.7}
المنوال، يوجد قيم متكررة.

4) {29, 36, 14, 99, 16, 15, 12, 30}
الوسيط توجد قيمة متطرفة هي 99.

5) **سيارات:** في دراسة مسحية شملت 56 شخصًا اختيروا عشوائيًّا في إحدى المدن وُجد أن 14% منهم يقودون سيارات بيضاء اللون. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين يقودون سيارات بيضاء؟
هامش خطأ المعاينة = ±0.1336، والفترة الممكنة تقع بين 27.36% ، 0.64%

6) **شواطئ البحر:** في دراسة مسحية شملت 812 شخصًا اختيروا عشوائيًّا وُجد أن 57% ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي؟
هامش خطأ المعاينة = ±0.0351، والفترة الممكنة تقع بين 60.51% ، 53.49%

7) أوجد الانحراف المعياري للبيانات في كل من a، b وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة

a)

[illegible]					
8	4	17	9	2	10
5	19	15	10	6	8

الانحراف المعياري = 4.88

b)

[illegible]					
9	10	5	4	10	7
3	4	4	6	5	11
9	3	5	8	7	12

عينة، الانحراف المعياري = 2.86

13

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

المحتوى الرياضي

التشتت في التوزيع الطبيعي

تقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن انحراف معياري واحد عن المتوسط، وتقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن انحرافين معياريين عن المتوسط، ويقع كذلك 99% تقريبًا من البيانات ضمن 3 انحرافات معيارية عن المتوسط، ويعود هذا إلى طريقة تعريف الانحراف المعياري.

إجابات:

8a) هامش خطأ المعاينة

$\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ قانون هامش خطأ المعاين

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5669}}$ n = 5669

$\approx \pm 0.0133$ بالتبسيط

8b) $0.31 + 0.0133 = 0.3233 \approx 32.3\%$

$0.31 - 0.0133 = 0.2967 \approx 29.7\%$

الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين أفادوا أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا تقع بين 29.7% و 32.3%

17) **اختبارات:** فيما يأتي درجات صف مكوّن من 50 طالبًا في اختبار من 25 درجة.

المتوسط لدرجات 50 طالبًا في اختبار من 25 درجة									
20.5	17.8	21.5	22.5	20.3	21.6	20.4	21.5	21.3	20.2
22.6	19.8	20.3	21.6	22.0	21.6	20.2	21.3	21.7	20.0
22.5	21.2	21.7	21.7	21.5	18.8	22.2	21.4	22.4	20.8
21.9	21.8	22.5	20.6	21.4	21.2	20.3	22.3	20.1	21.2
21.4	22.2	22.5	20.9	22.7	21.5	20.3	20.5	21.5	19.3

a) قارن بين المتوسط والوسيط للدرجات. انظر الهامش

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة. 1.02

c) على افتراض أن الدرجة 20.0 كانت خطأ، وتم تعديلها إلى 22.5 ، كيف يتأثر كل من المتوسط والوسيط بهذا التغيير؟ انظر الهامش

18) **مدارس:** يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب لكل معلم في مدارس إحدى المناطق التعليمية:

عدد الطلاب لكل معلم				
27	19	26	26	25
24	25	28	19	24
18	26	24	22	20
27	23	22	29	23
24	24	26	29	28
28	29	25	25	23

13a) المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات، ولا يوجد منوال وحيد.

a) ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لهذه البيانات؟ ولماذا؟

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقربه إلى أقرب جزء من مئة. 2.96

مسائل مهارات التفكير العليا

19) **مسألة مفتوحة:** أوجد بيانات في متغيّر واحد تهمك وحلّلها، ثم صف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت المناسبة لهذه البيانات. انظر الهامش

20) **تحدٍّ:** إذا أيد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة لنسبة أفراد المجتمع الكلي المؤيدة هي 64.8%-69.2%، فكم شخصًا تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟ 2066

21) **تبرير:** حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثّر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضّح ذلك. انظر الهامش

22) **تبرير:** عند إجراء تحويلات خطية على مجموعة بيانات فإن كل قيمة تزداد أو تنقص بالمقدار نفسه. إذا زيدت كل قيمة بمقدار 10، فكيف يؤثر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش

23) **اكتب:** قارن بذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتوسط والوسيط لمجموعة بيانات في متغيّر واحد. إجابة ممكنة : مع أن كلًّا من المتوسط والوسيط يمثل مركز البيانات، فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف البيانات، بينما يتأثر المتوسط بالقيم جميعها.

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة منحازة أو غير منحازة، وفسّر إجابتك. (الدرس 7-1)

24) قام باحث بإرسال استبانة إلى كل شخص تنتهي بطاقة الأحوال الخاصة به برقم معيّن. غير منحازة ؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

25) إيجاد أطوال أعضاء فريق كرة السلة لتحديد المتوسط الحسابي لأطوال طلاب المدرسة. انظر الهامش

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا. (الدرس 5-5)

26) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1, 1 \rangle$ 0، متعامدان

27) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ 32، غير متعامدين

28) $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -3, -5 \rangle$ −40، غير متعامدين

29) $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 2، غير متعامدين

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 6-2)

30) $(6, 11)$ $(12.53, 1.07), (-12.53, 4.21)$

31) $(-9, 2)$ $(9.22, 2.92), (-9.22, 6.06)$

32) $(3, 1)$ $(3.16, 0.32), (-3.16, 3.46)$

تدريب على اختبار

33) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثّر في الوسيط؟ D

A مضاعفة كل عدد
B زيادة كل عدد بمقدار 10
C زيادة القيمة الصغرى فقط
D زيادة القيمة الكبرى فقط

34) **درجات اختبار:** المتوسط لدرجات طلاب صف فيه c طالبًا هو 80، والمتوسط لدرجات طلاب صف فيه d طالبًا هو 85. وعندما تمّ حساب المتوسط للصفين معًا كان 82. ما النسبة $\frac{c}{d}$ ؟ C

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{3}{2}$ D $\frac{1}{3}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى بعض الطلاب حساب المدى والانحراف المعياري لمجموعات مختلفة من البيانات. واسألهم أن يقارنوا القيم ويبحثوا في مدى إمكانية إعطاء تعميم حول علاقة المدى بالانحراف المعياري . لمجموعة البيانات الكبيرة "المدى يعادل من أربع إلى ست مرات الانحراف المعياري"، وهذا يُعطي قاعدة سريعة لتقدير الانحراف المعياري من معرفة المدى دون المرور بحسابات معقّدة.

مع زيادة كل مفردة بالقيمة نفسها؛ حيث إن مقدار التباعد في القيم يبقى نفسه، فزيادة كل مفردة بمقدار ثابت لا تؤثّر في تباعد القيم الجديدة.

20) منحازة؛ لأن لاعبي كرة السلة في الغالب يكونون أطول من المعدل العام لأطوال طلاب المدرسة، لذلك لا تُمثّل أطوال لاعبي كرة السلة أطوال الطلاب.

إرشادات للمعلم الجديد

اختيار الآلة الحاسبة لكل من الآلة الحاسبة العلمية أو البيانية مفاتيح وتطبيقات تستعمل لحساب المتوسط، والوسيط، والانحراف المعياري، وتكلفة الآلة الحاسبة العلمية أقل من تكلفة الآلة الحاسبة البيانية؛ لذا اترك للطلاب حرية الاختيار بين الآلتين في هذا الدرس.

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم ما تعلموه عن الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة الذي تعلموه في الدرس 1-7 في التحليل الإحصائي.

إجابات:

14) إجابة ممكنة :

كتل طلاب الصف الثالث الثانوي (بالكيلو جرام)			
69	112	61	55
91	108	66	62
81	79	83	51
58	86	92	77

لا يوجد منوال، الوسيط = 78، والمتوسط 76.9375. والانحراف المعياري 18 تقريبًا.

16) إجابة ممكنة: عند حذف القيمة المتطرفة الكبيرة ستكون بقية القيم قريبة بعضها من بعض؛ لذا سينقص الانحراف المعياري وينقص المتوسط لبقية القيم أيضًا؛ لأن القيمة المتطرفة الكبيرة ترفعه إلى الأعلى.

17) إجابة ممكنة: سيزداد الوسيط كذلك بمقدار 10 ، فمثلًا إذا كان الوسيط لمجموعة بيانات يساوي 18، وزيدت كل مفردة بمقدار 10، فإن الوسيط يزداد بمقدار 10 ليصبح 28. ويزداد المتوسط أيضًا بمقدار 10؛ لأن البيانات جميعها زادت بالمقدار نفسه، فمثلًا المتوسط لمجموعة الأعداد 2, 2, 2, 2, 2 هو 2، إذا زيدت كل مفردة بمقدار 10 فإنها تصبح 12, 12, 12, 12, 12، ويصبح المتوسط للمجموعة الجديدة يساوي 12. أمّا الانحراف المعياري فإنه لا يتأثر

7-3 الاحتمال المشروط
Conditional Probability

فيما سبق:
درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه .

والآن:
- أجد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة .

المفردات:
الاحتمال المشروط
conditional probability
الجدول التوافقي
contingency table
التكرار النسبي
relative frequency

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يختبر هيثم دواءً يقي من الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تمّ إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تمّ إعطاء دواء شكلي (غير فعّال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء.
وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.

الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A، **احتمالًا مشروطًا**. ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A.

مفهوم أساسي **الاحتمال المشروط**

إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B، إذا عُلم أن الحادثة A قد وقعت يعرّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \ P(A) \neq 0$$

مثال 1 **الاحتمال المشروط**

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3 ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

توجد 6 نواتج ممكنة من إلقاء مكعب الأرقام مرةً واحدةً.
لتكن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر عددًا فرديًا.
ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 3.

$P(A) = \frac{1}{2}$ 3 نواتج ذات عدد فردي من بين 6 نواتج

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ واحد من النواتج الستة فردي ويُمثل العدد 3

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ احتمال وقوع الحادثة B علمًا بأن الحادثة A قد وقعت

$= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ $P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

احتمال ظهور العدد 3 علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو $\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟ $\frac{1}{3}$

7-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-7
حساب الاحتمالات.

الدرس 3-7
إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت.
استعمال الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.

ما بعد الدرس 3-7
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ماذا تُسمّى المجموعة التي تم إجراء المعالجة الحقيقية على أفرادها في هذه التجربة؟ المجموعة التجريبية
- ماذا تُسمّى المجموعة التي تم إجراء العلاج الشكلي على أفرادها؟ المجموعة الضابطة

الاحتمال المشروط

المثال 1 يبيّن كيفية إيجاد الاحتمال المشروط.

مصادر الدرس 3-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (100)	• تنويع التعليم ص (100, 102)	• تنويع التعليم ص (102)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 يحتوي كيس على 52 بطاقة، نصفها لونها أحمر، والنصف الأخر لونها أخضر، إذا كان نصف البطاقات الحمراء تحمل الرقم 1 ، والنصف الأخر يحمل الرقم 2 ، وكذلك الحال بالنسبة للبطاقات الخضراء، وسحب جميل بطاقة، فما احتمال أن تحمل الرقم 2 علمًا بأنها حمراء؟ $\frac{1}{2}$

الجداول التوافقية

المثالان 3 ,2 يبيّنان كيفية استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمالات المشروطة.

مثالان إضافيان

2 **جامعات:** أجريت دراسة وسجلت نتائجها في الجدول التالي. أوجد احتمال أن يخطط أحد المشمولين بالدراسة للالتحاق بالجامعة بعد الثانوية العامة علمًا بأنه أنثى.

الالتحاق بالجامعة	العدد	
	ذكور	إناث
نعم	342	376
لا	151	138

0.73 تقريبًا

3 **مثال على اختبار:** استعمل البيانات في المثال 3، وأوجد احتمال أن الطالب ليس ضمن المنتخب الوطني مع العلم بأنه في السنة الرابعة. D

A 16.6% **C** 50.4%

B 19.8% **D** 83.4%

الجداول التوافقية يتم في **الجداول التوافقية** تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا أو **تكرارًا نسبيًّا** منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

قراءة الرياضيات

الجداول التوافقية
تسمى الجداول التوافقية أيضًا جداول تكرارية ذات بُعدين.

مثال 2 من واقع الحياة — الجداول التوافقية

أدوية: أوجد احتمال بقاء الشخص معافى، علمًا بأنه استعمل الدواء التجريبي.

الحالة	عدد الاشخاص	
	استعمل الدواء التجريبي (D)	استعمل الدواء الشكلي (P)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

عدد الأشخاص الكلي في الدراسة 400 + 1200 + 800 + 1600 ويساوي 4000 شخص، ويراد إيجاد احتمال H علمًا بأن D قد وقع.

$P(H \mid D) = \frac{P(H \cap D)}{P(D)}$ قانون الاحتمال المشروط

$= \frac{800}{4000} \div \frac{2400}{4000}$ $\quad P(H \cap D) = \frac{800}{4000}$ ، $P(D) = \frac{1600+800}{4000}$

$= \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$ بالتبسيط

احتمال أن يكون الشخص معافى، شرط استعماله للدواء التجريبي هو $\frac{1}{3}$.

إرشادات للدراسة

حل مختصر
يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي: احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط استعماله للدواء التجريبي هو

$P(H \mid D) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال بقاء الشخص معافى، علمًا بأنه استعمل الدواء الشكلي. $\frac{1}{4}$

يمكن استعمال الجداول التوافقية لتمثيل أي عدد من الحالات الممكنة.

مثال 3 على اختبار

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الوطني(B)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الوطني(A)	269	262	276	257

A 11.5%

B 16.6%

C 13.0%

D 19.8%

اقرأ فقرة الاختبار

تريد معرفة احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني (B) علمًا بأنه في السنة الثالثة (T). مجموع الطلاب هو 1180 طالبًا.

حُلّ فقرة الاختبار

$P(B \mid T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)}$ قانون الاحتمال المشروط

$= \frac{36}{1180} \div \frac{312}{1180}$ $\quad P(B \cap T) = \frac{36}{1180}$ ، $P(T) = \frac{36+276}{1180}$

$\approx 11.5\%$

الجواب الصحيح A.

تحقق من فهمك

3) أوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الأولى. B

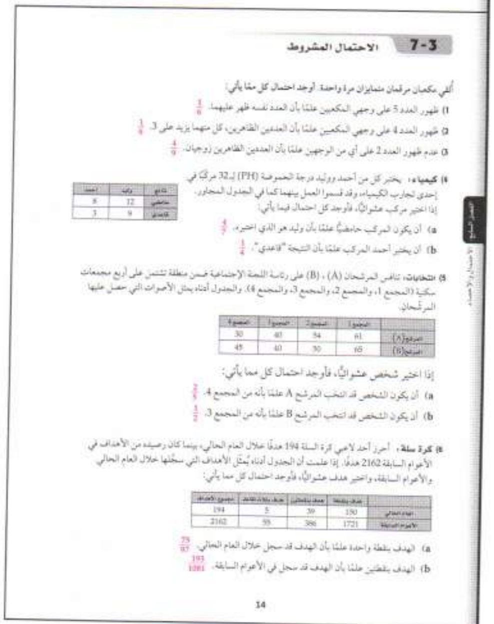
A 2.6% **B** 2.5% **C** 8.4% **D** 7.7%

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا فكّرت بأن بعض الطلاب سيستفيدون من استعمال المنظمات البيانية،

فاستعمل أشكال (فن) لمساعدتك على حساب الاحتمالات المشروطة من الجداول التوافقية؛ لإيجاد $P(B \mid A)$، ارسم الدائرتين المتقاطعتين اللتين تُمثّلان الحادثتين A , B . ثم اكتب العدد الذي يُمثّل منطقة التقاطع إضافة إلى الأعداد في كل من الحادثتين A , B واللتين تقعان خارج منطقة التقاطع. عندها يكون الاحتمال المطلوب $P(B \mid A)$ مساويًا العدد الذي يُمثّل التقاطع بين A , B مقسومًا على مجموع العددين المكتوبين داخل الدائرة التي تمثل الحادثة A.



تدرب وحل المسائل

حتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، و10 كرات صفراء، و6 كرات بيضاء، و5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا، أوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: (مثال 1)

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلم أنها ليست زرقاء. $\frac{5}{27}$

2) أن تكون حمراء، إذا عُلم أنها ليست خضراء. $\frac{1}{5}$

3) أن تكون صفراء، إذا عُلم أنها ليست حمراء وليست زرقاء. $\frac{10}{21}$

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلم أنها ليست حمراء. $\frac{11}{29}$

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء. 0

6) **فحص القيادة:** يوضح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: (مثال 2)

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا. $\frac{32}{41}$

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا. $\frac{2}{5}$

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح. $\frac{3}{7}$

7) **دروس التقوية:** سجّلت مدرسة أعداد طلاب الصفين الثاني المتوسط والثالث المتوسط المشتركين وغير المشتركين في دروس التقوية. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فأوجد احتمال كل ممّا يأتي:

	مشارك	غير مشارك
الثاني المتوسط	156	242
الثالث المتوسط	312	108

a) الطالب مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثاني المتوسط. 39.2% تقريبًا

b) الطالب غير مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثالث المتوسط. 25.7% تقريبًا

c) الطالب في الصف الثاني المتوسط علمًا بأنه غير مشارك. 69.1% تقريبًا

8) **اختيار من متعدد:** يُبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة. C (مثال 3)

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A 48.6% تقريبًا

B 77.6% تقريبًا

C 86.2% تقريبًا

D 91.6% تقريبًا

9) **اختيار من متعدد:** يقارن عادل وإبراهيم وسعود مجموعة أمثال شعبية جمعوها. وتم تمثيل ذلك وفق الجدول المجاور. إذا اختير مثل مما جمعوه عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون المثل اجتماعيًا، علمًا بأنه ليس مما جمعه عادل. D

	فكاهي	اجتماعي	خليط
عادل	521	316	44
إبراهيم	119	145	302
سعود	244	4	182

A 35.9% تقريبًا

B 24.8% تقريبًا

C 17.2% تقريبًا

D 15.0% تقريبًا

إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرةً واحدة، فأجب عمّا يأتي:

10) ما احتمال ظهور شعارين، علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟ $\frac{2}{5}$

11) ما احتمال ظهور 3 كتابات علمًا بوجود شعار واحد على الأقل؟ $\frac{4}{15}$

12) ما احتمال عدم ظهور أي شعار علمًا بأنه توجد كتابة واحدة على الأقل؟ $\frac{1}{15}$

13) ما احتمال عدم ظهور أي كتابة علمًا بأنه يوجد 3 شعارات على الأقل؟ $\frac{1}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم مخطّط الرسم الشجري على السبورة التفاعلية؛ لتوضّح للطلاب كيفية إيجاد الاحتمال المشروط. واحتفظ بعملك وأرسل المخطط إلى الطلاب؛ ليكون مرجعًا لهم.

المحتوى الرياضي

الاحتمال المشروط إذا تغيّر احتمال الحادثة B عند وقوع الحادثة A، فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط مع الحادثة B. إن وقوع الحادثة A يُنظَرُ إليه وكأنه قلّص فضاء العينة إلى الحادثة B.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–9، 13–15، 17–26
ضمن المتوسط	1–15 فردي، 17–26
فوق المتوسط	9–26

4 التقويم

بطاقة مكافأة ضع جدولًا توافقيًّا على السبورة، يتم من خلاله مقارنة الذين يرتدون أثوابًا بيضاء بالذين يرتدون أثوابًا بألوان أخرى، مع خاصية أخرى مثل الرياضة المدرسية التي يشاركون فيها، أو النادي العلمي الذي ينتمون إليه. واطلب إليهم كتابة احتمالات مشروطة معتمدين على هذا الجدول التوافقي.

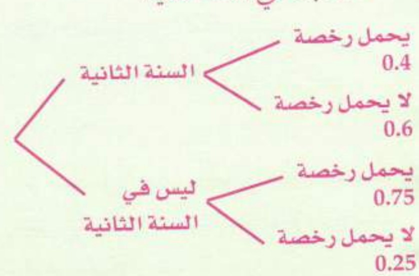
إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ذكّر الطلاب باستعمال خاصية الإبدال وخاصية التجميع والبحث عن أزواج من الأعداد، تجعل العمليات الحسابية أسهل.

إجابات:

17) إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان A و B مستقلتين، فإن احتمال حدوث إحداهما لا يؤثّر في حدوث الأخرى. فمثلًا: إلقاء حجر النرد لا يؤثّر في سحب بطاقة. فاحتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 من بين بطاقات مرقمة علمًا بأن الرقم 3 ظهر على حجر النرد يكافئ احتمال سحب الرقم 3 من البطاقات فقط. أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وعندما تكون الحادثتان غير مستقلتين يطبق الاحتمال المشروط. فمثلًا: احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 دون إرجاع يؤثّر في احتمال سحب بطاقة أخرى، حيث يقل فضاء العينة.

18) إجابة ممكنة: الفروع الأخيرة تُمثّل الاحتمال المشروط. فمثلًا: 0.4 تمثل احتمال أن يحمل طالب رخصة قيادة علمًا بأنه في السنة الثانية.



20) إجابة ممكنة:

الصف	هندسة	طب
سنة أولى	6	9
سنة ثانية	8	5

احتمال أن يكون من كلية الطب علمًا بأنه في السنة الجامعية الأولى، $\frac{3}{5}$

14) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تحمل البطاقة الرقم 9 علمًا بأنها حمراء اللون؟ $\frac{1}{13}$

15) يبين الجدول أدناه أعداد الألعاب الالكترونية الموجودة لدى شخص. إذا اختيرت لعبة عشوائيًّا فأوجد كلًّا من الاحتمالين الآتيين:

اللعبة	العدد
كرة قدم	5
كرة سلة	2
مصارعة	6
سباق سيارات	4
أخرى	3

a) أن تكون من ألعاب المصارعة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم. $\frac{2}{5}$

b) أن تكون من ألعاب سباق السيارات علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة السلة وليست من ألعاب المصارعة. $\frac{1}{3}$

مسائل مهارات التفكير العليا

16) **تحدٍّ:** ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس. 0.013% تقريبًا

17) **اكتب:** فسّر الاختلاف بين الاحتمال المشروط لحوادث غير مستقلة، والاحتمال المشروط لحوادث مستقلة. أعطِ مثالًا لكل نوع. انظر الهامش

18) **تبرير:** أي فروع مخطّط الرسم الشجري يُمثّل الاحتمال المشروط؟ ارسم مخطط الرسم الشجري، واشرح وجهة نظرك. انظر الهامش

19) **تبرير:** إذا رُميت قطعة نقد بشكل حر 20 مرة وظهرت في كل مرة صورة، فما احتمال أن تظهر الصورة في الرمية 21؟ وضح تبريرك. إجابة ممكنة: 50% ؛ ليس للرميات السابقة تأثير في الرمية 21، فهي حوادث مستقلة.

20) **مسألة مفتوحة:** كوّن جدولًا توافقيًّا، واحسب احتمالًا مشروطًا يرتبط بالجدول. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

21) استعمل مسطرة ومنقلة، لرسم متجه يمثل $\mathbf{v} = 20\,km/h$، باتجاه $60°$ مع الأفقي. (الدرس 5-1) انظر الهامش

22) **ثقافة مالية:** يوضّح الجدول أدناه دخل 12 شركة في الأسبوع الأول من شهر محرم عام 1433هـ بالريال. (الدرس 2-7)

الدخل لكل شركة بالريال		
25778	25698	25200
23858	25580	27828
29173	22861	32903
27870	27124	23995

a) أوجد كلًّا من المتوسط الحسابي والوسيط. المتوسط 26489 ريالًا، والوسيط 25738

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة. 2736.46 ريالًا

c) لنفترض أن تقريرًا عن الشركات المذكورة ذكر أن القيمة 22861 ريالًا كانت خطأ، وهي في الحقيقة 24861. فكيف يتأثر كل من المتوسط والوسيط بهذا التعديل؟ يزداد المتوسط ليصل إلى 26655.67 ويبقى الوسيط كما هو

حدّد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة منحازة، أو غير منحازة. وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7) انظر الهامش

23) دراسة مسحية تتناول موظفي مطعم، لتقرر أكثر الأطباق شعبية.

24) دراسة مسحية تتناول رأي مرتادي مكاتب البريد، لمعرفة أكثر ألوان السيارات شيوعًا. غير منحازة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة فرصة متساوية لأن يكون ضمن عينة الدراسة التي استطلعت آراؤهم.

تدريب على اختبار

25) إذا كانت A, B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.4$، فما قيمة $P(A \mid B)$؟ A

A 0.6

B 0.7

C 0.8

D 0.9

26) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟ $\frac{1}{2}$

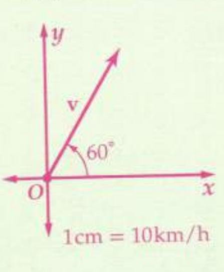
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يمكن إيجاد احتمال وقوع الحادثتين A, B معًا بضرب احتمال كل منهما، إذا كانتا مستقلتين. ولكن إذا لم تكونا مستقلتين فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط لأحدهما، حيث إن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. استعمل هذا القانون لإيجاد احتمال سحب بطاقتين دون إرجاع الأولى تحمل الرقم 5، والثانية تحمل الرقم 6، من 52 بطاقة مقسمة إلى أربعة مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13.. $\frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663} \approx 0.006$

23) منحازة ؛ لأن الأشخاص الذين تم مسح رأيهم قد يظنون أن الأطباق التي يقدمها المطعم هي الأكثر شعبية.

21) إجابة ممكنة:



الفصل 7 اختبار منتصف الفصل
الدروس من 7-1 إلى 7-3

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة منحازة أو غير منحازة، وفسّر إجابتك. (الدرس 7-1) 1–3) انظر الهامش

1) يتم اختيار كل ثاني شخص يخرج من مجمع تجاري يبيع بالجملة؛ لمعرفة عدد الأطفال لديه.

2) يتم اختيار كل عاشر شخص في شركة؛ لمعرفة رأي الموظفين في عملهم.

3) سؤال كل ثاني طالب في مدرسة؛ لمعرفة المعلم المثالي.

4) **اختيار من متعدد:** حدّد أيًّا من العبارات الآتية توضح السببية: (الدرس 7-1) D

A إذا تدرّبت كل يوم، فستصبح لاعبًا محترفًا في كرة السلة.

B إذا قرأت كتابك المقرر، فستنجح في الاختبار.

C إذا تقدّمت لعشر وظائف مختلفة، فستتلقى عرضًا من واحدة على الأقل.

D إذا وقفت بالخارج تحت المطر من دون مظلة، فإنك ستبتل.

حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثّل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم اذكر إن كانت منحازة أو لا: (الدرس 7-1)

5) اختر 250 طالبًا في المرحلة المتوسطة نصفهم من المدارس الأهلية، وقارن بين عاداتهم الدراسية. دراسة بالملاحظة

6) خَصص لنصف الموظفين الذين اختيروا بطريقة عشوائية ساعة لتناول الغداء، وقارن اتجاهاتهم نحو العمل مع بقية زملائهم. انظر الهامش

7) أي مقاييس النزعة المركزية تناسب بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (الدرس 7-2) انظر الهامش

عدد سنوات الخبرة						
2	2	3	2	4	1	2
2	3	1	3	4	2	1
3	2	3	2	3	1	4
2	3	4	1	1	1	0
1	2	1	2	2	2	3

8) يحاول باحث أن يحدد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح الكهربائية على أزهار للزينة المنزلية، حيث قام بتعريض مجموعة من الأزهار لإضاءة المصابيح الجديدة، ومجموعة أخرى لإضاءة المصابيح العادية. ويبيّن الجدول أدناه أعداد الأزهار التي عاشت أو ماتت في المجموعتين.

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	17
ماتت	6	13

إذا اختيرت زهرة منها عشوائيًا، فما احتمال: (الدرس 7-3)

a) أن تكون من الأزهار التي تعرضت لإضاءة المصابيح الجديدة علمًا بأنها عاشت؟ $\frac{24}{41}$

b) أن تكون من الأزهار التي عاشت علمًا بأنها تعرضت لإضاءة المصابيح العادية؟ $\frac{17}{30}$

إذا ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي: (الدرس 7-3)

9) ظهور عدد فردي علمًا بأن العدد الظاهر أكبر من 3. $\frac{1}{3}$

10) ظهور العدد 4 علمًا بأن العدد الظاهر كان زوجيًا. $\frac{1}{3}$

11) **اختيار من متعدد:** في القرص ذي المؤشر الدوار المقسم إلى (16) قطاعًا متطابقًا، ومرقمة بالأعداد 16—1 . ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي، إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3؟ D

A $\frac{13}{16}$

B $\frac{8}{16}$

C $\frac{8}{13}$

D $\frac{6}{13}$

الدروس من 7-1 إلى 7-3

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

إجابات:

1) منحازة؛ لأن الذين تم استطلاع آرائهم يكون لديهم أطفال أكثر من غيرهم في العادة.

2) غير متحيزة؛ كل شخص في الشركة له الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

3) غير متحيزة؛ طلاب المدرسة جميعهم يشكلّون مجتمعًا عامًّا، وكل طالب له الفرصة نفسها أن يكون في العينة.

6) دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي النصف الذي حصل على ساعة لتناول الغداء. والدراسة منحازة؛ لأن كل فرد يعرف إلى أي مجموعة ينتمي.

7) المتوسط، لا يوجد قيم متطرّفة في البيانات.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-3 ,7-2 ,7-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		

7-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-4

إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت.

الدرس 7-4

إيجاد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.

تكوين تمثيلات بيانية للتوزيعات الاحتمالية واستعمالها.

ما بعد الدرس 7-4

تكوين تمثيل بياني لتوزيع ذات الحدين واستعماله.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- بكم طريقة يمكنك اختيار 3 أشخاص من بين 8 أشخاص؟ 56
- بكم طريقة يمكنك اختيار 4 أشخاص من بين 18 شخصًا؟ 3060

الاحتمال

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال التوافيق في إيجاد الاحتمالات.

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية
Probability and Probability Distributions

فيما سبق:

درست حل مسائل تتضمن استعمال التباديل والتوافيق.

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أكوّن رسومًا بيانية للتوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات:

- الاحتمال probability
- النجاح success
- الفشل failure
- فضاء العينة sample space
- المتغير العشوائي random variable
- المتغير العشوائي المنفصل discrete random variable
- التوزيع الاحتمالي المنفصل discrete probability distribution
- الاحتمال النظري theoretical probability
- الاحتمال التجريبي experimental probability
- القيمة المتوقعة expected value

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشترط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معيّنة **احتمالًا**. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمّى **نجاحًا**، وعدم وقوعه يُسمّى **فشلًا**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمّى **فضاء العينة**. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

مفهوم أساسي — احتمال النجاح والفشل

التعبير اللفظي إذا كان عدد مرات النجاح لوقوع حادثة s من المرات، وعدد مرات الفشل في وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يكتب على النحو $P(S)$، كما يكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالعلاقتين الآتيتين:

الرموز $P(S) = \frac{s}{s+f}$ ، $P(F) = \frac{f}{s+f}$

مثال 1 — الاحتمال باستعمال التوافيق

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين في اليوم الأول، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

$_{12}C_3$ اختيار 3 طلاب من بين 12 طالبًا من الصف الثاني

$_{16}C_3$ اختيار 3 طلاب من بين 16 طالبًا من الصف الأول

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s.

$$_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد الإمكانات (عدد عناصر فضاء العينة)، $s+f$.

$$s+f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!\,6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

P(فوز 3 من الأول و3 من الثاني) $= \frac{s}{s+f}$ احتمال النجاح

$= \frac{123200}{376740}$ $s = 123200,\ s+f = 376740$

≈ 0.327016 باستعمال الآلة الحاسبة

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و3 من الصف الثاني هو 0.327016 تقريبًا أو 33%.

مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (105)	• تنويع التعليم ص (105)	• تنويع التعليم ص (105, 108)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)

الاحتمال باستعمال التباديل

المثال 2 يبيّن كيفية استعمال التباديل في إيجاد الاحتمالات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 لدى بثينة 26 كتابًا، منها 16 قصة والبقية كتب أخرى، إذا أخذت معها في رحلة 8 كتب اختارتها بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون بين هذه الكتب 4 قصص، و4 كتب أخرى؟ 0.24464 تقريبًا أو 24.5%

2 اختارت عائشة التي تدرس في الجامعة المساقات الآتية: (لغة إنجليزية، لغة عربية، علوم، فقه، أصول الدين). إذا حدّد البرنامج عشوائيًا ترتيب هذه المساقات، وكان لهذه المساقات الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم، فما احتمال أن يكون أول درسين لعائشة هما اللغة العربية، وأصول الدين مهما كان ترتيب هذين المساقين؟ $\frac{1}{10}$

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رشحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟ 16.5%

مراجعة المفردات

التباديل والتوافيق
عند ترتيب مجموعة من الأشخاص أو الأشياء في ترتيب معيّن، فإن الترتيب يُسمّى تبديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإنها تُسمّى توفيقًا.

مثال 2 من واقع الحياة — الاحتمال باستعمال التباديل

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A, B, C, D, E, F ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E, F أخيرًا.

الخطوة 1 حدد عدد النجاحات.

يتصل A أولًا ثم يتصل B ثانيًا بطريقة واحدة.

$_3P_3$ يتصل كل من D, E, F في الأخير.

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$s = 1 \cdot {_3P_3} = 1 \cdot 3! = 6$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة $s + f$.

$s + f = {_6P_6} = 6! = 720$ ، وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$P(S) = \frac{s}{s+f}$ احتمال النجاح

$= \frac{6}{720}$ $s = 6, s + f = 720$

≈ 0.0083 باستعمال الآلة الحاسبة

الاحتمال المطلوب 0.8% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) **سباق:** اشترك صلاح، وعبد اللّه، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟ $\frac{1}{56}$ أو 2% تقريبًا

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة **متغيرًا عشوائيًا**. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيرًا عشوائيًا منفصلًا**.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو جدول، أو معادلة، أو تمثيل بياني يربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل X، مع احتمال وقوعها. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$.

إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلًا أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

فعند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو $\{TT, TL, LT, LL\}$، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم $0, 1, 2$. ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانيًا كما يأتي:

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون لقد نشأ علم الاحتمال في بداياته من المقامرة. ومع أن هذه الفكرة غير مقبولة في التربية الإسلامية، إلّا أن استعمال هذا العلم في الوقت الحاضر، هو في مجالات كثيرة وذات فائدة، مثل مجال الطب ومجال الأرصاد الجوية.

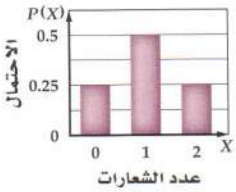
قراءة الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1.

$P(0) = \frac{1}{4}$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{4}$

يُبيّن الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

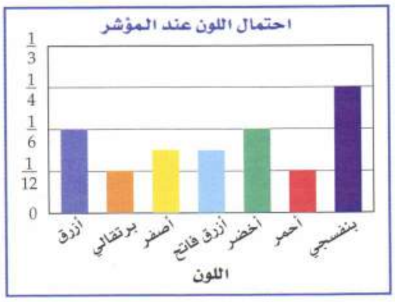
عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



مثال 3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

يوضح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًّا، حيث يمكن أن يتوقف المؤشر على أيٍّ من المناطق الملونة (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

a) كوّن تمثيلًا بالأعمدة لهذا التوزيع الاحتمالي.



b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده ثم أوجد احتماله.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

c) أوجد P (أخضر أو أزرق).

احتمال التوقف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

ألقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

3A) كوّن جدولًا للتوزيع الاحتمالي، ومثّله بيانيًّا بالأعمدة. انظر الهامش

3B) ما الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ أوجد احتماله. $7, \frac{1}{6}$

3C) أوجد P(5 أو 11). $\frac{1}{6}$

إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. **والقيمة المتوقعة أو التوقع** $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي، وينتج هذا المتوسط من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.

الاحتمال

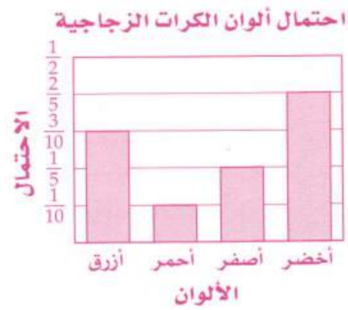
المثال 3 يبيّن كيفية استعمال التمثيل البياني والجدول لتوضيح التوزيع الاحتمالي.

مثال إضافي

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية، منها 3 زرقاء، وواحدة حمراء، وكرتان صفراوان، و 4 كرات خضراء. إذا سحبت كرة عشوائيًّا، فأجب عما يأتي:

a) كون جدولًا للتوزيع الاحتمالي، ثم مثّله بيانيًّا بالأعمدة.

اللون	أزرق	أحمر	أصفر	أخضر
الاحتمال	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$



b) استعمل التمثيل البياني؛ لتُحدّد أي ناتج يكون له أكبر إمكانية؟ وما احتماله. الأخضر، $\frac{2}{5}$

c) ما احتمال سحب كرة حمراء أو زرقاء؟ $\frac{2}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

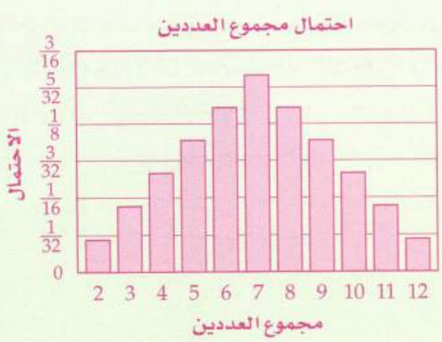
الكاميرا التوثيقية حدد طالبين ليحلا مثالًا أمام طلاب الفصل، اطلب إلى أحدهما أن يكوّن تمثيلًا بالأعمدة للتوزيع الاحتمالي، واطلب إلى الآخر أن يبيّن كيفية إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي.

إجابة (تحقق من فهمك):

3A)

المجموع	2	3	4	5	6	7
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$

المجموع	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$



إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة
ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقترب الاحتمال التجريبي من القيمة المتوقعة.

مثال 4 القيمة المتوقعة

أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$ بالتعويض في قانون المتوسط الموزون

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$ بالضرب

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$ بالجمع

تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. 7

تدرب وحل المسائل

1) **فن:** اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف. (مثال 1) 13.9% تقريبًا

2) دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب؟ (مثال 2) $\frac{1}{1680}$ أو 0.06% تقريبًا

3) **مختبر:** دخلت طالبات الصف الثالث الثانوي وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة. إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عند الدخول عشوائيًا، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات دخلن المختبر هن جميلة، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟ $\frac{1}{15600}$

4) **أخبار:** أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. (مثال 3)

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

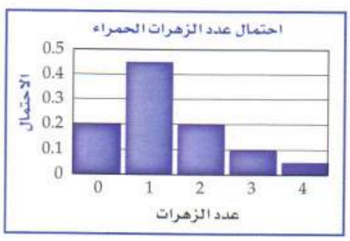
a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا. انظر الهامش

b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟ 30% أو 0.3

c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش

5) **جوائز:** باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات، وأجري سحب عشوائي على أرقام التذاكر خصصت فيه ثلاث جوائز للأرقام الرابحة، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالًا. إذا اشترى شخص تذكرة، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟ (مثال 4) 2.9

6) **أزهار:** يوضّح التمثيل البياني أدناه عدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور.



a) أوجد $P(R = 0)$. $\frac{1}{5}$ أو 20%

b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟ 35%

القيمة المتوقعة

المثال 4 يبين كيفية إيجاد القيمة المتوقّعة لتوزيع احتمالي.

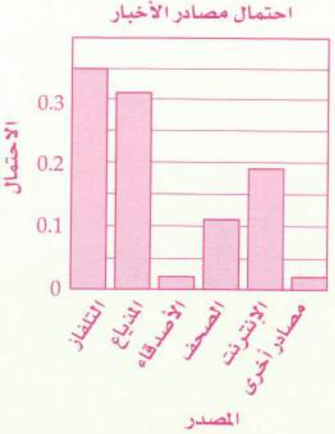
مثال إضافي

4) هرم ثلاثي منتظم أوجهه الأربعة متطابقة ومرقّمة بالأعداد 4 ,3 ,2 ,1. أوجد القيمة المتوقعة عند إلقاء الهرم مرة واحدة. $\frac{5}{2}$ أو 2.5

إجابات:

4a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي يقع بين 0,1 ومجموعها يساوي 1؛ $0.35 + 0.31 + 0.02 + 0.11 + 0.19 + 0.02 = 1$

4c)



تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	5–1، 10–8، 22–12
ضمن المتوسط	13–1 فردي، 22–15
فوق المتوسط	22–8

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5-1 للتأكد من فهم الطلاب

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

7) **تبرُّعات:** قام طلاب الصف الثالث المتوسط في مدرسة بجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة. ولقد أحصى الطلاب أنواع المواد المقدمة كما في الجدول أدناه.

التبرع بالأطعمة	
النوع	عدد الطرود
وجبات طعام	36
أرز	22
سكر	12
قمح	45

a) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًا على القمح. $\frac{9}{23}$ أو 39.1% تقريبًا

b) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًا على وجبة طعام أو أرز. $\frac{58}{115}$ أو 50.4 تقريبًا

8) **جوائز:** تنافس 50 متسابقًا منهم جاسم وجلال وعلي في سحب عشوائي على أربع جوائز. ما احتمال أن يربح اثنان من الأسماء الثلاثة المشاركة؟ $\frac{69}{4900}$ أو 1.4% تقريبًا

9) **ألعاب رياضية:** اختار معلم التربية الرياضية 5 طلاب عشوائيًا من بين الطلاب البالغ عددهم 124 طالبًا ليساعدوه على تطبيق بعض الألعاب. ما احتمال أن يختار واحدًا على الأقل من بين عشرة أقارب له يجلسون مع الطلاب؟ 34.8% تقريبًا

10) **درجات:** أجري اختبار في الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، والجدول أدناه يُبين نتائج هذا الاختبار.

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

a) بيّن أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًا. انظر الهامش

b) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًا، فما احتمال أن يكون تقديره B؟ 0.43

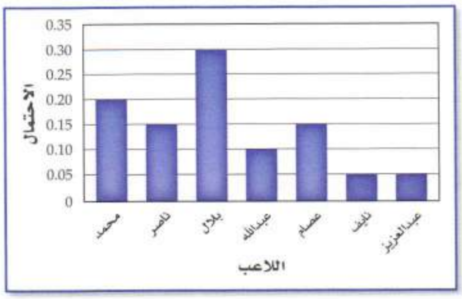
c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش

11) **كرات زجاجية:** لدى شعبان 35 كرة زجاجية؛ 8 منها سوداء، و 12 حمراء، و 9 خضراء، والبقية بيضاء. فإذا سحب كرتين معًا عشوائيًا.

a) ما الناتج ذو الإمكانية الأقل للوقوع؟ كرتان من اللون الأبيض

b) أوجد P(إحداهما سوداء والأخرى خضراء). 12% تقريبًا

12) **مسابقات:** يُبيّن التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل طالب جائزة.



a) من لديه الفرصة الأكبر للربح؟ وما احتمال ربحه جائزة؟ بلال، 30%

b) أيهما له فرصة أكبر للربح ناصر أم محمد؟ محمد

c) أوجد P(ربح محمد أو بلال). 50%

13) **أمطار:** التوزيع الاحتمالي أدناه يوضح عدد الأيام الممطرة في السنة في إحدى الدول. أوجد القيمة المتوقعة لعدد الأيام الممطرة. انظر الهامش

عدد الأيام الممطرة في السنة									
عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

14) **بطاقات:** رُقمت مجموعة بطاقات على النحو الآتي: 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 8، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منهما بالعدد 10، و 4 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 6، و 3 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 5، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منها بالرقم 2، وبطاقة تمّ ترقيمها بالرقم 3. إذا سُحبت من هذه البطاقات واحدة عشوائيًا، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟ 6

4 التقويم

علم لاحق اسأل الطلاب كيف يعتقدون أن الدرس الحالي في التوزيعات الاحتمالية، يساعدهم على دراسة التوزيع الطبيعي في الدرس الآتي.

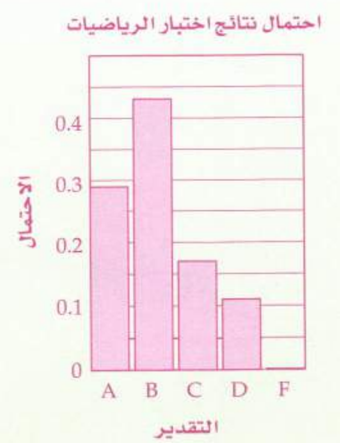
تنبيه!

اكتشف الخطأ اسأل الطلاب في السؤال 15، ما النواتج التي يكون المجموع في كل منها 10, 9, 8, 7, 6, 5؟

إجابات:

10a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي يقع بين 0,1 ومجموعها يساوي 1؛
$0.29 + 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 1$

10c)



تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب الأعداد 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1 على 8 قطع ورق، واخلطها وضعها في كيس ورقي، واطلب إلى الطلاب تكوين توزيع احتمالي للعدد الناتج من سحب قطعة ورق من الكيس عشوائيًا. اجعلهم يتبادلون الأدوار في السحب مع الإرجاع، وقارن التكرار النسبي مع الاحتمال النظري.

الاحتمالات هي $P(1) = \frac{3}{8}, P(2) = \frac{1}{4}, P(3) = \frac{1}{8}, P(4) = \frac{1}{4}$.

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

1) **بالونات:** يحتوي كيس على بالونة خضراء، و 4 بالونات حمراء، و 5 بالونات صفراء. إذا سُحبت منه بالونتان عشوائيًّا، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) P(البالونتان حمراوان) $\frac{2}{15}$ b) P(بالونة حمراء والأخرى صفراء) $\frac{4}{9}$ c) P(بالونة صفراء والأخرى خضراء) $\frac{1}{9}$

d) P(البالونتان خضراوان) 0 e) P(بالونتان حمراوان وبالونة صفراء) 0 f) P(بالونة حمراء والأخرى خضراء) $\frac{4}{45}$

2) **نقود:** يحتوي صندوق على 3 أوراق نقدية من فئة الريال، و 8 أوراق من فئة 5 ريالات، و 4 أوراق من فئة 10 ريالات، و 10 أوراق من فئة 20 ريالًا. إذا سُحبت ورقتان بصورة عشوائية، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) P(الورقتان من فئة الريال) $\frac{1}{100}$

b) P(الورقتان من فئة 10 ريالات) $\frac{1}{50}$

c) P(ورقة من فئة 5 ريالات، وأخرى من فئة 10 ريالات) $\frac{8}{75}$

d) P(ورقتان من فئة 10 ريالات، وأخرى من فئة 20 ريالًا) 0

3) **ورق الجدران:** زار جاسم معرض ورق الجدران ليشتري ورقًا لمنزله الجديد، ووجد لدى المعرض 28 كتابًا يحتوون على عينات ورق الجدران، منها 10 كتب لعينات تخطيط ورسوم، و 18 كتابًا لعينات مناظر طبيعية. إذا سمح المعرض لجاسم أن يصطحب معه 4 كتب إلى البيت لينتقي منها، فاختار 4 كتب عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الكتب جميعها من كتب التخطيط والرسم؟ $\frac{2}{195}$

4) **اتصالات:** استعمل الجدول أدناه الذي يُبيّن التوزيع الاحتمالي لعدد الهواتف النقالة في منزل كل طالب من طلاب مدرسة.

X عدد الهواتف النقالة	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.01	0.16	0.34	0.39	0.10

a) بيّن أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًّا. الاحتمالات جميعها محصورة بين صفر وواحد، ومجموع الاحتمالات يساوي $1 = 0.01 + 0.16 + 0.34 + 0.39 + 0.10$

b) إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون في منزله أكثر من 3 هواتف؟ 0.49

c) مثّل البيانات بالأعمدة.

15

إجابات:

13) $E(x) = (0 \cdot 0.1) + (1 \cdot 0.1) + (2 \cdot 0.15) + (3 \cdot 0.15) + (4 \cdot 0.25) + (5 \cdot 0.1) + (6 \cdot 0.08) + (7 \cdot 0.05) + (8 \cdot 0.02)$
$= 0 + 0.1 + 0.3 + 0.45 + 1 + 0.5 + 0.48 + 0.35 + 0.16$
$= 3.34$ أيام ممطرة

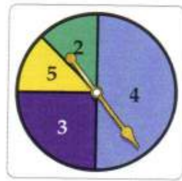
15) إجابة ممكنة: فاطمة؛ زينب لم تأخذ بالاعتبار كل الاحتمالات فمثلًا عند حساب أن يكون المجموع 5 فقد أخذت بعين الاعتبار وقوف المؤشر على الرقم 3 ثم 2 ولم تأخذ بعين الاعتبار وقوفه على 2 ثم 3.

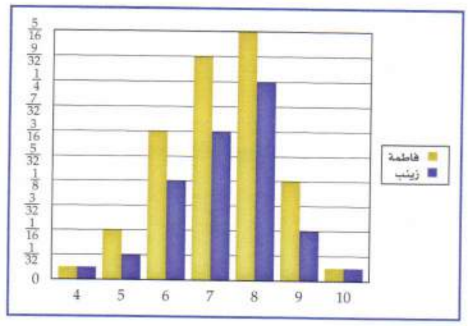
17) إجابة ممكنة: القرص الدوار المكوّن من 5 مناطق متطابقة مظللة بالألوان وهي الأحمر، والأزرق، والأصفر، والأخضر، والبني.

اللون	بني	أخضر	أصفر	أزرق	أ
الاحتمال	0.2	0.2	0.2	0.2	

مسائل مهارات التفكير العليا

15) **اكتشف الخطأ:** كونت كلٌّ من فاطمة، وزينب توزيعًا احتماليًّا باستعمال التمثيل بالأعمدة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعدُّ تمثيلها صحيحًا؟ فسر إجابتك. انظر الهامش



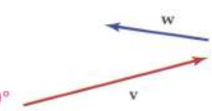


16) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برِّر إجابتك. إجابة ممكنة: غير صحيحة أبدًا؛ يبنى الاحتمال التجريبي على التجارب، بينما يُبنى الاحتمال النظري على الطرق الرياضية والافتراضات.

17) **مسألة مفتوحة:** كوِّن توزيعًا احتماليًّا منفصلًا فيه 5 نواتج مع تحديد احتمال كل منها. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

18) أوجد محصلة المتجهين أدناه مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهه بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-5)



1.7cm, 39°

19) اكتب المعادلة $r = 12\cos\theta$ على الصورة الديكارتية. (الدرس 2-6) $x^2 + y^2 - 12x = 0$

20) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى حمراء. (الدرس 3-7) $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار

21) يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء، و 4 كرات خضراء، وكرتين زرقاوين. ما احتمال سحب كرة ليست صفراء؟ D

A $\frac{1}{8}$

B $\frac{3}{8}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{5}{8}$

22) إذا علمت أن كلًّا من x, y عدد موجب، فأي العبارات التالية تكافئ $\frac{(5^x)^y}{5^x}$؟ D

A y

B 5^{xy-1}

C $5y$

D 5^{xy-x}

7-5 التوزيع الطبيعي
The Normal Distribution

فيما سبق:
درست التوزيعات الاحتمالية.

والآن:
- أحدد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزعة طبيعيًا أو ملتوية.
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

المفردات:
التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution

التوزيع الطبيعي
normal distribution

التوزيع الملتوي
skewed distribution

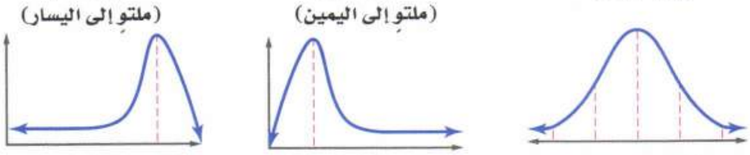
www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تتراوح قوة الدم (الهيموجلوبين) الطبيعية عند الرجال البالغين في العالم بين 13 إلى 18 جرام/ ديسيلتر.

التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيعات الاحتمالية المتصلة**، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.

مفهوم أساسي — خصائص التوزيع الطبيعي
- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل بالنسبة للمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

مع أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.



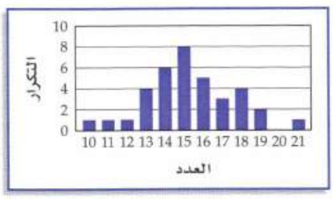
شكل جرس ومتماثل — التوزيع مكثّف في اليسار والذيل إلى اليمين — التوزيع مكثّف في اليمين والذيل إلى اليسار

مثال 1 تصنيف بيانات التوزيع
حدد ما إذا كانت البيانات الآتية تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًا:

(a

13	14	16	19	18	16	18	15	16	14	14	15	15	13	15	13	12	10
17	15	15	14	21	14	15	13	18	17	19	11	17	18	14	15	16	16

استعمل الجدول التكراري؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة.
وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزعة توزيعًا طبيعيًا.



7-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز
الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-5
تحليل التوزيعات الاحتمالية.

الدرس 7-5
تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزعة توزيعًا طبيعيًا أو ملتوية.
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

ما بعد الدرس 7-5
إيجاد الاحتمالات لتجارب ذات الحدين.

2 التدريس
أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
اسأل:
هل تتوقع أن نسبة الرجال البالغين الذين تكون قوة الدم لديهم أكثر من 17 جرام/ ديسيلتر كبيرة أم لا؟ لا

هل تتوقع أن نسبة الرجال البالغين الذين تكون قوة الدم لديهم في الفترة من 14 إلى 17 جرام/ ديسيلتر كبيرة أم لا؟ وكم تقدر هذه النسبة؟ نعم، تختلف الإجابات.

التوزيعات الطبيعية والملتوية
مثال 1 يبيّن كيفية استعمال التمثيل بالأعمدة لتحديد ما إذا كانت البيانات ملتوية أو موزّعة توزيعًا طبيعيًا.

مصادر الدرس 7-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (112)	• تنويع التعليم ص (112)	• تنويع التعليم ص (114)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)

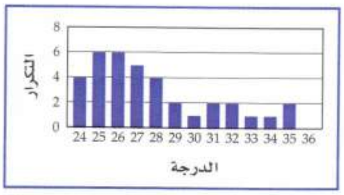
إرشادات للدراسة

منفصل، مقابل، متصل
يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون الاحتمال عند النقطة الواحدة صفرًا.

(b

26	28	26	25	27	28	24	31	30	28	26	26	27	25	33	35	24	24
25	27	26	25	25	27	28	29	34	32	29	27	26	24	35	31	32	25

استعمل الجدول التكراري لتمثيل البيانات بالأعمدة، وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).



تحقق من فهمك التواء موجب

1) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًّا.

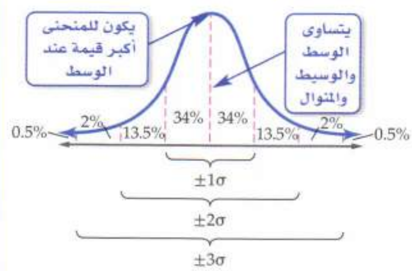
قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

القانون التجريبي يصف القانون التجريبي خصائص أخرى للتوزيع الطبيعي.

مفهوم أساسي — القانون التجريبي

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - \sigma, \mu + \sigma$.
- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$.
- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$.



إرشادات للدراسة

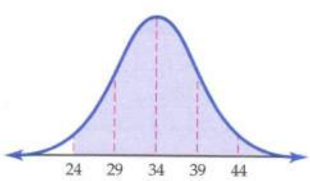
التوزيع الطبيعي
في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا ليكون التوزيع طبيعيًّا تقريبًا.

مثال 2 — التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ x عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24 (أي أوجد $P(x > 24)$).

$\mu = 34, \sigma = 5$

احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا أكبر من $\mu - 2\sigma$، أي أكبر من $24 = 34 - 2(5)$، هي المنطقة المظللة في الشكل تحت المنحنى الطبيعي.



$$P(x > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\%$$
$$= 97.5\%$$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49. 99.5%

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت البيانات في كل ممّا يأتي، تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا:

a) 31, 37, 35, 36, 34, 36, 32, 36, 34, 35, 33, 33, 33, 32, 34, 34, 35, 34
قريب من التوزيع الطبيعي

b) 14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15 التواء سالب

القانون التجريبي

المثالان 3 ,2 يبينان كيفية استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات لقيم متغيّر عشوائي في التوزيع الطبيعي.

مثال إضافي

2 تتوزع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66، وانحراف معياري 11. أوجد احتمال اختيار قيمة لـ x عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 44، أي أوجد $p(x<44)$. 2.5%

التعليم باستعمال التقنيات

رسائل فورية كلّف الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، ويرسل كل شخص إلى زميله سؤالًا حول التوزيع الطبيعي (مثال: ما نسبة القيم التي تكون ضمن انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي؟). ويجب أن يجيب زميله على السؤال، ثم يتحقق كل منهما من الإجابة.

المحتوى الرياضي

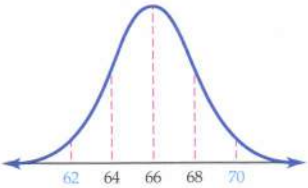
التوزيعات الطبيعية يكون لأشكال التوزيعات الطبيعية للمتغيرات العشوائية جميعها الشكل نفسه.

تُمَثِّل العينة التي يكون توزيعها توزيعًا طبيعيًّا بمنحنى طبيعي، وكأنها مجتمعًا كليًّا.

مثال 3 من واقع الحياة — عينة موزَّعة توزيعًا طبيعيًا

أطوال: توزَّع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in.

a) ما عدد اليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

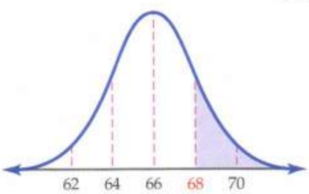


ارسم منحنى طبيعيًّا.

تبعد كل من 70 ,62 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 70 ,62.

ولأن 1710 = 95% × 1800، لذا يوجد 1710 يافعين تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟



من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزَّع الأعمار كالآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$

✓ تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 80 ,60 كيلوجرامًا؟ **68 موظفًا**

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟ **97.5%**

تدرب وحل المسائل

1) درجات: يوضّح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدّد ما إذا كانت البيانات تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا. (مثال 1) **التواء موجب**

فئات الدرجات	النسبة المئوية للطلاب
13–15	12
16–19	27
20–23	29
24–27	19
28–32	9
33–36	1

2) تتوزَّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12. أوجد احتمال اختيار قيمة لـ x عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(x < 149)$. (مثال 2) **16%**

3) مدارس: أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته، وكانت الدرجات موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2. (مثال 3) **انظر الهامش**

a) ما النسبة التي تتوقعها لعدد الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 23 ,19؟

b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25 ؟

مثال أضافي

تغليف: عَدَّ الطلاب قطع الحلوى في 100 علبة صغيرة، فوجدوا أن عدد قطع الحلوى لكل علبة يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 23 لكل علبة، وانحراف معياري يساوي قطعة واحدة.

a) ما عدد العلب التي تحتوي على عدد من قطع الحلوى بين 24 ,22؟ **68 علبة تقريبًا**

b) ما احتمال أن تحتوي علبة اختيرت عشوائيًّا على 25 قطعة فأكثر. **2.5% تقريبًا**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-10 للتأكد من فهم الطلاب.

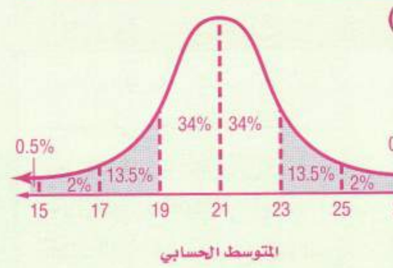
استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي وضّح للطلاب أن التواء توزيع البيانات يُشير إلى جهة الذيل للتوزيع، فمثلًا التوزيع الموجب الالتواء يمتد منحناه إلى اليمين؛ لذلك يكون المنحنى ملتويًا إلى اليمين.

إجابات:

(3a



تبعد كل من 23 ,19 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي؛ لذلك $34\% + 34\% = 68\%$ من البيانات تقع بين الدرجتين 23 ,19.

(b تبعد كل من 25 ,17 عن المتوسط انحرافين معياريين؛ لذلك $13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% = 95\%$ من البيانات تقع بين الدرجتين 25 ,17

تنويع التعليم

دون — ضمن

إذا احتاج الطلاب إلى مساعدة لرسم المنحنى الطبيعي،

فإنه يجب أن تَعْرِف أن اتجاه التقعّر للمنحنى يتحوّل من أسفل إلى أعلى عند النقطتين اللتين تبعدان انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي. كما أن رسم المنحنى الطبيعي لكل مسألة يساعد الطلاب على تقدير إجاباتهم.

4) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًّا: **التواء موجب**

المتنزهات التي تشهد أعدادًا كبيرة في زيارتها	
عدد الزوار بالآلاف	عدد المتنزهات
3–4	10
5–6	2
7–8	2
9–10	1
11–12	1
13 فأكثر	4

إذا توزّعت البيانات في الأسئلة 8-5 توزيعًا طبيعيًّا، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها كما هو موضّح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

5) $\mu = 74, \sigma = 6, P(x > 86)$ **2.5%**

6) $\mu = 13, \sigma = 0.4, P(x < 12.6)$ **0.16**

7) $\mu = 63, \sigma = 4, P(59 < x < 71)$ **81.5%**

8) $\mu = 91, \sigma = 6, P(73 < x < 103)$ **97%**

9) **بطاريات السيارة:** إذا حُدِّد عمْرُ بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها باستعمال هذه البطارية، وعلمت أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 100000 km، وانحراف معياري 10000 km. وتنتج إحدى الشركات 20000 بطارية في الشهر، فأجب عما يأتي:

a) ما عدد البطاريات التي يتراوح عمرها بين 90000 km – 110000 km؟ **13600**

b) ما عدد البطاريات التي يزيد عمرها على 120000 km؟ **500**

c) ما عدد البطاريات التي يقل عمرها عن 90000 km؟ **3200**

d) ما احتمال أن تشتري بطارية عشوائيًّا ويتراوح عمرها بين 80000 km – 110000 km؟ **81.5%**

10) **صحة:** يتوزع مستوى الدهنيات (الكولسترول) في فئة الشباب الذكور في إحدى الدول توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6.

a) ما نسبة الشباب الذكور الذين تقل نسبة الكولسترول عندهم عن 151.7؟ **16%**

b) كم شخصًا من بين 900 شخص شملتهم الدراسة يتراوح مستوى الكولسترول عندهم بين 145.1 – 171.5؟ **855**

11) **طعام:** تتوزع مدة صلاحية نوع معين من البطاطس توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 180 يومًا، وانحراف معياري 30 يومًا.

a) ما نسبة المنتج الذي تقع مدة صلاحيته بين 150 يومًا، 210 أيام؟ **68%**

b) ما نسبة المنتج الذي تقع مدة صلاحيته بين 180 يومًا، 210 أيام؟ **34%**

c) ما نسبة المنتج الذي تقل مدة صلاحيته عن 90 يومًا؟ **0.5%**

d) ما نسبة المنتج الذي تزيد مدة صلاحيته على 210 أيام؟ **16%**

12) **طول:** تتخذ أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره 67 in، وانحرافٍ معياري مقداره 2.5 in.

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in؟ **22 طالبًا تقريبًا**

b) ما نسبة الطلبة الذين تقع أطوالهم بين 59.5 in و 69.5 in؟ **83.5% تقريبًا**

13) **صناعة:** تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافًا ضئيلًا بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L.

a) كم عبوة تقريبًا يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟ **3 عبوات**

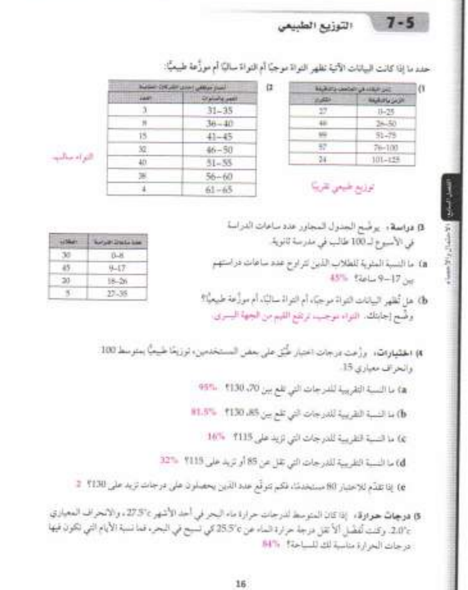
b) كم نسبة العبوات التي يكون فيها حجم الماء بين 1.08 L و 1.14 L؟ **81.5%**

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **اكتشف الخطأ:** تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى بين 3.6, 19.8، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

أمينة؛ وزّعت مريم المدى على الفترات بالتساوي

مريم	أمينة
مدى البيانات 16.2cm، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11cm، ويتوزع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm، أي أن المدى يكون في الفترة 11.5 ± 5.5، لذا يكون المدى بين 6 cm – 17 cm	تمتد النسبة 68% من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ لذا تكون الفترة ضمن 11.5 ± 2.5 وسيكون المدى 9 cm – 14 cm


7-5 التوزيع الطبيعي

حدد ما إذا كانت البيانات الآتية تظهر التواءً موجبًا أم التواءً سالبًا أم موزعة طبيعيًّا:

1)

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
0–25	27
26–50	48
51–75	89
76–100	57
101–125	24

توزيع طبيعي تقريبًا

2)

[illegible]	
[illegible]	[illegible]
31–35	3
36–40	8
41–45	15
46–50	32
51–55	40
56–60	38
61–65	4

التواء سالب

3) دراسة: يوضح الجدول المجاور عدد ساعات الدراسة في الأسبوع لـ 100 طالب في مدرسة ثانوية.

عدد ساعات الدراسة	الطلاب
0–8	30
9–17	45
18–26	20
27–35	5

a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح عدد ساعات دراستهم بين 9–17 ساعة؟ 45%

b) هل تُظهر البيانات التواءً موجبًا، أم التواءً سالبًا، أم موزعة طبيعيًّا؟ وضّح إجابتك. التواء موجب، ترتفع القيم من الجهة اليسرى.

4) اختبارات: وزّعت درجات اختبار طُبِّق على بعض المستخدمين، توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 100 وانحراف معياري 15.

a) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقع بين 70، 130؟ 95%

b) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقع بين 85، 130؟ 81.5%

c) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تزيد على 115؟ 16%

d) ما النسبة التقريبية للدرجات التي تقل عن 85 أو تزيد على 115؟ 32%

e) إذا تقدّم للاختبار 80 مستخدمًا، فكم تتوقع عدد الذين يحصلون على درجات تزيد على 130؟ 2

5) درجات حرارة: إذا كان المتوسط لدرجات حرارة ماء البحر في أحد الأشهر 27.5°c، والانحراف المعياري 2.0°c. وكنت تفضل ألا تقل درجة حرارة الماء عن 25.5°c كي تسبح في البحر، فما نسبة الأيام التي تكون فيها درجات الحرارة مناسبة لك للسباحة؟ 84%

16

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 14 أن 68% من أي توزيع طبيعي يقع ضمن انحراف معياري واحد حول المتوسط.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–10، 16–25
ضمن المتوسط	1–11 فردي ، 12–14 ، 16–25
فوق المتوسط	7–25

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب رسم مخطّط لتوزيعات طبيعية، وتوزيعات ملتوية إلى اليسار وأخرى ملتوية إلى اليمين.

إجابات:

16) إجابة ممكنة: عندما تشمل البيانات أطوال طلاب المرحلة الابتدائية جميعهم إضافة إلى أطوال الهيئة التدريسية والإدارية في المدرسة، فإن معظم الحالات تكون متركزة في الجهة اليسرى (الطلاب)، بينما تكون أطوال فئة الهيئة التدريسية والإدارية إلى الجهة اليمنى، وبذلك فإن هذا التوزيع يكون ملتويًا التواءً موجبًا. وفي صف يكون تحصيل الطلاب فيه عاليًا، فإن معظم البيانات لتحصيل الطلاب تتركز في الجهة اليمنى من التوزيع، ويوجد عدد قليل من البيانات في الجهة اليسرى. عند ذلك يكون التوزيع سالب الالتواء. وعندما تشمل البيانات معدلات طلاب متقاربة فإن معظم الحالات تكون متمركزة في الوسط، مع وجود بعض الحالات إلى اليمين وبعضها إلى اليسار، عند ذلك يكون التوزيع طبيعيًا.

17) إجابة ممكنة: صحيح، فحسب القانون التجريبي، فإن 68% من البيانات تقع ضمن انحراف معياري واحد يزيد أو يقل عن المتوسط.

19) إجابة ممكنة: يعد إلقاء حجر نرد مثالًا على التوزيع الاحتمالي المنفصل، وفي مثل هذا التوزيع يوجد عدد محدود من الإمكانات، أما التوزيع الاحتمالي المتصل فيمكن أن يُمثّله أعمار 400 بطارية، حيث يمكن للعمر أن يأخذ أي قيمة في الفترة التي يُشكّلها مجال التوزيع.

15) **تحدٍّ:** في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية. إذا كانت أعمار البطاريات تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 8.0h، وانحراف معياري 0.7 h، فما عدد المسجلات في المستودع إذا علمت أن هناك 8 مسجّلات يزيد عمر بطارياتها على 10.1 h؟ **1600**

16) **اكتب:** اشرح الفرق بين التوزيعات الموجبة الالتواء، والتوزيعات السالبة الالتواء، والتوزيعات الطبيعية لمجموعة بيانات. أعطِ مثالًا على كل منها. **انظر الهامش**

17) **تبرير:** حسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

18) **مسألة مفتوحة:** أوجد بيانات واقعية تبدو كأنها تتوزع توزيعًا طبيعيًّا. أعطِ خصائص هذا التوزيع فيما يتعلق بالمتوسط الحسابي، والانحراف المعياري. ومثِّل البيانات بيانيًّا. **انظر ملحق الإجابات**

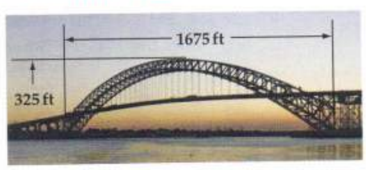
19) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على توزيع احتمالي منفصل، وآخر متصل. وصف الفرق بينهما. **انظر الهامش**

مراجعة تراكمية

20) **طلاب:** رُشِّح 3 طلاب من الصف الأول الثانوي، و11 طالبًا من الصف الثاني الثانوي لتوزيع بعض الطرود على الفقراء. إذا اختير من بينهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن تتضمّن العينة طالبين من الصف الأول الثانوي وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ (الدرس 7-4) **16.5% تقريبًا**

21) **ألعاب:** اتفق الأصدقاء عادل وعبد الكريم ومحمد أن يتناوبوا على قيادة سيارة كهربائية. ولتحديد من يقود السيارة أولًا اتفق أن يلقي كل منهم حجري نرد، ومن يحصل على أعلى مجموع يكون هو من يبدأ بقيادة السيارة. وقد حصل عادل على المجموع 5، وحصل عبد الكريم على المجموع 7. على افتراض أنه لا يوجد تعادل في نواتج رمي حجري النرد، فما احتمال أن يبدأ محمد اللعب؟ (الدرس 7-3) $\frac{15}{36}$

22) **جسور:** جسر لعبور المشاة فوق مسطح مائي له شكل قوس قطع مكافئ فتحته إلى أسفل، أوجد معادلة نموذج الجسر، مفترضًا أن نقطة الأصل على سطح الماء تحت رأس القطع. (مهارة سابقة) $y=-0.00046x^2+325$ **تقريبًا**

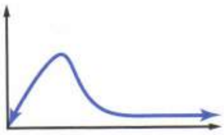


تدريب على اختبار

23) يتوزّع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 300 يوم وانحراف معياري 40 يومًا. كم مصباحًا يقع عمره بين 260 يومًا، 340 يومًا؟ **D**

- **A** 2500
- **B** 3400
- **C** 5000
- **D** 6800

24) ما الوصف الأفضل للتمثيل أدناه؟ **D**



- **A** توزيع سالب الالتواء
- **B** لا يوجد ارتباط
- **C** توزيع طبيعي
- **D** توزيع موجب الالتواء

25) **صناعة:** تتوزع قياسات أقطار مجموعة من الأقراص المدمجة التي تصنعها إحدى الشركات توزيعًا طبيعيًّا بانحراف معياري مقداره 1 mm. وبمتوسط حسابي يبلغ 120 mm.

a) ما نسبة الأقراص المتوقع أن يزيد طول قطرها عن 120 mm؟ **50%**

b) إذا كانت الشركة تصنع 1000 قرص في الساعة، فما عدد الأقراص المصنوعة في الساعة الواحدة، والتي يتراوح قطر كل منها بين 119 mm, 122 mm؟ **815**

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب القانون $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ على السبورة، ووضّح للطلاب: أن المتوسط الحسابي للمجتمع الكلي $=\mu$، وأن الانحراف المعياري للمجتمع الكلي $=\sigma$، وأن x هي قيمة لمتغيّر يتبع التوزيع الطبيعي، أمّا z فتُمثّل متغيّرًا طبيعيًّا معياريًّا. كلّف الطلاب أن يجدوا قيمة z لكل من زمني ردة الفعل 0.32 s, 0.38 s، علمًا بأن أزمنة ردة الفعل في موقف معين تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط: $\mu=0.35\text{s}$، وانحراف معياري $\sigma=0.05\text{s}$. **$-0.6, +0.6$**

ثم استعمال الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لإيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي، والمرتبطة بأي زوج من قيم z باختيار المفاتيح on ثم 1:Add Calculator، ثم كتابة (normcdf)، وإدخال البيانات على الصورة (z أقل قيمة لـِ z, أكبر قيمة لـِ μ, σ) normcdf، ثم ضغط enter. **45% تقريبًا**

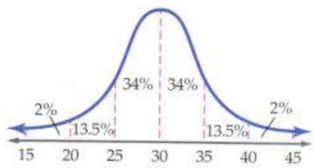
واطلب إليهم إيجاد نسبة الذين تقع زمن ردة الفعل لديهم في الفترة (0.32 , 0.38).

معمل الجبر:
القانون التجريبي والمئينات
The Empirical Rule and Percentiles

عند معرفة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع طبيعي، تستنتج أن 68% , 95% , 99% من البيانات ستكون ضمن انحراف معياري واحد، أو انحرافين معياريين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط على الترتيب، وهذا ما يُسمّى القانون التجريبي. ويمكنك استعمال القانون التجريبي لتجد المئينات. والمئين يبين النسبة المئوية من البيانات التي تقل عنه أو تساويه.

نشاط

في اختبار للرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي وجد أن درجات الطلاب تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 30، وانحراف معياري 5.



الخطوة 1 ارسم منحنى طبيعيًّا لدرجات الطلاب مشابه للشكل المجاور، وعيّن عليه المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري كما هو موضح في الشكل.

الخطوة 2 الدرجة 30 هي المتوسط، وبالرجوع إلى الشكل يمكن أن ترى أن 50% من الدرجات أقل من الدرجة 30 أو تساويها؛ لذا يمكنك القول: إن الدرجة 30 تُمثّل المئين 50.

ما المئين الذي يقابل الدرجة 35؟ **الدرجة 35 تُمثّل المئين 84.**

الخطوة 3 ما المئين الذي يقابل الدرجة 40؟ **الدرجة 40 تمثّل المئين 97.**

الخطوة 4 ما قيمة المئين 99؟ **45**

تمارين: **1, 2) انظر الهامش**

ارسم منحنيات تشبه المنحنى في الخطوة 1، ثم حدّد المئينات والدرجات التي تقابلها في كل مما يأتي:

1) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الفيزياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 15، وانحراف معياري 2، فأوجد المئينات التي تقابل الدرجات 13 , 15 , 21.

2) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الكيمياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 40، وانحراف معياري 4، فأوجد الدرجات التي تقابل المئينات 99 , 50 , 84.

1 التركيز

الهدف استعمال القانون التجريبي للربط بين المئينات والتوزيع الطبيعي.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب بأنهم تعلموا في الدرس 7-5 أن 0.5% من التوزيع الطبيعي أكبر من 3 انحرافات معيارية فوق المتوسط. أو أصغر من 3 انحرافات معيارية تحت المتوسط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

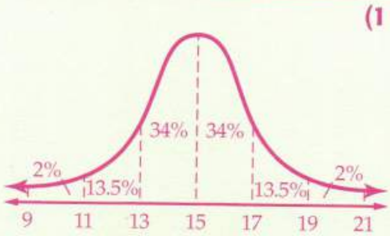
واسأل:

- ما المئين الذي يقابل الوسيط في التوزيع الطبيعي؟ الخمسين
- ماذا يمكنك القول عن المئين الذي يقابل الدرجة 37؟ يقع بين المئين 84 والمئين 97.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمرينين 1, 2.

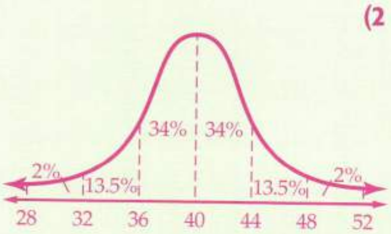
إجابات:

(1



يُمثّل العدد 21 المئين 99، والعدد 15 المئين 50، والعدد 13 المئين 16 تقريبًا.

(2



المئين 99 هو الدرجة 52، والمئين 50 هو الدرجة 40، والمئين 84 هو الدرجة 44 تقريبًا.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم الطلاب لمعرفة ما إذا كانوا قادرين على تحديد المئينات المرتبطة بالدرجات المعطاة أم لا.

من المحسوس إلى المجرد

في التطبيقات الحياتية تقع القيم المعيارية في التوزيعات الطبيعية المعيارية عادة بين 3− و 3+. وضّح السبب؟

إجابة ممكنة: بناءً على القانون التجريبي 99% من البيانات تقريبًا تقع ضمن 3 انحرافات معيارية عن المتوسط والتي تناظر القيم المعيارية في المدى من 3− إلى 3+ في التوزيع الطبيعي المعياري.

توسّع المفهوم

هل يمكن أن يكون المئين 50 هو المتوسط لتوزيعات غير طبيعية؟

يمكن أن يتساوى المتوسط والوسيط لتوزيع غير طبيعي، ولكن المئين 50 هو الوسيط لجميع التوزيعات الطبيعية وغير الطبيعية

7-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

استعمال نظرية ذات الحدين.

الدرس 7-6

إيجاد احتمالات تجارب ذات الحدين.

إيجاد احتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.

ما بعد الدرس 7-6

إيجاد احتمالات حوادث معينة في فضاء محدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما احتمال ألا يحصل سلمان على نقطة عند لعبه إرسال؟ 64%
- هل يمثّل النجاح مرتين متتاليتين حادثتين مستقلتين؟ نعم
- إذا كانت نجاحات الإرسال مستقلة، فما احتمال ألا يحصل سلمان على أي نقطة في إرسالين متتاليين؟ 0.4096

7-6 التوزيعات ذات الحدين
Binomial Distributions

فيما سبق:

درست استعمال نظرية ذات الحدين.

والآن:

- أجد احتمال تجارب ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.

المفردات:

تجربة ذات الحدين
binomial experiment

توزيع ذات الحدين
binomial distribution

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

توزيع ذات الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل. فمثلًا في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعال أو غير فعّال.

مفهوم أساسي — تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة (المرات) n .
- لكل محاولة نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- احتمال النجاح $P(S)$، أو p نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$، أو q نفسه في كل محاولة ويساوي $1-p$.
- يُمثّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال 1 — تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيِّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائيًّا، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:

هذه التجربة تحقق شروط التجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S)=\mathbf{0.68}$.

وفي هذه التجربة $n=6, p=P(S)=0.68$. احتمال الفشل $q=1-p$، أي أن: $q=1-0.68=0.32$. ويُمثّل X عدد الطلاب الذين يملكون حاسبة بيانية من الذين تم اختيارهم، أي أن: $X=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض، سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثّل محاولة، واحتمال أن تكون البطاقة من اللون الأخضر $\frac{1}{4}=\frac{13}{52}$. وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

مصادر الدرس 7-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (117)	• تنويع التعليم ص (117)	• تنويع التعليم ص (119)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحَّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

1A) ليست ذات حدين $P(S)=61\%$, $P(F)=1-61\%=39\%$، في حين أن 24% لا يحبون الزي الموحد، وهذا لا يساوي 39% .

1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

1B) تجربة ذات حدين $n=20, p=\frac{1}{4}, q=\frac{3}{4},$ $X=0, 1, 2, \dots 20$

يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_x p^x q^{n-x}$ التي تمثل حدًّا في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي — **صيغة احتمال ذات الحدين**

احتمال النجاح في x مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال 2 من واقع الحياة — توزيع ذات الحدين

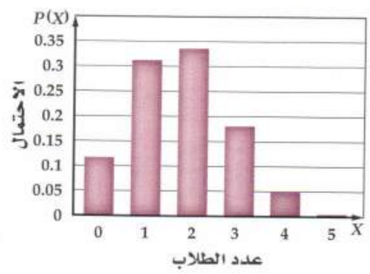
اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال ، فكوِّن توزيع ذات الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها $n=5, p=0.35, q=1-0.35=0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$
$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$
$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$
$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.

X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005



إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الحاسبة البيانية: استعمل الأمر binomPdf(n, p, x) من قائمة Calculate .

مثال: binomPdf(5, 0.35, 1) يساوي 0.312386

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وبيِّن لهم أن هناك مجسمًا ثمانيًّا منتظمًا له ثمانية أوجه مرقّمة من 1 إلى 8. واطلب إليهم إيجاد احتمال الحصول على كل من النتائج الممكنة إذا رُمي المجسم مرة واحدة. $P(1)=0.125, P(2)=0.125, P(3)=0.125, P(4)=0.125,$ $P(5)=0.125, P(6)=0.125, P(7)=0.125, P(8)=0.125$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

توزيع ذات الحدين

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز التجربة ذات الحدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية تكوين التوزيع الاحتمالي.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك، وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q . وقيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) أُجري مسح إحصائي في إحدى المناطق التعليمية في المملكة فتبين أنّ 95% من المعلمين يحبون مهنتهم، وأن 5% لا يحبونها، إذا تم اختيار 50 معلمًا عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد المعلمين الذين يحبون مهنتهم.

التجربة ذات حدين فيها: $n=50, p=0.95, q=0.5,$ $X=1, 2, 3, \dots, 50$

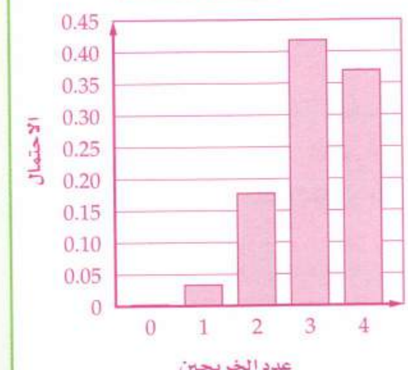
b) يحتوي صندوق على 10 رقاقات إلكترونية زرقاء اللون و 5 رقاقات حمراء اللون، إذا تم سحب 3 رقاقات عشوائيًّا الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الرقاقات الزرقاء المسحوبة.

الحوادث غير مستقلة؛ لأن احتمال سحب رقاقة زرقاء يختلف بعد كل سحب، وعليه فإن التجربة ليست ذات حدين.

مثال إضافي

2 **كليات:** في دراسة حديثة أُجريت على خريجي إحدى الكليات، تبيّن أن 78% من الخريجين يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج. تم اختيار 4 خرِّيجين عشوائيًّا وسؤالهم عما إذا كانوا يرغبون في تلقي التدريب العملي بعد تخرجهم. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخرجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال. فكوّن توزيع ذات الحدين ومثِّله بيانيًّا، ثم أوجد احتمال أن ثلاثة منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370



$P(x \geq 3) = 0.788$

توزيع ذات الحدين

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد المتوسط، التباين، والانحراف المعياري لتوزيع ذات حدين.

المثال 4 يبيّن كيفية تقريب توزيع ذات حدين إلى توزيع طبيعي.

إرشادات للدراسة

اختيار الاحتمالات
أحيانًا يكون من الأسهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح. ويُسمى الاحتمالان في مثل هذه الحالة احتماليين متتامين.

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ احتمال 3 طلاب على الأقل

$= 0.181 + 0.049 + 0.005$ $\quad P(3) = 0.181, P(4) = 0.049, P(5) = 0.005$

$= 0.235 = 23.5\%$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 طلاب خريجين عشوائيًّا، وتم سؤالهم عمَّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوّن توزيع ذات الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم. انظر الهامش.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط (الوسط) والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين.

مفهوم أساسي **المتوسط (الوسط) والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات حدين**

يحسب المتوسط (الوسط) والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي ذي حدَّين X بالصيغ الآتية:

المتوسط (الوسط) $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

مثال 3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين

اختبار: يُبيّن الجدول أدناه التوزيع ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع، ثُمَّ فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.116	0.312	0.336	0.181	0.049	0.005

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5, p = 0.35, q = 0.65$.

$\mu = np$

$= 5(0.35) = 1.75$

$\sigma^2 = npq$

$= 5(0.35)(0.65) = 1.1375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$= \sqrt{1.1375} \simeq 1.0665$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن طالبين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تحقق من فهمك

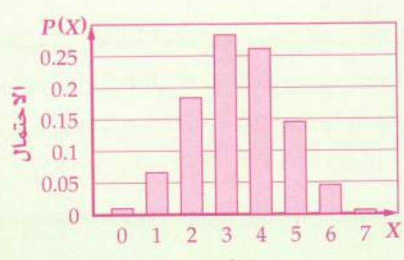
3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الذي كوَّنته في تحقق من فهمك 2، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

3) $\mu = 3.36$, $\sigma^2 = 1.747$, $\sigma \approx 1.322$, بمعدّل 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج.

إجابة (تحقق من فهمك):

2)

X	$P(X)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006



$P(X < 4) = 0.543 = 54.3\%$

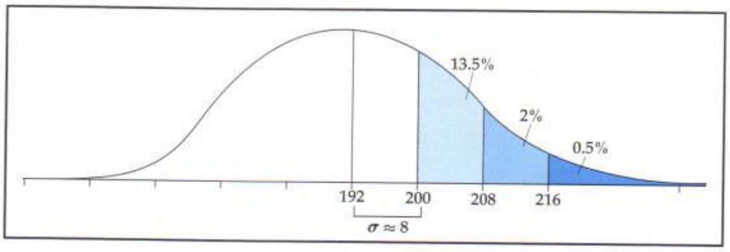
عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة عشوائية ذات حدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في توزيع ذات الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p، واحتمال الفشل q، ويكون $n\,p \geq 5,\ n\,q \geq 5$، يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\bar{x} = np$، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

مثال 4 تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من الخريجين عشوائيًّا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟



في التوزيع السابق:

$$n = 300,\ p = 0.64,\ q = 0.36$$

وحيث إن:

$$n\,p = 300\,(0.64) = 192 > 5$$

$$n\,q = 300\,(0.36) = 108 > 5$$

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:

$\bar{x} = n\,p$	المتوسط للتوزيع الطبيعي
$= 300(0.64) = 192$	$n = 300,\ p = 0.64$
$\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$	الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي
$= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$	$n = 300,\ p = 0.64,\ f = 0.36$
≈ 8.31	باستعمال الآلة الحاسبة

يقع العدد 200 فوق المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟ 2.5% تقريبًا

إرشادات للدراسة

التقريب من خلال التوزيع الطبيعي
يُستعمل التقريب من خلال التوزيع الطبيعي؛ لأنه مع زيادة n يصبح استعمال توزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقدة وصعبة.

مثالان إضافيان

3 **كليات:** يُبيِّن الجدول أدناه توزيع ذات الحدين للمثال الإضافي 2. أوجد المتوسط، والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

المتوسط = 3.12، التباين = 0.686، والانحراف المعياري = 0.828، بمعدل 3 طلاب خريجين من أصل 4 يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج.

4 في الدراسة المسحية في المثال 4. ما احتمال أن يوافق 175 من المستهدفين على الأكثر ؟ 2.5% تقريبًا

المحتوى الرياضي

توزيع ذات الحدين يُسمّى توزيع ذات الحدين التوزيع ذي المعلمتين، وهما عدد المحاولات (n)، واحتمال النجاح في المرة الواحدة (p). وتتحدّد الاحتمالات تمامًا عند معرفة هاتين المعلمتين.

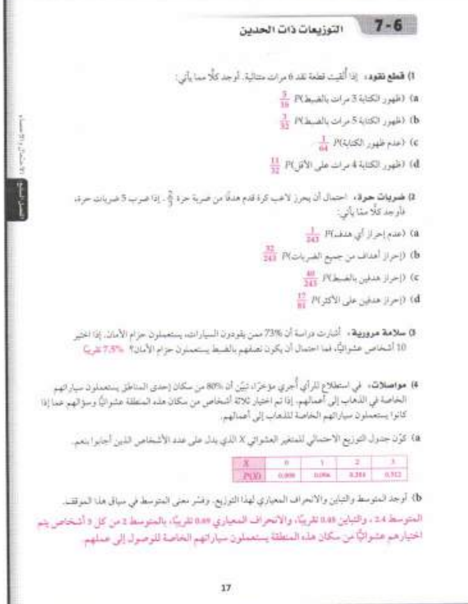
التعليم باستعمال التقنيات

البحث في شبكة الإنترنت اطلب إلى الطلاب البحث في المواقع عن توزيعات ذات حدين وأمثلة عليها.

تنويع التعليم

فوق

توسع قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، على أن يقوم طالب من كل مجموعة بكتابة سؤال مسح إحصائي من اهتمامات المجموعة. كلف كل مجموعة بمناقشة كيفية تحقيق السؤال لشروط تجربة ذات الحدين وكتابة نتائج المسح، ثم تحديد كل من n, p, q وتكوين توزيع ذات الحدين وتمثيله بيانيًّا بالأعمدة.



تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيِّن السبب. (مثال 1) **1-4) انظر الهامش**

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

3) سألت 15 شخصًا عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

4) صندوق به 52 كرة منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن توزيع ذات الحدين لكلّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفسِّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3) **5-7) انظر ملحق الإجابات**

5) إذا كان % 89 من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًا من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

6) بيّنت دراسة أن % 26 من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًا، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

7) أفادت دراسة إحصائية أن % 65 من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًا ممن يمتلكون سيارات، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم.

8) **أعمال صيفية:** تبين في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن منذرًا قدّر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائيًا. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4) **2.5% تقريبًا**

9) **رخصة قيادة:** اعتمادًا على إحدى الدراسات المسحية السابقة، إذا علمت أن 85% من طلاب إحدى الجامعات لديهم رخص قيادة سيارة، فما احتمال أن يكون 6 طلاب على الأقل من بين 10 تم اختيارهم عشوائيًا لديهم رخص قيادة سيارة؟ **0.99013 أو 99%**

10) **كرة قدم:** كسب فريق لكرة القدم 75.7% من مبارياته. أوجد احتمال أن يكسب 7 مباريات على الأقل من بين مبارياته العشر القادمة. **0.792 أو 79.2%**

11) **رياضيون:** وفق بعض الدراسات الحديثة، إذا علمت أن 80% من طلاب المدارس الثانوية شاركوا في رياضة واحدة على الأقل في مدرستهم، إذا اختير 6 طلاب عشوائيًا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الذين يمارسون رياضة واحدة على الأقل.

a) فأوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الطلاب الذي يمارسون رياضة واحدة على الأقل. **انظر ملحق الإجابات**

b) فما احتمال ألا يزيد عدد الذين شاركوا في رياضة عن طالبين؟ **1.7% تقريبًا**

12) **غسيل سيارات:** يقوم بعض الأشخاص بغسيل السيارات لزبائن بعض المجمعات التجارية مقابل أجر معين. وقد أفادت دراسة مسحية أن 65% من الزبائن يدفعون أكثر من الحد الأدنى لأجرة غسيل سياراتهم. ما احتمال أن يدفع أربعة على الأقل من خمسة زبائن مبلغًا أكثر من الحد الأدنى للأجر. **42.8%**

13) **حوافز دعائية:** تضع شركة للعصائر حوافز بحيث إن 30% من علب العصير تربح علبة مجانية، وقد اشترت سعاد 10 علب. مثّل بالأعمدة البيانية التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذات الحدين إذا كان المتغير العشوائي يدل على عدد علب العصير الرابحة. **انظر ملحق الإجابات**

14) **برامج دينية:** بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجًا دينيًا على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصًا منهم على الأقل يتابعون برنامجًا دينيًا على الأقل؟ **16%**

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذات حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب.

15) ما احتمال ألا توجد أي محاولة ناجحة؟ **0.0000069% تقريبًا**

16) ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة؟ **0.0145 أو 1.45%**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) تجربة ذات حدين؛ $n = 10$، $p = \frac{1}{6}$ لكل رمية، $q = \frac{5}{6}$، قيم المتغير العشوائي 10-0.

2) تجربة ذات حدين؛ $n = 20$، $p = \frac{1}{2}$، $q = \frac{1}{2}$، قيم المتغير العشوائي 20-0.

3) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة؛ لأنه يوجد أكثر من نتيجتين متوقعتين؛ لأن العمر قد يكون أي عدد ضمن المعقول.

4) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: بما أنك تسحب كرات دون إرجاع، فإن الاحتمالات تختلف في كل سحب لنقص عدد الكرات.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	8–1، 19–10، 33–25
ضمن ضمن المتوسط	25–1 فردي، 33–25
فوق فوق المتوسط	33–15

17) تنس طاولة: كسب لاعب 85% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. أوجد الاحتمالات الآتية:

a) أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة. 13.8%

b) أن يكسب مباراتين على الأقل من بين المباريات الخمس القادمة. 99.8%

c) أن يخسر مباراة واحدة على الأقل في مبارياته الخمس القادمة. 55.6%

لكلٍ من توزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على s من النجاحات. (18-23) انظر الهامش

18) $n = 8, P = 0.3, s \geq 2$

19) $n = 10, P = 0.2, s > 2$

20) $n = 6, P = 0.6, s \leq 4$

21) $n = 9, P = 0.25, s \leq 5$

22) $n = 10, P = 0.75, s \geq 8$

23) $n = 12, P = 0.1, s < 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

(25, 26) انظر الهامش

24) تحدٍّ: في تقريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود 60 – 66 نجاحًا يساوي 34%، وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟ 156

25) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك. «من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرحه من 1 لتجد احتمال النجاح».

26) مسألة مفتوحة: صف حالة من أنشطة المدرسة أو المجتمع ينطبق عليها توزيع ذات الحدين، وحدّد المكوّنات الرئيسة للحالة، ثم اربطها بتوزيع ذات الحدين.

27) اكتب: فسّر العلاقة بين التجربة ذات الحدين وتوزيع ذات الحدين.
إجابة ممكنة: توزيع ذات الحدين يوضّح احتمالات نواتج التجربة ذات الحدين.

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل دائرة، أو قطعًا مكافئًا، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. وبرر إجابتك: (مهارة سابقة)

28) $x^2 + 4y^2 = 100$ قطع ناقص

29) $5y^2 - 10x = 0$ قطع مكافئ

30) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 16 = 0$ دائرة

31) سرعة: وضع نظام لمراقبة سرعة السيارات وتسجيلها في شارع قريب من إحدى المدارس، إذا توزّعت هذه السرعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 37 mi/h وانحراف معياري 4 mi/h، فكم سيارة كانت تسير بسرعة تقل عن 33 mi/h في عينة حجمها 425 سيارة؟ (الدرس 5-7) 68

32) اختبار: تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على: (الدرس 6-7)

a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟ 0.003

b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟ 0.00003

c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟ 0.056

d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟ 0.25

33) دراسة جامعيّة: أوضح استطلاع في إحدى المدارس الثانوية أن 88% من الطلاب يريدون إكمال دراستهم الجامعية. وقد قام نواف باستطلاع أراء 150 طالبًا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون في العينة 132 طالبًا على الأقل يرغبون في استكمال دراستهم الجامعية؟ (الدرس 5-7) 50%

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يجد احتمال وجود ثلاثة أولاد ذكور عند عائلة إذا علم أن لدى هذه العائلة 4 أطفال.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء شجّع الطلاب على التفكير في معقولية حلولهم. أكد على حقيقة أن معظم البيانات تتمركز عادةً حول المتوسط.

إجابات:

18) 74.4% أو 0.744

19) 32.2% أو 0.322

20) 76.7% أو 0.767

21) 99% أو 0.99

22) 52.6% أو 0.526

23) 88.9% أو 0.889

25) في بعض الأحيان، إذا كانت الحادثة تتألف من عدد كبير من العناصر مقارنة بالحادثة المتممة، فإننا نقوم بإيجاد احتمال الحادثة المتممة، ونطرح الناتج من الواحد الصحيح، فمثلاً: عندما يكون فضاء العينة مكوّنًا من الأعداد 7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0، وأردنا إيجاد احتمال الحصول على الأعداد 7 ,6 ,5 ,4 ,3 فإنه بدلًا من إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد 7–3 وجمع هذه الاحتمالات، يكون من الأفضل إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد الثلاثة 2 , 1 , 0، وطرح الناتج من العدد 1.

26) إجابة ممكنة: إذا عُلم أن نسبة القطع المعيبة في مصنع 3%، واشترى تاجر 500 قطعة اختيرت عشوائيًّا، فإنه يستطيع أن يجد احتمال وجود 10 قطع معيبة من بينها، حيث $n = 500, p = 3\%, q = 97\%$.

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 5-1، فذكرهم باستعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات:

تعزَّز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع الكلي (الدرسان 2-7 ,1-7)

- تكون العينة منحازة إذا صُمِّمت لصالح نواتج معينة.
- تكون العينة غير منحازة إذا كانت عشوائية أو لا يمكن تنبؤها.

الانحراف المعياري	
المجتمع الكلي	العينة
$\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$	$\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}{n-1}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 3-7)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية: تسجيل البيانات بحيث تنتج عن حالات ممكنة مختلفة نتائج ممكنة مختلفة.

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 6-7 ,5-7 ,4-7)

المجتمع الكلي	العينة
عدد محدّد من النواتج الممكنة	منفصل
عدد غير محدّد من النواتج الممكنة	متصل
منحنيات متماثلة	طبيعي
منحنيات غير متماثلة	ملتوي
تكون النواتج واحدة من بين حادثتين بسيطتين	ذات الحدين

المفردات

الدراسة المسحية ص 88
المجتمع الكلي ص 88
تعداد عام ص 88
العينة ص 88
المنحازة ص 88
غير المنحازة ص 88
الدراسة بالملاحظة ص 89
الدراسة التجريبية ص 89
المجموعة التجريبية ص 89
المجموعة الضابطة ص 89
الارتباط ص 90
السببية ص 90
المتغير ص 94
بيانات في متغير واحد ص 94
مقياس النزعة المركزية ص 94
المَعْلَمة ص 94
الإحصائي ص 94
هامش خطأ المعاينة ص 95
مقاييس التشتت ص 95
التباين ص 95
الانحراف المعياري ص 95
الاحتمال المشروط ص 99
الجدول التوافقي ص 100
التكرار النسبي ص 100
الاحتمال ص 104
النجاح ص 104
الفشل ص 104
فضاء العينة ص 104
المتغير العشوائي ص 105
المتغير العشوائي المنفصل ص 105
التوزيع الاحتمالي المنفصل ص 105
الاحتمال النظري ص 106
الاحتمال التجريبي ص 106
القيمة المتوقعة ص 106
التوزيع الاحتمالي المتصل ص 110
التوزيع الطبيعي ص 110
التوزيع الملتوي ص 110
تجربة ذات حدين ص 116
توزيع ذات الحدين ص 117

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة.

2) عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد ارتباط بينهما.

3) الدراسة المسحية منحازة إذا صُمِّمت لصالح نواتج معينة.

4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمّى المجموعة الضابطة.

5) يُحدّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع الكلي.

مراجعة الدروس

مداخلة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات :

6) غير منحازة؛ لكل متسوق في المجتمع العام الفرصة نفسها، لأن يكون في العينة.

7) غير منحازة؛ لكل فرد في المجتمع العام للطلاب الفرصة نفسها، ليكون في العينة.

8) منحازة؛ العينة منحازة نحو المطعم الذي يقدم الاستبانة.

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة (الصفحات 92-88)

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة منحازة أو غير منحازة، ثم فسّر إجابتك:

6) يتم اختيار كل عاشر متسوِّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحًا أو مطمئنًا لشرائه من المجمع. انظر الهامش

7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة. انظر الهامش

8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة. انظر الهامش

حدد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة بالملاحظة أو دراسة تجريبية.

9) اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئيًّا بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم. دراسة بالملاحظة

10) اختر 100 شخص وقسّمهم إلى نصفين عشوائيًّا، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم. دراسة تجريبية

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائيًّا قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثًا، وطرح سؤالًا عليهم حول نوعية الخدمة التي تُقدّمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة منحازة أم غير منحازة؟ فسّر إجابتك.

غير منحازة ؛ لأنّ لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

طبّق معلم الرياضيات اختبارًا على طلابه الموزعين على مجموعتين، فأعطى الاختبار لإحدى المجموعتين بعد أداء تمارين رياضية، فيما لم تؤدِّ المجموعة الثانية أي تمارين رياضية قبل الاختبار، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسحية أم دراسة بالملاحظة أم دراسة تجريبية؟ فسّر إجابتك.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية منحازة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي اليها.

7-2 التحليل الإحصائي (الصفحات 98-94)

11) **فصول السنة :** في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصًا، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟ $\pm 1.7\%$ تقريبًا

12) **سباحة :** في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400 m ، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها. 6.37 ثوانٍ

الزمن بالثواني					
301	311	320	308	312	307
313	315	309	308	304	302
311	313	313	316	314	306
329	326	319	310	306	309
320	318	315	318	314	309

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصًا: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلًا لديهم. ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2645}}$$

$$\approx \pm 0.0194$$

هامش خطأ المعاينة $\pm 1.9\%$ تقريبًا.

دليل الدراسة والمراجعة

7-3 الاحتمال المشروط (الصفحات 99-102)

13) **كرة طائرة:** يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على أي نقطة في 5 مرات متتالية قام فيها بضربة الإرسال؟ **0.005 تقريبًا**

14) في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائيًا فأجب عما يأتي:

	يلبس نظارات	لا يلبس نظارات
الأول الثانوي	6	15
الثاني الثانوي	5	22

a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه يلبس نظارات؟ $\frac{6}{11}$

b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟ $\frac{22}{27}$

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختير عشوائيًا حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

	يأخذ حصصًا إضافية (E)	لا يأخذ حصصًا إضافية (X)
طالب جديد (N)	126	84
طالب قديم (O)	98	72

$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$ الاحتمال المشروط

$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$ $\quad P(E \cap N) = \frac{126}{380},\ P(N) = \frac{210}{380}$

$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$ بالتبسيط

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية (الصفحات 104-109)

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15) $P($3 بطاقات للكرة الطائرة$)$ $\frac{14}{575}$

16) $P($3 بطاقات لكرة القدم$)$ $\frac{11}{115}$

17) $P($بطاقة لكرة السلة وبطاقتان للكرة الطائرة$)$ $\frac{7}{115}$

18) $P($بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم$)$ $\frac{6}{115}$

19) **بطاقات:** مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، بطاقتان على كل منها الرقم 2، بطاقة عليها الرقم 3. إذا سحبت بطاقة عشوائيًا من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟ **6.5 تقريبًا**

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيبته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائيًا، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار؟

الخطوة 1 حدّد عدد تراتيب الكتب الممكنة التي تحقق المطلوب.

$_3P_3$ مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار

$_2P_2$ أمكنة الكتابين الآخرين

الخطوة 2 استعمل قانون العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات.

$$_3P_3 \cdot {_2P_2} = 3! \cdot 2! = 12$$

الخطوة 3 أوجد المجموع الكلي $s + f$ لإمكانات ترتيب الكتب.

$$_5P_5 = 5! = 120 \qquad s + f = 120$$

الخطوة 4 أوجد الاحتمال.

$$P = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$$

احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

124 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

إجابة:

(23a

X	$P(X)$
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-5 التوزيع الطبيعي (الصفحات 114-110)

في كلٍّ من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري. أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

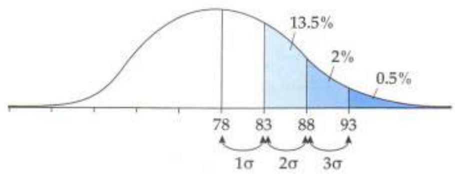
(20 $\mu = 121, \sigma = 9, P(x > 103)$ 97.5%

(21 $\mu = 181, \sigma = 12, P(x > 169)$ 84%

(22 **زمن الركض:** أزمنة الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 4.7s، وانحراف معياري 0.15s . ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4s؟ 2.5%

مثال 6

توزّع مجموعة من البيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 78، وانحراف معياري 5 . أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ x عشوائيًا عن 83 .



بما أن $83 = 5 + 78 = \mu + \sigma$؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساويًا $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

7-6 التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 121-116)

(23 **أشخاص مشهورون:** في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا

a) إذا مثّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضّلون أداء هذا الرياضي، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثّله بالأعمدة. انظر الهامش

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضّلون أداء هذا الرياضي. 73.3%

(24 **ساعات:** أشارت دراسة مسحية للكبار أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون 160 شخصًا على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟ 2.5%

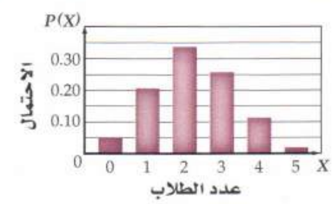
مثال 7

رسم هندسي: **أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عمّا يأتي:**

a) **كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثّله بالأعمدة.**

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



b) **أوجد المتوسط (الوسط) والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.**

$$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$$

$$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \simeq 1.1124$$

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة 125

تطبيقات ومسائل

25) حدد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثل دراسة تجريبيّة، أو دراسة بالملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبيّة، ثم بيِّن إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 7-1)

a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكرًا وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة. **هذه دراسة بالملاحظة**

b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية. **انظر الهامش**

26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالسنتمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

احسب الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 7-2)
7.55 تقريبًا

27) على فرض أن 60% من طلاب معهد في السنة الأولى، وأن 40% في السنة الثانية، وكان 5% من طلاب السنة الأولى عيونهم زرقاء، و 12% من طلاب السنة الثانية عيونهم زرقاء. إذا اختير طالب من المعهد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب السنة الثانية وعيونه زرقاء؟ (الدرس 7-3) **0.048**

28) رميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، ثم مثّله بالأعمدة. (الدرس 7-4) **انظر الهامش**

29) **سكة حديد:** إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 42 min (الدرس 7-5) **97.5%**

30) **إجازات:** في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسن يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 موظفًا عشوائيًّا. ما احتمال ألّا يأخذ أكثر من 420 عاملًا إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 7-6) **0.5% تقريبًا**

إجابات:

25b) هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائيًّا، وإحدى المجموعتين خضعت لدورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، والأخرى لم تخضع لأي دورة تدريبية، وهي دراسة تجريبية منحازة؛ لأن كل موظف يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

(28

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.125	0.375	0.375	0.125

1, 2) انظر الهامش

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطًا أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.

2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخرًا عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل من المسوحات الآتية تتبنى عينة منحازة أو غير منحازة، ثم فسّر إجابتك: 3, 4) انظر الهامش

3) استطلع صاحب مخزن يبيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن المبالغ التي ينفقونها في الشراء الإلكتروني في الشهر.

4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها .

أي مقاييس النزعة المركزية يناسب كلًّا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5) المتوسط؛ لأن البيانات لا تتضمّن قيمًا متطرفة.

درجات اختبار				
4	4	3	3	3
4	5	5	4	4
3	3	3	3	4
3	3	3	4	4
4	5	3	4	3

6) الوسيط؛ لأن البيانات تتضمن قيمًا متطرفة، ولا يوجد فجوات كثيرة في المنتصف

الطول بالبوصة				
61	64	62	61	64
63	65	61	66	83
84	63	62	65	61
61	62	66	63	61

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًّا، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) $\mu = 54, \sigma = 5, P(x > 44)$ 97.5%

8) $\mu = 35, \sigma = 2.4, P(x < 37.4)$ 84%

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و 12 خضراء وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) الكرة الثانية حمراء، علمًا بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع. $\frac{8}{29}$

10) الكرة الثانية زرقاء، علمًا بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع. $\frac{1}{3}$

11) **اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسَّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائيًّا فأوجد:

	تحسن	لم يتحسن
حضر المراجعة	12	3
لم يحضر المراجعة	4	6

a) احتمال أن يكون قد تحسّن علمًا بأنه حضر المراجعة. $\frac{12}{15}$ أو 80%

b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علمًا بأنه لم يتحسّن. $\frac{6}{9} \approx 67\%$

12) **جوائز:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الرابحون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ D

A) 0.46% تقريبًا

B) 0.25% تقريبًا

C) 70% تقريبًا

D) 30% تقريبًا

13) سحبت كرتان معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

(13

X	0	1	2
$P(X)$	0.1	0.6	0.3

14) **طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40% . أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل. 84.1% تقريبًا

15) **حديقة:** يخطط يعقوب لزرع 24 زهرة في حديقته. إذا علمت أن الأزهار التي أحضرها من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75% ، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟ 0.24665تقريبًا أو 24.7%

المعالجة :

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

إجابات:

1) سببية: لأن الرعد لا بد أن يلي البرق.

2) ارتباط: مع وجود علاقة بين الحدثين، إلا أن نايف قد يركض لسبب آخر.

3) منحازة؛ لأن الناس الذين تم استطلاع آرائهم ربما يكون لديهم إمكانية أكثر من غيرهم للإنفاق الشهري.

4) غير منحازة؛ كل فرد في المجتمع الكلي له الفرصة نفسها ليكون في العينة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5 , 7-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الدرس 1-7 ، ص (92)

25) إجابة ممكنة: ليس أيًّا منهما، كلا التجربتين متحيّزتان؛ لأن الموجودين في المجموعة التجريبية يعلمون ذلك.

27) إجابة ممكنة: تُسحب العينات العشوائية من المجتمع الكلي للحصول على عينة ممثّلة للمجتمع الكلي، وبغرض تجنّب التحيّز. ويتم تحديد المعالجات على وحدات المعالجة بطريقة تكون الفرصة ذاتها لكل من هذه الوحدات، لتكون ضمن المجموعة التجريبية أو ضمن المجموعة الضابطة. كما يتم التأكد أن كل وحدة لا تعرف إلى أي مجموعة تنتمي.

28a) إجابة ممكنة: دراسة مسحية تتناول استطلاع رأي 50 طالبًا في المدرسة حول الطريقة التي يتم فيها تحديد مسار التعليم الثانوي المفضل.

العينة: سجّل طلاب المدرسة جميعهم في قائمة، واسحب عشوائيًّا 50 طالبًا .

موضوع الدراسة المسحية تقديرك حول طريقة تحديد الطالب خياره في مسار التعليم الثانوي الذي يرغب فيه على المقياس من 1 إلى 5 ، حيث يدل الرمز 1 على المعارضة بشدة، والرمز 5 على الموافقة بشدة.

28c) إجابة ممكنة: اختر عينة من 20 شخصًا عشوائيًّا مصابين بالرشح. أعطِ نصفهم علاجًا، وأعطِ النصف الآخر علاجًا محايدًا، وقارن بين النتائج بعد 3 أسابيع . المجموعة التجريبية هي مجموعة الأشخاص الذين أُعطوا العلاج المقصود، والمجموعة الضابطة هم الذين أعطوا علاجًا محايدًا.

29) إجابة ممكنة: يمكن أن يحصل التحيّز في التجربة عندما يعلم الأفراد في المجموعة التجريبية أنها هي المجموعة التي ينتمون إليها. فمثلًا إذا علم أفراد مجموعة تجريبية أنهم يتعرّضون لعلاج بقصد زيادة مستوى الطاقة لديهم، فسيكونون حريصين على معرفة إن كان العلاج فاعلًا أم غير فاعل، وكذلك إذا علم أفراد المجموعة الضابطة أنهم يأخذون علاجًا غير فاعل، فلن تكون لديهم الدافعية لاستكمال التجربة.

40) دراسة تجريبية: وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمن المجموعة التجريبية التي تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يوميًّا، وتتضمن المجموعة الضابطة من لايفعل ذلك. وكتلة الجسم للمجموعة التجريبية ربما تصبح أكبر.

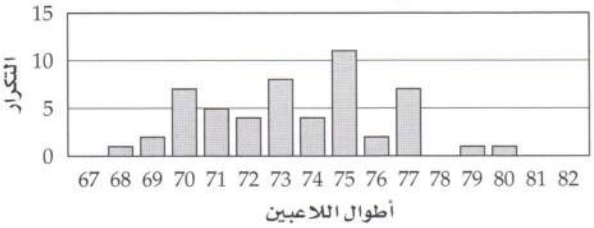
وتكون التجربة منحازة إذا علم أفراد المجموعة التجريبية أنهم يخضعون لتجربة، وأفراد المجموعة الضابطة أنهم لا يتدربون أسوة بأفراد المجموعة التجريبية.

الدرس 5-7 ، ص (114)

18)

أطوال اللاعبين بالبوصات							
74	69	75	73	70	75	76	77
74	73	77	70	76	73	72	75
74	71	77	75	75	71	73	69
75	72	72	77	70	73	70	71
70	77	68	71	75	75	77	71
77	79	75	75	80	73	73	70
72	75	73	70	74			

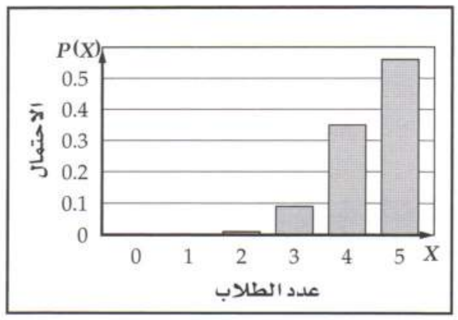
المتوسط للبيانات 73.47 in، الانحراف المعياري 2.73 in



الدرس 6-7، ص (120)

5)

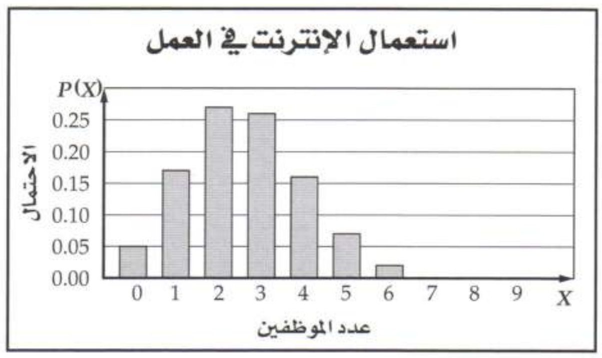
X	P(X)
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09
4	0.35
5	0.56



$\mu \approx 4.45$؛ إجابة ممكنة: من بين 5 طلاب من طلاب المرحلة الثانوية 4 منهم تقريبًا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، $\sigma^2 \approx 0.49$، $\sigma \approx 0.70$

6)

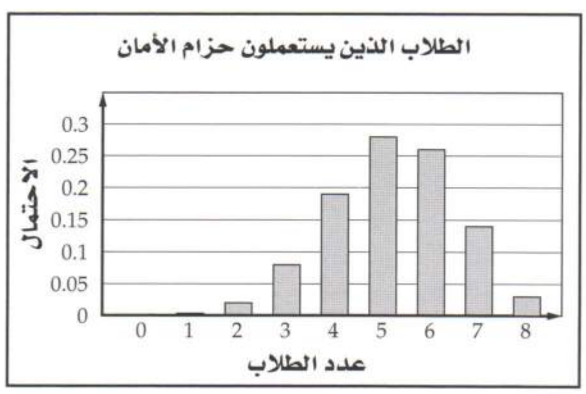
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00



$\mu \approx 2.60$؛ أجابة ممكنة: من بين 10 موظفين 3 منهم تقريبًا يستعملون الإنترنت في العمل $\sigma^2 \approx 1.92$، $\sigma \approx 1.39$

7)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03

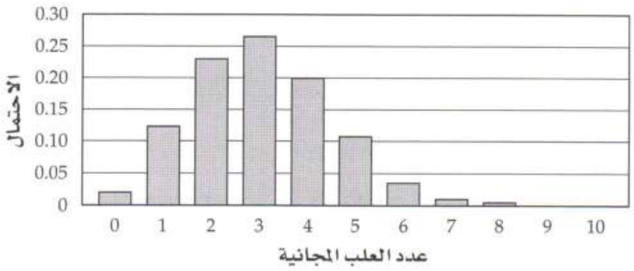


$\mu \approx 5.20$؛ إجابة ممكنة: من بين 8 طلاب من طلاب الجامعات الّذين يملكون سيارات خاصة 5 منهم تقريبًا يستعملون حزام الأمان أثناء قيادة سياراتهم، $\sigma^2 \approx 1.82$، $\sigma \approx 1.35$

11a)

عدد الطلاب	الاحتمال
0	00.0064%
1	00.15%
2	01.5%
3	08.2%
4	24.6%
5	39.3%
6	26.2%

13)



الفصل 8

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (129)

	الدرس 8-1 (4) حصص	الدرس 8-2 (4) حصص	استكشاف 8-3 حصة واحدة
العنوان	**تقدير النهايات بيانيًا**	**حساب النهايات جبريًا**	**معمل الحاسبة البيانية** **ميل المنحنى**
الأهداف	• تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة. • تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .	• إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة . • إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند المالانهاية.	• استعمال الحاسبة البيانية لتقدير ميل منحنى .
المفردات الأساسية	النهاية من جهة واحدة، النهاية من جهتين	التعويض المباشر الصيغة غير المحددة	
تمثيلات متعددة			
مصادر الدرس	•كتاب التمارين، ص (18) دون ضمن فوق	•كتاب التمارين، ص (19) دون ضمن فوق	**المواد** الحاسبة البيانية
التقنيات لكل درس	مدونة	السبورة التفاعلية	
تنويع التعليم	ص (136 , 138)	ص (146 , 148)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

النهايات والاشتقاق

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(25) حصة	(4) حصص	(29) حصة

الدرس 8-3 (4) حصص	الدرس 8-4 (4) حصص	الدرس 8-5 (4) حصص	الدرس 8-6 (4) حصص
المماس والسرعة المتجهة	المشتقات	المساحة تحت المنحنى والتكامل	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
• إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. • إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.	• إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات . • استعمال قانوني الضرب والقسمة في إيجاد المشتقات.	• تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات. • تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.	• ايجاد الدوال الأصلية. • استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.
المماس معدل التغيّر اللحظي قسمة الفرق السرعة المتجهة اللّحظية	المشتقة الاشتقاق المعادلة التفاضلية المؤثر التفاضلي	التجزيء المنتظم التكامل المحدد الحد الأدنى الحد الأعلى مجموع ريمان الأيمن التكامل	الدالة الأصلية التكامل غير المحدد النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
ص(155)	ص(164)	ص(172)	ص(179)
•كتاب التمارين، ص (20) دون ضمن فوق	•كتاب التمارين، ص (21) دون ضمن فوق	•كتاب التمارين، ص (22) دون ضمن فوق	•كتاب التمارين، ص (23) دون ضمن فوق
مدونة	الكاميرا التوثيقية	السبورة التفاعلية	مدونة
ص (153 ,155)	ص (162 ,164)	ص (168 ,170)	ص (177 ,179)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (156)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة، ص (180 – 184)
• اختبار الفصل، ص (185)

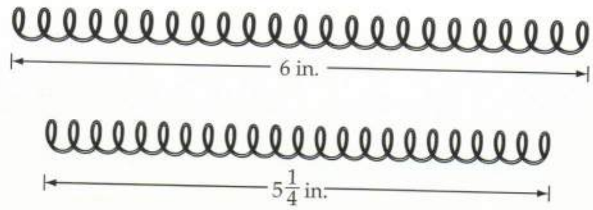
التقويم والمعالجة

	التشخيص	المرجع	إرشاد المعالجة	المرجع
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 8**			
	التهيئة للفصل 8، ص (129)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (129)	دليل المعلم
	بداية كل درس			
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	كتاب الطالب	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**			
	تحقق من فهمك	كتاب الطالب	تنويع التعليم	دليل المعلم
	مسائل مهارات التفكير العليا	كتاب الطالب	تنويع الواجبات المنزلية	دليل المعلم
	مراجعة تراكمية	كتاب الطالب	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	أمثلة إضافية	دليل المعلم		
	تنبيه!	دليل المعلم		
	(الخطوة 4)، التقويم	دليل المعلم		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
	منتصف الفصل			
	اختبار منتصف الفصل، ص (156)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (156)	دليل المعلم
			دليل الدراسة والمراجعة، ص (184-180)	كتاب الطالب
			زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل			
	دليل الدراسة والمراجعة للفصل 8، ص (184-180)	كتاب الطالب	مخطط المعالجة، ص (185)	دليل المعلم
	اختبار الفصل، ص (185)	كتاب الطالب		
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com			
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 8**			
	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com		زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون أحضر إلى الفصل بعض النوابض الشديدة المقاومة عند ضغطها، واطلب إلى الطلاب ضغط نابض منها وقياس طوله. أكّد لهم أن طول النابض المضغوط يصل إلى قيمة معينة.



المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة تلخص الفروق بين التكامل المحدد وغير المحدد. على أن يضمّنوا فقراتهم ذكر أوجه الشبه والاختلاف في خطوات حساب كل نوع منهما.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب عمل لوحات تلخص قواعد الاشتقاق المختلفة، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل. وعلى الطلاب أن يضمّنوا لوحاتهم وصفًا لكل قاعدة اشتقاق ومثالًا عليها. قم بتثبيت اللوحات على جدار الفصل؛ لتعين الطلاب على تذكر القواعد.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب كتابة إرشادات لإيجاد مشتقات دوال مختلفة، وأمثلة على جميع قواعد الاشتقاق تستعمل فيها هذه الإرشادات.

الفصل 8

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 8

مواضيع ذات علاقة من الفصل 1

- تقدير النهايات؛ لدراسة اتصال دالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.
- إيجاد متوسط معدل التغيّر باستعمال القاطع.
- إيجاد متوسط معدل تغيّر دالة.

الفصل 8

- تقدير نهايات الدوال عند قيم محددة، أو عند المالانهاية.
- إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة وعند المالانهاية.
- إيجاد معدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة باستعمال المشتقات.
- استعمال قانوني الضرب والقسمة في إيجاد المشتقات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- إيجاد الدوال الأصلية.
- استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الفصل 8

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- استعمال قواعد الاشتقاق؛ في حساب مشتقات دوال مختلفة.
- استعمال التكامل؛ في حساب المساحة بين منحنيي دالتين.
- إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

نظرة على الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًا

يمكن تقدير نهايات كثير من الدوال من خلال تكوين جداول لقيمها، أو من خلال تمثيلها بيانيًّا، فإذا اقتربت نهاية الدالة من اليسار ونهايتها من اليمين من القيمة نفسها للدالة، فإن النهاية موجودة عند قيمة المتغير المناظرة.

وإذا كان للدالة خطٌّ تقارب رأسي عند نقطة ما، فإن نهاية هذه الدالة غير موجودة عند تلك النقطة، ويمكن وصف سلوك الدالة عند تلك النقطة باللانهائي أو $\pm\infty$.

8-2 حساب النهايات جبريًا

تستعمل الطرائق الجبرية أيضًا لحساب النهايات، والخطوة الأولى لإيجاد النهاية هي محاولة تعويض القيمة التي يقترب منها المتغيّر في الدالة، فإذا كان ناتج التعويض صيغة غير محددة مثل $\frac{0}{0}$ ، فإن الطرق الجبرية الأخرى تستعمل لتبسيطها، بحيث يمكننا التعويض مرةً أخرى بشكل مباشر.

ومن الطرائق الجبرية المستعملة في حساب النهايات التحليلُ إلى العوامل لتبسيط المقدار بحيث يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر. وفي دوال القوى عندما يقترب المتغيّر من ∞، فإن النهاية هي ∞، أما إذا اقترب المتغيّر من $-\infty$، فإن النهاية تكون ∞، أو $-\infty$ ، وذلك حسب درجة الدالة من حيث كونها زوجية، أو فردية على الترتيب. أما بالنسبة لدوال المقلوب، فإن $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

النهايات والاشتقاق

8-3 المماس والسرعة المتجهة

إن معدل تغيّر الدالة الخطية هو نفسه ميل المستقيم الذي يمثّلها. ومعدل تغيّر دالة غير خطية عند نقطة ما عليها هو ميل مماس منحنى هذه الدالة عند تلك النقطة. وميل المماس هو معدل التغير اللحظي عند هذه النقطة. وتستعمل الصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ؛ في إيجاد معدل التغيّر اللحظي عند النقطة $(x, f(x))$. وتستعمل أيضًا في إيجاد السرعة المتجهة اللحظية عند نقطة، أو في إيجاد معادلة تمكننا من حساب السرعة المتجهة اللحظية عند أي نقطةٍ على منحنى الدالة.

8-4 المشتقة

مشتقة الدالة هي النهاية التي تُستعمل في إيجاد ميل مماس منحنى هذه الدالة عند أي نقطة عليها، والاشتقاق هو الاسم الذي يُطلق على عملية إيجاد المشتقة، والجدول أدناه يلخص بعض قواعد الاشتقاق:

	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	$f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = x^2$ فإن $f'(x) = 2x$
مشتقة الثابت	$f(x) = c$, $f'(x) = 0$	إذا كان $f(x) = 6$ فإن $f'(x) = 0$
مشتقة مضاعفات القوى	$f(x) = c\,x^n$, $f'(x) = cnx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = 3x^2$ فإن $f'(x) = 6x$
مشتقة المجموع أو الفرق	$f(x) = g(x) \pm h(x)$, $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$ فإن $f'(x) = 6x + 2 - 0$ $= 6x + 2$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

يعرض هذا الدرس طريقتين لحساب المساحة تحت منحنى دالة.

الطريقة الأولى تتم من خلال جمع مساحات مستطيلات صغيرة تشكّل المساحة تحت المنحنى، وتزداد دقة هذه الطريقة كلما زاد عدد المستطيلات المستعملة في الحساب.

أما الطريقة الثانية فهي من خلال التكامل، والذي يستعمل النهايات بدلًا من المستطيلات. وهذه الطريقة أكثر دقة ولا تحتاج لحساب مساحات عدة مستطيلات.

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا أُعطينا دالة مكتوبة على صورة مشتقة لدالة أخرى، فإن الدالة الأخرى تُسمى الدالة الأصلية للدالة المعطاة. وهناك خيارات كثيرة لها؛ لأن الحد الثابت فيها غير معلوم.

الدالة الأصلية للدالة $f(x) = kx^n$ هي $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$ حيث k و n عددان معلومان $n \neq -1$ ، C أي عدد حقيقي.

وترشدنا النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل إلى طريقة إيجاد التكامل دون اللجوء إلى النهايات، وبما أن العدد الثابت ليس ذا أهمية في التكامل المحدد، فإنه إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

الفصل 8 ملاحظات

مشروع الفصل

الأفعوانية

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن النهايات والاشتقاق؛ لوصف سرعة وموقع عربة الأفعوانية المتغيرين.

- اطلب إلى الطلاب جمع معلومات حول حدود الارتفاعات والسرعات التي تبلغها الأفعوانيات.
- اطلب إليهم مناقشة عدة طرائق؛ لاختبار معدلات سرعة عربة الأفعوانية في فترات زمنية مختلفة؛ لمعرفة إن كان وزنها يؤثر في معدل سرعتها.
- اطلب إليهم العمل معًا في مجموعات واستعمال المعلومات التي جمعوها خلال البحث لتعريف دالة تُمثّل جزءًا من مسار العربة واستعمال هذه الدالة؛ في إيجاد معدلات سرعة العربة في ثلاث نقاط مختلفة خلال حركتها.
- اطلب إلى كل مجموعة تلخيص ما توصلت إليه وعرضه أمام الفصل.

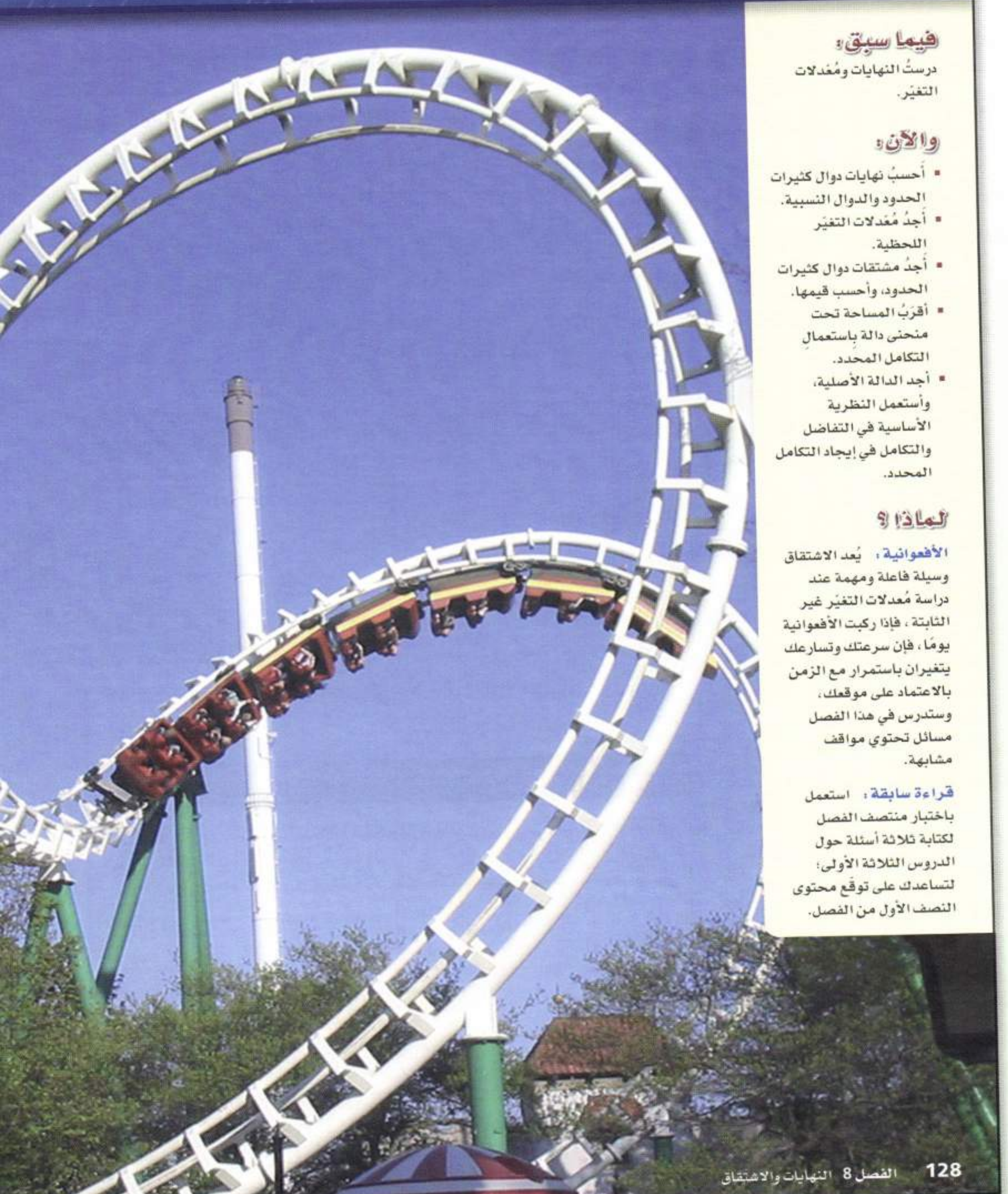
المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

التعريف: ينص قانون مشتقة القوة على أنه إذا كان $f(x) = x^n$، فإن مشتقة الدالة هي $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال: إذا كان $f(x) = 3x^4$، فإن $f'(x) = 12x^3$.

سؤال: ما مشتقة $5x^2$؟ $10x$

الفصل 8 النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation



فيما سبق:

درستُ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن:

- أَحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أَجدُ مُعَدلات التغيّر اللحظية.
- أَجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأَحسب قيمها.
- أقرّبُ المساحة تحت منحنى دالة باستعمالِ التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل باختبار منتصف الفصل لكتابة ثلاثة أسئلة حول الدروس الثلاثة الأولى؛ لتساعدك على توقع محتوى النصف الأول من الفصل.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: **4-1) انظر ملحق الإجابات.**

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$ 2) $f(x) = \frac{7}{x}$

3) $p(x) = \frac{x+5}{x-4}$ 4) $m(x) = \frac{7-10x}{2x+7}$

5) **صناعة:** يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة عندما تقترب x من موجب مالانهاية. **تقترب قيمة $A(x)$ من 1200 عندما تقترب x من موجب مالانهاية.**

أوجد متوسط مُعدل تغيّر كل دالةٍ مما يأتي على الفترة المعطاة:

6) $g(x) = 2x^2 + 4x - 1, [-2, 1]$ **2**

7) $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6, [-4, -1]$ **−17**

8) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 1, [-2, 4]$ **55**

9) **أفعوانيات:** يمكن تمثيل جزء من مسار عربة أفعوانية بالدالة $f(x) = 2x^2 + 14x + 25$، حيث $-50 \le x \le 50$. أوجد متوسط معدّل تغيّر موقع العربة في الفترة $[0, 25]$. **64**

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي: **10–13) انظر الهامش.**

10) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$ 11) $h(x) = \frac{2x^2-8}{x-10}$

12) $f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$ 13) $g(x) = \frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي: **14–19) انظر الهامش.**

14) $3, 7, 11, 15, \ldots$ 15) $8, 3, -2, -7, \ldots$

16) $5, -1, -7, -13, \ldots$ 17) $-4, 12, -36, 108, \ldots$

18) $5, -10, 20, -40, \ldots$ 19) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

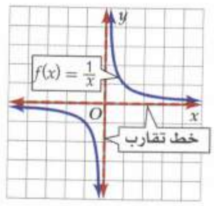
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

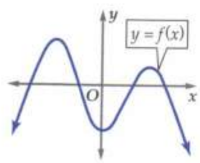
مراجعة المفردات

النهاية (limit)
مفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

خطوط التقارب (asymptotes)
خط رأسي أو أفقي يقترب منحنى الدالة منه دون أن يصله.



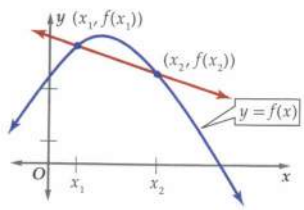
الدالة المتصلة (continuous function)
تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

الفجوات (hols)
نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة، وتحدث عندما يكون بين بسط ومقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

متوسط معدل التغير (average rate of change)
متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة $f(x)$ هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فاختر" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بمراجعة الطلاب في: استعمال التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة، وإيجاد معادلات خطوط التقارب، وإيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معطاة.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

10) $y = 2$
11) $x = 10$
12) $x = -2, x = 4, y = 1$
13) $x = 2, y = 1$
14) $19, 23, 27, 31$
15) $-12, -17, -22, -27$
16) $-19, -25, -31, -37$
17) $-324, 972, -2916, 8748$
18) $80, -160, 320, -640$
19) $0, 7, 14, 21$

تنويع التعليم

ضمن دون

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالمفردات الواردة في الفصل، وكتابة تعريف أو وصف لكل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها بوصفها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

8-1 تقدير النهايات بيانيًا
Estimating Limits Graphically

فيما سبق:
درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

والآن:
- أقدر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات:
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

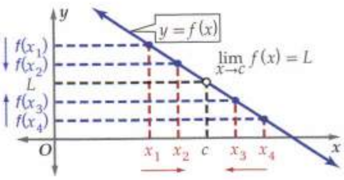
النهاية من جهتين
two-sided limit

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
هل هناك نهايات للأرقام المسجلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة: $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:
- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.

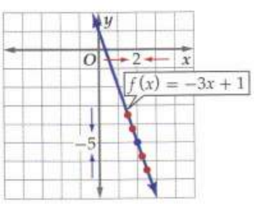


تعلمت في الدرس 3-1 أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c، أو $\lim_{x \to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدّر $\lim_{x \to 2}(-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x + 1$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x \to 2}(-3x + 1) = -5$$

التعزيز عدديًا: كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ⟵ | ⟶ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	-4.7	-4.97	-4.997		-5.003	-5.03	-5.3

يبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5، وذلك يعزّز تحليلنا البياني.

✓ تحقق من فهمك
قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم. انظر ملحق الإجابات

(1A, 1B) للجداول والتمثيل البياني

(1A $\lim_{x \to -3}(1 - 5x)$ **16**

(1B $\lim_{x \to 1}(x^2 - 1)$ **0**

8-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1
تقدير النهايات؛ لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

الدرس 8-1
تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة.
تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .

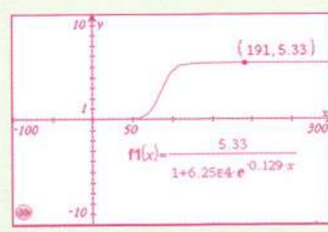
ما بعد الدرس 8-1
حساب النهايات جبريًا.

2 التدريس

[أ]سئلة التعزيز
[اط]لب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

[ا]سأل:

- ما ميزات منحنى الدالة $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213e^{-0.129x}}$؟ يتزايد بشكل مُطّرد، ثم يتوقف التزايد مع الاقتراب من نهاية ما .
- هل تقترب الدالة من قيمة محددة كلما اقتربت x من المالانهاية؟ تقترب الدالة من 5.334 كلما اقتربت x من المالانهاية.
- استعمل الحاسبة البيانية؛ لتَمثيل الدالة بيانيًّا. ووظّف هذا المنحنى في إيجاد نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. 5.334



مصادر الدرس 8-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (136)	• تنويع التعليم، ص (136)	• تنويع التعليم، ص (138)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)

في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim_{x\to2}(-3x+1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

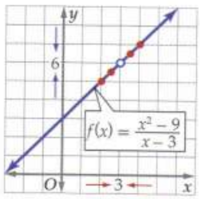
مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدّر $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا:

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$



التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ⟵ ⟶ x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك (2A, 2B للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك من خلال جدول قيم.

2A) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-4}$ −0.25

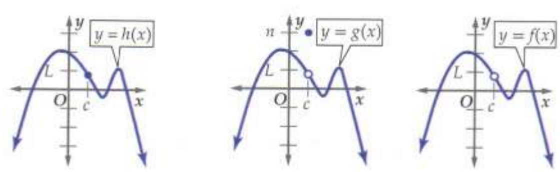
2B) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ 6

في المثال 2 ، لاحظ أن نهاية $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3)\neq6$. فالعبارة $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرف عندما $x=3$. وهذه الملاحظة توضّح مفهومًا مهمًا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



$\lim_{x\to c}f(x)=L$ ، $f(c)$ غير معرفة

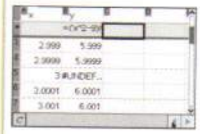
$\lim_{x\to c}g(x)=L$ ، $g(c)=n$

$\lim_{x\to c}h(x)=L$ ، $h(c)=L$

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

إرشاد تقني

جداول لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة (on) ، ثم اختيار الجدول بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة.



تقدير النهايات عند قيم محددة

الأمثلة 1-5 تُبيّن كيفية استعمال التمثيل البياني في تقدير نهايات أنواع مختلفة من الدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قدّر $\lim_{x\to-7}(4x+1)$ باستعمال التّمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم. −27 ؛ للتّمثيل البياني انظر الهامش

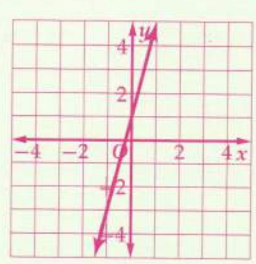
x	$f(x)$
−7.01	−27.04
−7.001	−27.004
−7	
−6.999	−26.996
−6.9	−26.96

2 قدّر $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$ باستعمال التّمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم. 8 ؛ للتّمثيل البياني انظر الهامش.

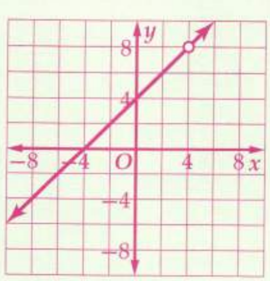
x	$f(x)$
3.99	7.99
3.999	7.999
4	
4.001	8.001
4.01	8.01

إجابات (مثالان إضافيان):

(1



(2



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهة واحدة**.

مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_1$، وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_2$، وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه إذا كانت:

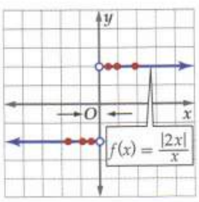
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L ،$$

فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

مثال 3 — تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x}, \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x}, \lim\limits_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$

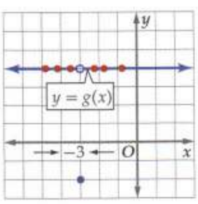


يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أنّ:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b) $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ ، حيث
$$g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$$



يُبيّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أنّ:

$$\lim_{x \to -3^-} g(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x \to -3^+} g(x) = 4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان، فإن $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

✓ تحقق من فهمك

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

3A) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ، حيث: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \ x < 1 \\ 2x + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

3B) $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ ، حيث: $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \ x < -2 \\ -x^2 & , \ x \geq -2 \end{cases}$

إرشادات للدراسة

وصف النهاية إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين ولا يمكن التعبير عنهما باستعمال $+\infty$، أو $-\infty$، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

(3A $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

(3B $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = -4,$
$\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ غير موجودة

مثال إضافي

قدّر كلًّا من النهايات الآتية:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x), \lim\limits_{x \to 1^+} f(x),$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ، حيث

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & , x < 1 \\ x + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2,$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
إذن،
$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x), \lim\limits_{x \to 0^+} g(x),$ $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ، حيث

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1,$
$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1,$
$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$
إذن،
$\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ موجودة وتساوي -1

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: أنشيء صفحة إلكترونية حول النهايات والاشتقاق، وحدِّث هذه الصفحة بعد نهاية كل درس من خلال إضافة ملاحظات ومقاطع مصورة ومصادر أخرى، ثم اطلب إلى الطلبة تحديث المعلومات.

قراءة الرياضيات

النهاية غير المحدودة تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

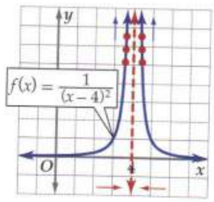
إن عدم وجود نهاية للدالة f عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:



$$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلتا النهايتين من اليسار ومن اليمين غير موجودتين. لذا، فإن $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ غير موجودة، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

التعزيز عدديًا:

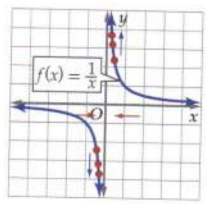
x تقترب من 4 ←   → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن:



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين. إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير موجودتين. لذا، فإن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من 0 ←   → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

تنبيه!

النهايات عند المالانهاية من الضروري أن نفهم أن العبارتين
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

✓ تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

4A) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$ غير موجودة

4B) $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{2}{x^4}$ $-\infty$

مثال إضافي

4 قدِّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ ∞

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^3}$ غير موجودة

المحتوى الرياضي

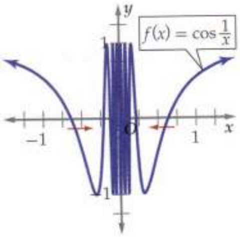
النهايات إن التعريف الرياضي للنهاية هو $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ إذا وفقط إذا وُجِد لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي آخر $\delta > 0$ بحيث يكون $|f(x) - L| < \varepsilon$ عندما يكون $0 < |x - p| < \delta$.

لا تعتمد قيمة النهاية على قيمة $f(p)$، ولكنها تعتمد على قيم الدالة في جوار p.

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذب بشكل مستمر بين العددين 1 ، -1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0، مما يعني أنه لأي قيمة قريبة من الصفر x_1، بحيث $f(x_1) = 1$، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًا من الصفر مثل x_2، بحيث $f(x_2) = -1$، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3، بحيث $f(x_3) = -1$، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

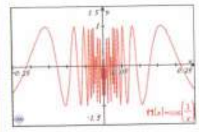
5A) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة

5B) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \sin x)$ 0

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي

يمكنك استعمال خاصية TRACE في الحاسبة البيانية في تقريب نهاية الدالة، إلا أنه لا يمكنك الوثوق دائمًا بالحاسبة البيانية، ففي مثال 5 تستعمل الحاسبة البيانية عددًا محدودًا من النقاط في تمثيل المنحنى، في حين أن للدالة عددًا لانهائيًا من التذبذبات بالقرب من العدد 0.



نلخِّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو من اليمين أو من كلا الجهتين.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

تقدير النهاية عند المالانهاية: درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي النهايات عند المالانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 ».
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 ».

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f، إذا كانت $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f، إذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$

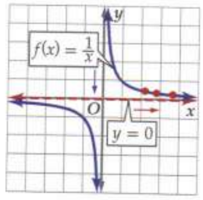
مثال إضافي

5 قدِّر $\lim\limits_{x\to 0} (x \sin x)$. 0

مثال 6 تقدير النهاية عند اللانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.

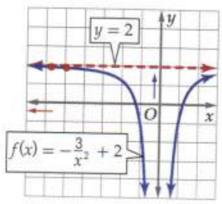
التعزيز عدديًا:

x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0. ✓

b) $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right)$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 2$ المجاور أن $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right) = 2$ ، فكلما قلّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.

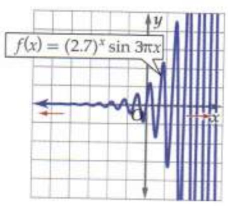
التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$

x	−10000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

c) $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ ، $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن: $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0. في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدة.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ ، x تقترب من ∞

x	−100	−50	−10	0	10	50	100
$f(x)$	4.9×10^{-44}	-2.5×10^{-22}	−0.000048	0	20533	3.4×10^{21}	-9.2×10^{42}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 2$.

تنبيه!

السلوك المتذبذب إن تذبذب الدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب غير محدود بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

تقدير النهاية عند المالا نهاية

المثالان 6, 7 يبيِّنان كيفية تقدير النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

6 قدِّر كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right)$ 1

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)$ −1

c) $\lim_{x\to\infty} \cos x$ غير موجودة

إرشادات للمعلم الجديد

خطوط التقارب للدالة سلوك غير محدود عند خطوط التقارب الرأسية، ويمكن وصف هذا السلوك بـ $\pm\infty$ ، في حين تكون نهاية الدالة التي لها خط تقارب أفقي $y = c$ مساوية لـ c عند اقتراب قيم x من ∞ أو $-\infty$.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

6A) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ -3 6B) $\lim_{x\to-\infty}5^x$ 0 6C) $\lim_{x\to\infty}\sin x$ غير موجودة

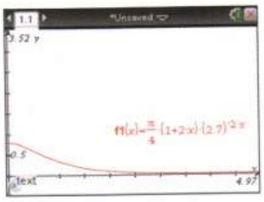
يمكنك استعمال التمثيل البياني أو الطريقة العددية لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة — تقدير النهاية عند المالانهاية

a) **هيدروليك:** تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرك لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ تمثل زاوية فتحه θ بعد t ثانية. قدِّر $\lim_{t\to\infty}\theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مَثِّل الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $t=0$، فإن $\theta(t)=\frac{\pi}{4}\approx 0.785$.

لاحظ أنه كلما زادت قيم t، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.

أي أن $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=0$.

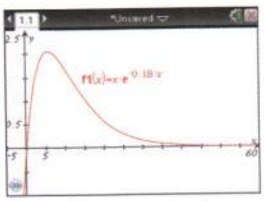
فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

b) **دواء:** يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل ملتر بالعلاقة $C(t)=t2^{-0.18t}$، حيث الزمن t بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim_{t\to\infty}C(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مَثِّل الدالة $C(t)=t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني، أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim_{t\to\infty}C(t)=0$.



فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

الربط مع الحياة

تستعمل الأنظمة الهيدروليكية في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

تحقق من فهمك

7A) **كهرباء:** يزوِّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يعطى بالعلاقة $V(t)=165\sin 120\pi t$، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim_{t\to\infty}V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

7B) **أحياء:** عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t)=\frac{230}{1+56.5(2.7)^{-0.37t}}$، قدِّر $\lim_{t\to\infty}P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسر معناها.

7A) $\lim_{t\to\infty}V(t)$ غير موجودة، حيث يتذبذب منحنى $V(t)$ بين -165 و 165. كلما ازدادت t.

7B) $\lim_{t\to\infty}P(t)=230$، سيصبح عدد الذبابات 230 ذبابة مع مرور الزمن.

مثال إضافي

a) **بكتيريا:** يُمكن نمذجة نمو مجتمع بكتيري بالدالة $B(t)=\frac{675}{1+135^{-0.6t}}$، حيث t الزمن بالساعات. قدِّر $\lim_{t\to\infty}B(t)$، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim_{t\to\infty}B(t)=675$، المجتمع البكتيري يصل إلى 675 كحد أقصى مع مرور الزمن.

b) **سكان:** يُعطى عدد سكان مدينة ما بالعلاقة $P(t)=0.7(1.1)^t$، حيث t الزمن بالسنوات. قدِّر $\lim_{t\to\infty}P(t)$، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim_{t\to\infty}P(t)=\infty$؛ أي أن عدد سكان هذه المدينة سيزداد مع مرور الزمن بلا حدود.

تنويع التعليم

دون — ضمن

المتعلِّمون الحركيُّون: استعمل شريطًا لاصقًا أو حبلًا لرسم مستوى إحداثي على أرضية الفصل، واطلب إلى أحد الطلاب الوقوف عند نقطة الأصل، ثم اطلب إلى مجموعة من الطلاب أن يقفوا ليشكّلوا منحنى دالة على المستوى الإحداثي، وناقشهم في قيمة نهاية الدالة عند نقطة باستعمال الإحداثيات التي تمثِّلها مواقعهم، ثم اطلب إليهم تغيير مواقعهم وتشكيل منحنى جديد.

تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. (المثالان 1, 2) 1–8) للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات

1) $\lim_{x\to5}(4x-10)$ 10

2) $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$ 12

3) $\lim_{x\to-2}(x^2+2x-15)$ −15

4) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ −3

5) $\lim_{x\to0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$ 0

6) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ 4

7) $\lim_{x\to6}(x+\sin x)$ 5.72

8) $\lim_{x\to-5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$ −9

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 3)

9) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x}$ 0

10) $\lim_{x\to0^-}\frac{|4x|}{x}$ −4

11) $\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{|x|}$ 0

12) $\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ 1

13) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$ 0

14) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$ غير موجودة

15) $\lim_{x\to0^-}(\sqrt{-x}-7)$ −7

16) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$ 10

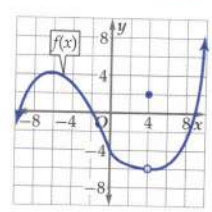
17) $\lim_{x\to0}\frac{|3x|}{2x}$ غير موجودة

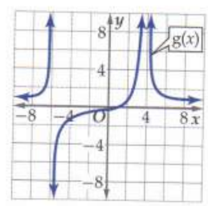
18) $\lim_{x\to-1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$ غير موجودة

19) $f(x)=\begin{cases}x-5 & , x<0\\ x^2+5 & , x\ge0\end{cases}$ ، $\lim_{x\to0}f(x)$ غير موجودة

20) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & , x<0\\ \frac{2x}{x} & , x\ge0\end{cases}$ ، $\lim_{x\to0}f(x)$ 2

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 1-4)





21) $\lim_{x\to-4}f(x)$ 3

22) $\lim_{x\to4}g(x)$ ∞

23) $\lim_{x\to4}f(x)$ −6

24) $\lim_{x\to-6}g(x)$ غير موجودة

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 4-6)

25) $\lim_{x\to-4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$ −∞

26) $\lim_{x\to4}\frac{|x|}{x-4}$ غير موجودة

27) $\lim_{x\to5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$ ∞

28) $\lim_{x\to6}\frac{5}{(x-6)^2}$ ∞

29) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$ −∞

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$ 0

31) $\lim_{x\to\infty}x\cos x$ غير موجودة

32) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$ −1

33) $\lim_{x\to0}\frac{\sin|x|}{x}$ غير موجودة

34) $\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$ 0

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيِّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7) (a, b انظر الهامش)

a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to1}f(w)$ ، $\lim_{w\to3}f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to\infty}f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

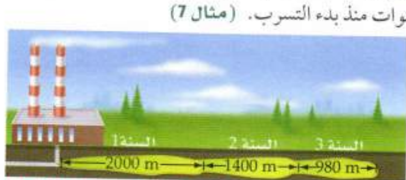
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d)=12(1.25012)^d-12$ ، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7) (a–c انظر الهامش)

a) مَثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا في الفترة $0\le d\le20$.

b) قدِّر عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر، العشرين. ما عدد مشاهدي البرنامج بعد شهرين ($d=60$)؟

c) قدِّر $\lim_{d\to\infty}f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبَّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسربة بالدالة $d(t)=2000(0.7)^{t-1}, t\ge1$ ، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرب. (مثال 7)



(a, b, d انظر ملحق الإجابات)

a) مَثِّل الدالة بيانيًّا في الفترة $1\le t\le15$.

b) استعمل التمثيل البياني لإيجاد قيم d عندما $t=5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty}d(t)$. 0

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسربة لمستشفى يقع على بعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-37 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

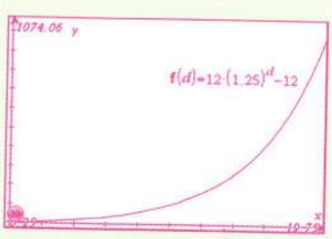
أخطاء شائعة في التمارين 9-13 ذكّر الطلاب أن نهاية الدالة عند c من أي جهة يمكن أن تكون موجودة، على الرغم من أن الدالة يمكن أن تكون غير معرّفة عند c ، أو النهاية غير موجودة عند c.

إجابات

35a) $\lim_{w\to1}f(w)=250$; $\lim_{w\to3}f(w)=100$

35b) 0؛ إجابة ممكنة: سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن.

36a)



36b) 7875584 نحو ،25, 100, 1031 شخصًا سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين.

36c) ∞، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31، 48، 49، 51، 52، 54–61
ضمن المتوسط	1–47 فردي، 48، 49، 51، 52، 54–61
فوق المتوسط	32–61

تنبيه !

اكتشف الخطأ في السؤال 48 على الطلاب معرفة عدم وجود النهاية عند هذه النقطة من التمثيل البياني للدالة؛ وذلك لاختلاف النهايتين من اليسار واليمين.

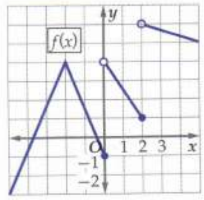
4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلاب في الدرس التالي بإيجاد النهايات جبريًّا. اطلب إليهم الكتابة حول فائدة هذا الدرس في تعلم الدرس القادم .

إجابة:

(47 غير موجودة؛ تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد -5 من اليمين ومن اليسار.

للدالة الممثلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



(38 $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ -1

(39 $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ 4

(40 $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

(41 $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ 1

(42 $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ 6

(43 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 2.5

حاسبة بيانية: حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية:

(44 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ غير موجودة؛ خط تقارب رأسي

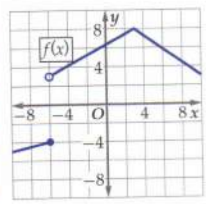
(45 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$ غير موجودة؛ خط تقارب رأسي

(46 $\lim_{x\to 0} 3\cos\frac{\pi}{x}$ غير موجودة؛ تذبذب

(47 $\lim_{x\to -5} \frac{|x+5|}{x+5}$ انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

(48 **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

(49 **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة، و $f(0)$ غير معرفة، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$، بحيث تكون $g(0)$ معرفة، ولكن $\lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة. انظر ملحق الإجابات

(50 **تحدٍّ:** إذا كان $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ ، $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2} g(x)$. وإذا كان $f(a) \neq 0$ ، $g(a) = 0$ ، فماذا يمكنك القول عن $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

(51 **تبرير:** حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

إذا كان $f(c) = L$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(52 **مسألة مفتوحة:** مَثِّل بيانيًّا دالة تحقق كلًّا مما يأتي: $f(0) = 2, f(2) = 5$ ، $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$ ، و $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة. انظر ملحق الإجابات

(53 **تحدٍّ:** قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f إذا كانت موجودة:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 , & x < -1 \\ -1 , & -1 \le x \le 0 \\ x^2 , & 1 < x \le 2 \\ x-3 , & x > 2 \end{cases}$$

(a $\lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة   (b $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة   (c $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ -1

(54 **اكتب:** وضح طريقتك لتقدير نهاية دالة متصلة ، ثم بيِّن الفرق بين هذه الطريقة وطريقة تقدير نهاية دالة غير متصلة. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

(55, 56 انظر ملحق الإجابات.

(55 أثبت صحة المتطابقة. (الدرس 3-2)

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right) = \cos^2\theta$$

(56 ابحث في اتصال $h(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$ ، عندما $x = -5, x = 5$. وإذا كانت الدالة h غير متصلة فحدِّد نوع عدم الاتصال، وهل هو عدم اتصال لا نهائي، أو عدم اتصال قفزي، أو عدم اتصال غير قابل للإزالة؟ (الدرس 3-1)

(57 أوجد متوسط مُعدّل تغيّر $f(x) = \sqrt{x-6}$ في الفترة $[8, 16]$ (الدرس 4-1) 0.219

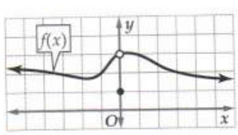
أوجد قياس الزاوية بين كل زوج متجهات مما يأتي: (الدرس 5-6) انظر ملحق الإجابات

(58 $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 7, 6\rangle$ $63.0°$

(59 $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ $93.4°$

تدريب على اختبار

(60 باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟   C



A 0   C 3

B 1   D النهاية غير موجودة

(61 أيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ؟   A

I للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي.

II للدالة نقطة عدم اتصال قفزي.

III للدالة نقطة عدم اتصال نقطي.

A I فقط   C II فقط

B I , III فقط   D I و II فقط

تنويع التعليم

فوق

توسّع: إذا احتوى كل من بسط ومقام الدالة النسبية العامل الخطي نفسه، فإن بإمكاننا إزالة نقطة عدم الاتصال الناتجة من هذا العامل من خلال اختصاره، ومثالًا على ذلك أوجد نقطة عدم الاتصال التي يمكن إزالتها للدالة $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14}$. هل النهاية موجودة عند تلك النقطة؟ وضح إجابتك.

$\left(2, \frac{2}{3}\right)$؛ نعم لأن النهايتين من اليسار واليمين متساويتان .

8-2 حساب النهايات جبريًا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق:
درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا.

والآن:
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات:
التعويض المباشر
direct substitution
الصيغة غير المحددة
indeterminate form

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟


إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$، حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدها الأدنى أو الأعلى.

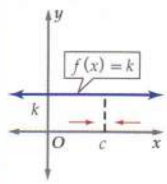
حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 1-8 تقدير النهايات بيانيًا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي **نهايات الدوال**

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

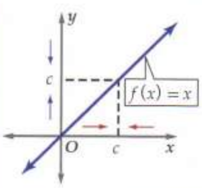
الرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدالة المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

مفهوم أساسي **خصائص النهايات**

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x \to c} [k f(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$، حيث $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$، إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ عندما n عدد زوجي.

مصادر الدرس 2-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (146)	• تنويع التعليم، ص (146)	• تنويع التعليم، ص (146, 148)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)

8-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-8
تقدير النهايات بيانيًا عدديًا.

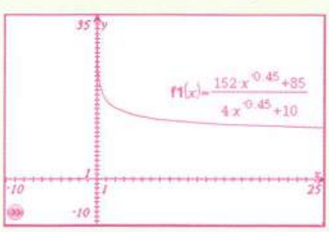
الدرس 2-8
إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 2-8
استعمال النهايات في حساب ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة.
استعمال النهايات في حساب المساحات تحت المنحنيات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما النهاية التي تقترب منها x عندما تكون الاستضاءة في حدها الأدنى أو الأعلى؟ $0; \infty$
- مثّل العلاقة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانيّة. وضّح ما الذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة ؟



يقل قطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

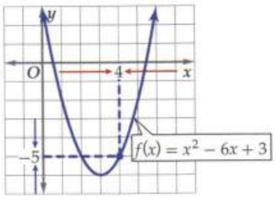
$\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim\limits_{x\to 4}x^2-\lim\limits_{x\to 4}6x+\lim\limits_{x\to 4}3$ خاصيتا المجموع و الفرق

$=\left(\lim\limits_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}3$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=4^2-6\cdot 4+3$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=-5$ بالتبسيط

تحقق يعزز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة. ✔



b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^3+1}{x-5}$

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^3+1}{x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-5)}$ خاصية القسمة

$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}4x^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ خاصيتا المجموع و الفرق

$=\frac{4\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ خاصيتا القوة الضرب في ثابت

$=\frac{4(-2)^3+1}{-2-5}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=\frac{31}{7}$ بالتبسيط

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من 2− من الجهتين. ✔

x تقترب من 2− ⟵ ⟶ x تقترب من 2−

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}$

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(8-x)}$ خاصية الجذر النوني

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}8-\lim\limits_{x\to 3}x}$ خاصية الفرق

$=\sqrt{8-3}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=\sqrt{5}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3+4)$ -4

1B) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$ $\frac{1}{9}$

1C) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+3}$ $\sqrt{2}$

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية، كما هو موضح فيما يأتي:

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند المالانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

حساب النهاية عند نقطة

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص النهايات؛ في حساب النهايات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل خصائص النهايات في حساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x-4)$ 11

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3}{x+2}$ -1

c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+4}$ $\sqrt{6}$

إرشادات للدراسة

الدوال جيدة السلوك
تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود دوالَّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي **نهايات الدوال**

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود، وكان c عددًا حقيقيًا، فإن $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالة نسبية، وكان c عددًا حقيقيًا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر**، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 **استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات**

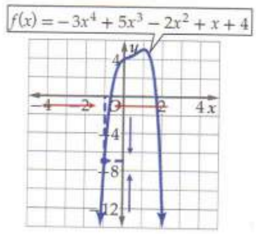
احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -1}(-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة. ✔



b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2} = \frac{48}{-6} = -8$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim\limits_{x\to 4}(x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ 3

2B) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x + 1}{x^2 + 3}$ $\frac{-1}{7}$

2C) $\lim\limits_{x\to -8}\sqrt{x + 6}$ غير ممكن، لأن $\lim\limits_{x\to -8}\sqrt{x + 6} = \sqrt{-2} \notin$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0

حساب النهاية عند نقطة

المثال 2 يُبيِّنُ كيفية استعمال التعويض المباشر في حساب النهايات.

مثال إضافي

2 احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

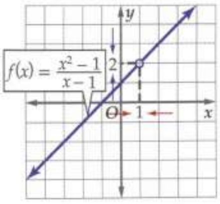
a) $\lim\limits_{x\to 2}(-2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 5)$ -3

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2 + 1}{x - 2}$ -2

c) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{x + 3}$ غير ممكن؛ لأن $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{x + 3} = \sqrt{-1} \notin R$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحَلّ الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ ذلك في صفحات الملاحظات، ثم أرسلها للطلاب بوصفها مرجعًا إضافيًّا خارج الصف.



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .

على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن دراسة هذه الصيغة قد ترشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي :

(a $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}=\frac{(-4)^2-(-4)-20}{-4+4}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

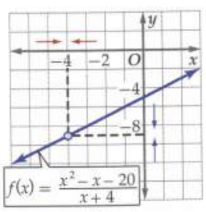
$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ بتحليل البسط

$$=\lim_{x\to -4}\frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ باختصار العامل المشترك

$$=\lim_{x\to -4}(x-5)$$ بالتبسيط

$$=(-4)-5=-9$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-x-20}{x+4}$ هذه النتيجة. ✓



(b $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}=\frac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$ بتحليل المقام

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$ باختصار العامل المشترك

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-7}$$ بالتبسيط

$$=\frac{1}{(3)^2-7}=\frac{1}{2}$$ بالتعويض المباشر والتبسيط

تنبيه!
التحليل عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0 .

✓ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(3A $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$ **20**

(3B $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$ $\frac{1}{5}$

حساب النهاية عند نقطة

المثال 3 يُبيِّنُ كيفية استعمال التحليل؛ في حساب النهايات.

مثال إضافي

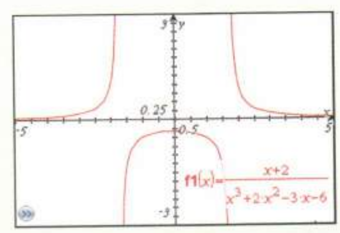
3 أحسب كل نهاية مما يأتي :

(a $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$ **5**

(b $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+2x^2-3x-6}$ **1**

إرشادات للمعلم الجديد

الحاسبة البيانية : قد يظهر في بعض الأحيان عند رسم منحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية أكثر من جزء للمنحنى كما في المثال الإضافي 3b.



لذا ذكّر الطلاب بأننا نهتم فقط بجزء المنحنى قرب النقطة التي نحسب النهاية عندها، أي عندما تقترب x من -2 في هذا المثال.

حساب النهاية عند نقطة

المثال 4 يُبيِّنُ كيفية استعمال فكرة إنطاق البسط أو المقام؛ في حساب النهايات .

مثال إضافي

4 احسب $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. $\frac{1}{4}$

يَنتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة ، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4},\ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند نقطة وحيدة c في مجاليهما ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim_{x\to -4} (x-5) = \lim_{x\to -4} \frac{x^2-x-20}{x+4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتجِ التعويضِ فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{0}{0}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ بضرب كلٍّ من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

$= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$ بالتبسيط

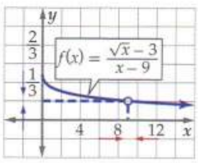
$= \lim_{x\to 9} \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$ باختصار العامل المشترك

$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ بالتبسيط

$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{1}{6}$ بالتبسيط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة. ✓



✓ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4A $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ 10

(4B $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ $-\frac{1}{4}$

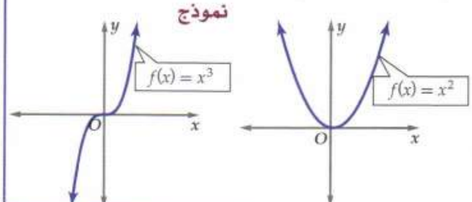
حساب النهايات عند المالانهاية: درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x\to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود ، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c؛ لذا فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من $-\infty$، حيث $-1(\infty) = -\infty$.

مفهوم أساسي **نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية**

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \;,\; \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.

مثال 5 **نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية**

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2)$

$\lim\limits_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2) = \lim\limits_{x \to \infty} -x^2$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\lim\limits_{x \to \infty} x^2$ خاصية الضرب في ثابت

$= -\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^4$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= 5 \lim\limits_{x \to -\infty} x^4$ خاصية الضرب في ثابت

$= 5 \times \infty = \infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$ $-\infty$ **5B)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$ ∞ **5C)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$ $-\infty$

ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

إرشادات للدراسة

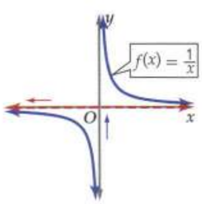
دالة المقلوب

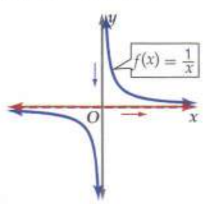
تذكر أن دالة المقلوب هي $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي **نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية**

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n، فإن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

حساب النهايات عند المالانهاية

المثال 5 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود عند الاقتراب من ∞، $-\infty$.

مثال إضافي

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^4 + x^3 - 7)$ ∞

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - x^2 + 8)$ $-\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x^2 + x - 7)$ ∞

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عن المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3}$

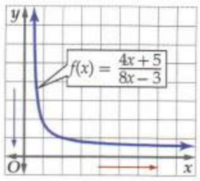
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بالتبسيط

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✔



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$ بالتبسيط

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{6\cdot 0-0}{3+0} = 0$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{9x^3+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{9\cdot 0+2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

✓ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-10}$ **0**

6B) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2+7}{5x+1}$ **$-\infty$**

6C) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$ **3.5**

إرشاد تقني

حساب النهايات لا يُعدُّ استعمال الحاسبة البيانية كافيًا لإيجاد $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ وإنما يمكن استعمالها فقط لحساب قيم $f(x)$ لبعض قيم x القريبة من c أو الكبيرة، إذ من الممكن أن يُظهر التمثيل البياني الدالة سلوكًا غير متوقع عندما تقترب x من c، أو عندما تزداد قيم x، أو تنقص بشكل غير محدود؛ لذا يجب أن تستعمل الطرائق الجبرية في حساب النهايات.

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 6 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال نسبية عند المالانهاية.

مثال إضافي

6 أوجد قيمة كل نهاية فيما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{3x-4}$ $\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-x^2}{3x^2-1}$ ∞

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{2x^3-x^2+3x-2}$ 2.5

المحتوى الرياضي

نهاية الدوال النسبية توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية .

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية غير محدودة وهي إما ∞ أو $-\infty$، بحسب إشارة الحد الرئيس في كلٍ من البسط والمقام.
2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.
3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ، فإن النهاية صفر.

إرشادات للمعلم الجديد

صفر المقام إذا كان المقام صفرًا عند حساب نهاية، وكان البسط عددًا غير الصفر، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$. وذلك حسب إشارة العدد الناتج في البسط، فإذا كانت موجبة، فإن النهاية تقترب من ∞، وإذا كانت سالبة، فإن النهاية تقترب من $-\infty$.

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $..., \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 = a_n$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.

مثال 7 نهايات المتتابعات

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت:

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$

الحدود الخمسة الأولى هي $\frac{3(1)+1}{1+5}, \frac{3(2)+1}{2+5}, \frac{3(3)+1}{3+5}, \frac{3(4)+1}{4+5}, \frac{3(5)+1}{5+5}$،
أو بصورة تقريبية هي 0.667, 1, 1.25, 1.444, 1.6 . لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$

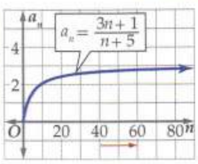
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي n

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$ المجاور هذه النتيجة. ✔



b) $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8 ,5, 2.813, 2.222, 1.953 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ بتربيع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ بالضرب

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + 10\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4}$$ بقسمة كل حد على أعلى قوة، وهي n^4، ثم استعمال خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25 .

تحقق كوّن جدول قيم واختر قيمًا كبيرة لـ x . قيم b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب منزلتين عشريتين ✔

n تقترب من ∞

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت: (7A-7C) انظر الهامش

7A) $a_n = \frac{4}{n^2+1}$ 7B) $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$ 7C) $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

إرشادات للدراسة

التحقق من معقولية الناتج
للتحقق من معقولية الناتج في المثال 7 ، أوجد كلًا من حد المئة والألف والعشرة آلاف وهي على التوالي: 2.867 و 2.986 و 2.999 ويظهر واضحًا أنها تقترب من العدد 3 ؛ لذا فإن حدود المتتابعة تتقارب من العدد 3 .

حساب النهايات عند المالانهاية

المثال 7 يُبيِّنُ كيفية حساب نهاية متتابعة متقاربة.

مثال إضافي

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة مما يأتي، ثم أوجد نهايتها إن وُجدت:

a) $a_n = \frac{2n+3}{n+4}$ $1, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{8}, \frac{13}{9}$
نهاية $\{a_n\}$ هي 2.

b) $b_n = \frac{3}{n^2}\left[\frac{(n+3)(n+4)}{9}\right]$
$6.\overline{6}, 2.5, 1.\overline{5}, 1.1\overline{6}, 0.96$
نهاية $\{b_n\}$ هي $\frac{1}{3}$.

إجابات: (تحقق من فهمك)

7A) الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي: 2 , 0.8 , 0.4 , 0.235 , 0.154 .
نهاية $\{a_n\}$ هي 0 .

7B) الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي: 0.182 , 1.143 , 3.176 , 6.4 , 10.87 .
ليست لـ $\{b_n\}$ نهاية.

7C) الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي: 9 , 5.625 , 4.667 , 4.219 , 3.96 .
نهاية $\{c_n\}$ هي 3 .

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب بعد حَلّ كل مثال أن يعملوا من خلال مجموعات ثلاثية أو رباعية من طلاب متفاوتي القدرات؛ لحَلّ تدريبات تحقق من فهمك، وعند انتهاء المجموعة من الحَلّ، تقارن حلولها مع حلول المجموعات الأخرى، ثم تتم مناقشة النتائج مع الطلاب جميعًا، ومناقشة الأخطاء وتوضيح ما يلزم.

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

1) $\lim_{x\to -3}(5x-10)$ **−25**

2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+13}{x-3}$ **29**

3) $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$ **21.11**

4) $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$ **−46**

5) $\lim_{x\to 12}\frac{x^2-10x}{\sqrt{x+4}}$ **6**

6) $\lim_{x\to -6}\frac{x^4-x^3}{x^2}$ **42**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2) **(7, 10 انظر الهامش)**

7) $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$

8) $\lim_{x\to 2}(4x^3-3x^2+10)$ **30**

9) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$ **2**

10) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$

11) $\lim_{x\to 9}(3x^2-10x+35)$ **188**

12) $\lim_{x\to 10}(-x^2+3x+\sqrt{x})$ **−66.84**

13) **فيزياء:** حسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عندالسكون. (مثال 2) **(a, b انظر الهامش)**

a) أوجد $\lim_{v\to 0} m$، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0.

b) ماذا يحدث لكتلة جسم يسير بسرعة تقترب من سرعة الضوء؟

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

14) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ **3**

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$ **8**

16) $\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$ **1.46**

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ **−12**

18) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$ **−8**

19) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ **$\frac{1}{6}$**

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

20) $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$ **∞**

21) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$ **$\frac{3}{4}$**

22) $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$ **−∞**

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$ **∞**

24) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$ **0**

25) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ **2**

26) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t)=\frac{105t^2}{10+t^2}+25$، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)

$t=0$ $t=t_1$ $t=t_n$

a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟ **25 mm**

b) ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$؟ **130 mm**

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج. **لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm**

27) **حيوانات:** يُعطى وزن حيوان w بالكيلوجرام بعد d يومًا من ولادته بالدالة $w(d)=\frac{50}{2+98(0.85)^d}$. (مثال 6)

a) ما وزن الحيوان عند ولادته؟ **0.5 kg**

b) ما نهاية الوزن الذي سيصلُه الحيوان (الوزن عندما $d\to\infty$)؟ **25 kg**

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 7)

28) $a_n=\frac{8n+1}{n^2-3}$ **0**

29) $a_n=\frac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$ **−4**

30) $a_n=\frac{12n^2+2}{6n^2-1}$ **2**

31) $a_n=\frac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ **∞**

32) $a_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ **$\frac{1}{4}$**

33) $a_n=\frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$ **∞**

احسب كل نهاية مما يأتي:

34) $\lim_{x\to -2}\begin{cases} x-3\ , & x\le -2 \\ 2x-1\ , & x>-2 \end{cases}$ **−5**

35) $\lim_{x\to 0}\begin{cases} 5-x^2\ , & x\le 0 \\ 5-x\ , & x>0 \end{cases}$ **5**

36) $\lim_{x\to 2}\begin{cases} (x-2)^2+1\ , & x\le 2 \\ x-6\ , & x>2 \end{cases}$ **غير موجودة**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-33 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: عند إيجاد نهاية دالة نسبية، قد يستعمل بعض الطلاب التعويض المباشر ويحدد خطأً نهاية الدالة بالقيمة $\frac{0}{0}$؛ لذا ذكِّرهم بتبسيط الدالة النسبية في هذه الحالة قبل إيجاد النهاية.

خطأ شائع: للتمارين 12–7، يجب أن يعرف الطلاب أنه ليس بإمكانهم استعمال التعويض المباشر إذا كانت النتيجة تتضمن صفرًا في المقام، أو إذا كان ما تحت الجذر سالبًا؛ لذا يجب عليهم في هذه الحالات توضيح سبب عدم إمكانية حساب النهاية لهذه الدوال بالإضافة إلى تبسيطها.

خطأ شائع: للتمارين 39–37، ذكِّر الطلاب بضبط الحاسبة البيانية على وضعية الراديان وليس الدرجات.

إجابات:

7) ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عندما $x=16$.

10) ليس ممكنًا، قيمة الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$، هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست معرفة.

13a) $\lim_{v\to 0} m = m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

13b) تبدأ كتلة الجسم بالزيادة بلا حدود.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–33 ، 49، 50 ، 52–62
ضمن المتوسط	1–39 فردي، 41، 48– 42 زوجي، 49، 50، 52–62
فوق المتوسط	34 – 62

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة:

(37 $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x}$ **0**

(38 $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$ **1**

(39 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ **2**

(40 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ **−0.5**

(41 **أحياء:** يُعطى اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$، حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux). **(a, b انظر ملحق الإجابات)**

a) اكتب نهاية لوصف اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدها الأدنى، ثم احسب النهاية، وفسِّر معناها.

b) اكتب نهاية لوصف اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدها الأعلى، ثم احسب النهاية، وفسِّر معناها.

أوجد $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

(42 $f(x) = 2x - 1$ **2**

(43 $f(x) = 7 - 9x$ **−9**

(44 $f(x) = \sqrt{x}$ **$\frac{1}{2\sqrt{x}}$**

(45 $f(x) = \sqrt{x+1}$ **$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$**

(46 $f(x) = x^2$ **$2x$**

(47 $f(x) = x^2 + 8x + 4$ **$2x + 8$**

(48 **فيزياء:** يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot (v(t))^2$، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \frac{50}{1+t^2}$ لكل $t \ge 0$، وكتلته 1 kg، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من 100 s؟ **0.0000125**

مسائل مهارات التفكير العليا

(49 **برهان:** استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
ولأي عدد حقيقي c، فإن $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$ **انظر ملحق الإجابات**

(50 **برهان:** استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، فإنه لأي عدد صحيح n $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n = L^n$. **انظر ملحق الإجابات**

(51 **تحدٍّ:** احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n \ne 0$ ، $b_m \ne 0$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$
(إرشاد: افترض كلًّا من الحالات $m < n, n = m, m > n$) **انظر الهامش**

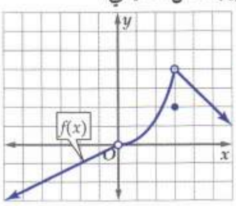
(52 **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

(53 **اكتب:** استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية. **انظر ملحق الإجابات**

(54 **اكتب:** افترض أن $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تدَّعي ليلى أن قيمة هذه النهاية هي 1. وضِّح سبب كونها مخطئة. وما الخطوات التي يمكن اتباعها لحساب هذه النهاية، إذا كانت موجودة؟ **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أدناه لإيجاد كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)



(55 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ، $f(-2)$ **−1 ، −1**

(56 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $f(0)$ **0، غير معرفة**

(57 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ، $f(3)$ **4، 2**

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f.g)(x)$، $(\frac{f}{g})(x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة: (الدرس 6-1) **(58, 59 انظر ملحق الإجابات)**

(58 $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

(59 $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

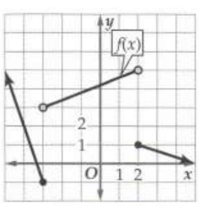
(60 ما قيمة $\lim\limits_{h\to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$؟ **H**

F 3
G 4
H 5
J غيرموجودة

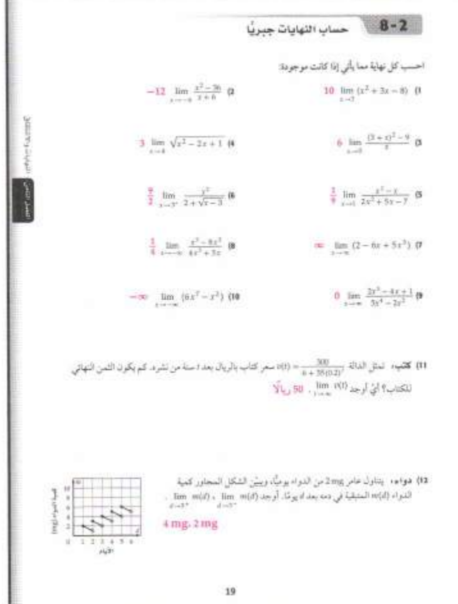
(61 ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0؟ **A**

A $-\pi$
B $-\frac{3}{4}$
C $-\frac{1}{2}\pi$
D 0

(62 باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$؟ **H**



F 0
H 1
G 5
J غير موجودة



4 التقويم

بطاقة مكافئة: اطلب إلى كل طالب كتابة توضيح مختصر للحالات التي يمكن فيها حساب نهاية دالة باستعمال التعويض المباشر دون تبسط الدالة. إجابة ممكنة: يمكن حساب النهاية باستعمال التعويض المباشر. إذا كانت الدالة كثيرة حدود، أو نسبية لا تنتج صيغة غير محددة عند التعويض فيها.

إجابات:

(51 إذا كانت $m > n$، فإن النهاية تساوي 0.
إذا كانت $m = n$ فإن النهاية تساوي $\frac{a_n}{b_m}$.
إذا كانت $m < n$، فإن النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$.

(52 صحيحة أحيانًا، تكون صحيحة إذا كانت $r(x)$ معرّفة عند c.

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان العبارتين $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to 7} [f(x) \cdot g(x)] \ne 0$.

إجابة ممكنة: $f(x) = 49 - x^2$, $g(x) = \frac{x+3}{x^2+x-56}$.

استكشاف
8-3

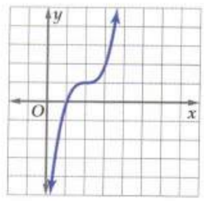
الهدف
استعمال الحاسبة البيانية TI — nspire؛ لتقدير ميل منحنى.

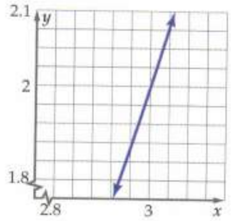
معمل الحاسبة البيانية:
ميل المنحنى
The Slope of a Curve

يعتبر ميل المستقيم بوصفه معدلًا ثابتًا للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أن الميل ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة؛ إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.

وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًّا.

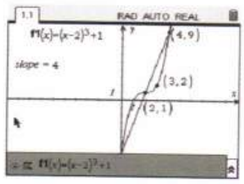
وبالنظر إلى القواطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.





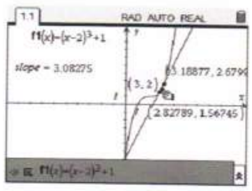
نشاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x - 2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$.



خطوة 1 أدخل $y = (x - 2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ عندما $x = 2, x = 4$.
ميل القاطع يساوي **4**.

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ عندما $x = 2.5, x = 3.5$.
ميل القاطع يساوي **3.25**.



خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ عندما $x = 2.8, x = 3.2$.
ميل القاطع يساوي **3.04**.

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة $(3, 2)$.

كلما نقص طول الفترة حول النقطة $(3, 2)$، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3؛ لذا فإن ميل منحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$ هو 3 تقريبًا.

تمارين:

قدِّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $y = (x + 1)^2, (-4, 9)$ **−6**

2) $y = x^3 - 5, (2, 3)$ **12**

3) $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$ **1**

4) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$ **0.5**

حلل النتائج **5, 6) انظر الهامش**

5) **حلل:** صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

6) **خمّن:** صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

استكشاف
8-3
ملاحظات
الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل منحنى.

إرشادات التدريس

ذكِّر الطلاب بكيفية إيجاد ميل المستقيم، ثم اسألهم عن إمكانية استعمال فكرة ميل المستقيم؛ لإيجاد ميل منحنى دالة.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI-nspire

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية، أو رباعية متفاوتة القدرات، و اطلب إليهم إكمال النشاط وتحليل نتائج التمرينين 5, 6.

تدريب اطلب إلى الطلاب حَلّ التمارين 1-4.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 4؛ لتقويم مدى اتقان الطلاب لاستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل دالة عند نقطة معطاة.

من المحسوس إلى المجرَّد

اسأل:

- كيف يرتبط ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالدالة عند تلك النقطة؟ يكون مساويًا لمعدل تغيّر الدالة عند تلك النقطة

إجابات:

5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة (a, b)، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر فأكثر من المماس للمنحنى عند النقطة (a, b).

6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

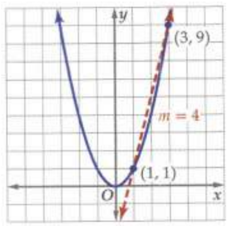
8-3 المماس والسرعة المتجهة

Tangent Lines and Velocity

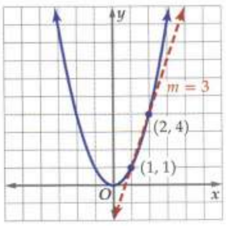
لماذا؟

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

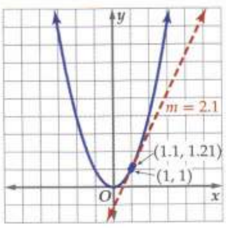
المماسات: تعلمت في الدرس 1-4 أن مُعدل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدلات تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

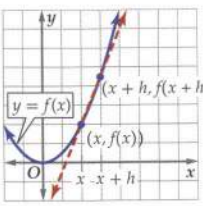


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس، وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي — مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

فيما سبق:

درستَ إيجاد متوسط مُعدلات التغيّر باستعمال القاطع.

والآن:

- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

المفردات:

المماس
tangent line

مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change

قسمة الفرق
difference quotient

السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

www.obeikaneducation.com

8-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-3

إيجاد متوسط معدلات التغيّر باستعمال القاطع.

الدرس 8-3

إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللّحظية.

ما بعد الدرس 8-3

استعمال المشتقات؛ في إيجاد السرعة المتجهة اللّحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما شكل المنحنى الذي يُمثّل ارتفاع المظلي بوصفه دالة في الزمن قبل فتح المظلة؟ قطع مكافئ
- ما الذي يحدث لمنحنى دالة الارتفاع بعد فتح المظلة؟ وما الذي يعنيه هذا؟ يزداد ميل المنحنى، أمّا بعد فتح المظلة، فإن معدل الهبوط سيقل بشكل كبير.

مصادر الدرس 8-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (153)	• تنويع التعليم، ص (153)	• تنويع التعليم، ص (155)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)

يمكنك استعمال مفهوم معدل التغيّر اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه.

إرشادات للدراسة

مُعدل التغيّر اللحظي عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

مثال 1 ميل منحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ $x = 1$

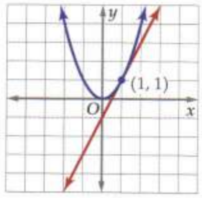
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$ $f(1+h) = (1+h)^2 ,\ f(1) = 1^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$ بالضرب

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} (2+h)$$ بالقسمة على h

$$= 2 + 0 = 2$$ خصائص المجموع للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة، والدالة المحايدة



أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1A) $y = x^2, (3, 9)$ 6

1B) $y = x^2 + 4, (-2, 8)$ −4

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة لميل مماس المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه .

مثال 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$ $f(x+h) = \frac{4}{x+h} ,\ f(x) = \frac{4}{x}$

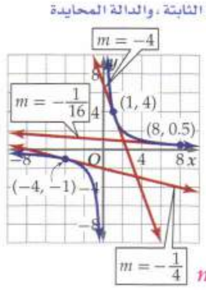
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$ بجمع الكسرين في البسط، ثم التبسيط

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$ بالتبسيط

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$ بالقسمة على h، ثم الضرب

$$m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$$ خصائص المجموع والقسمة للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة، والدالة المحايدة

$$m = \frac{-4}{x^2}$$ بالتبسيط



أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

2A) $y = x^2 - 4x + 2$ $m = 2x - 4$

2B) $y = x^3$ $m = 3x^2$

المماسات

المثالان 2 ,1 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللّحظي؛ لإيجاد ميل منحنى دالة عند نقطة عليه، أو لإيجاد معادلة تُمكننا من حساب ميل منحنى دالة عند أي نقطة عليه، وذلك من خلال إيجاد ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(2, 5)$. 4

2 أوجد معادلة ميل منحنى $y = x^2 + 2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 2x + 2$

المحتوى الرياضي

المماسات تُعطي صيغة معدل التغيّر اللّحظي عند نقطة ما، ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. ويمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد معادلة لميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه.

إرشادات للمعلم الجديد

المماسات هندسيًّا، يقطع المماس الدائرة عند نقطة التماس فقط، ولا يقطعها مرة أخرى. والمماس هو مستقيم يلامس المنحنى، إلا أنه من الممكن أن يقطع المنحنى عند نقاطٍ أخرى.

السرعة المتجهة اللحظية: تعلمت في الدرس 4-1 طريقة حساب السرعة المتوسطة المتجهة لجسم يسقط إلى الأسفل، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة، ويمكنك استعمال الطريقة نفسها لحساب السرعة المتوسطة المتجهة بإضافة الاتجاه. فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b يُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 3 من واقع الحياة — السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن $a = 2$ ، $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2$ ، $b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بالتبسيط	$f(2) = 18.8$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ صيغة السرعة المتوسطة المتجهة

$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$$ $f(b) = 24.3$ ، $f(a) = 18.8$، $b = 3$ ، $a = 2$

$$= 5.5$$ بالتبسيط

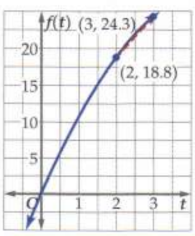
أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

الربط مع الحياة

أحرز العدّاء السعودي محمد شاوين ذهبية سباق 1500 m في دورة ألعاب آسيا المقامة في الصين عام 2010م، وبالمتوسط فقد قطع مسافة كيلومتر خلال 2:24:33 دقيقة تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1s$ ، $t = 2s$؟ 17 ft/s إلى الأعلى



إذا أمعنّا النظر في إجابة المثال 3، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8)، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة.

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم على صورة $f(t)$، بدلالة الزمن t، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

السرعة المتجهة اللحظية

المثال 3 يُبيِّن كيفية حساب السرعة المتوسطة المتجهة لجسم متحرك.

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة والسرعة المتجهة يُستعمَل مصطلح "السرعة المتجهة" للتعبير عن قيمة السرعة واتجاهها. ويستعمل مصطلح "السرعة" للتعبير عن قيمة السرعة فقط.

مثال إضافي

فيزياء: قُذفت كرة إلى أعلى في تجربةٍ فيزيائية، وتمثل الدالة: $h(t) = -16t^2 + 95t + 15$، ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة في الفترة من $t = 1\,s$ إلى $t = 2\,s$ ؟ 47 ft/s

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: على الطلاب كتابة خطوات إيجاد ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالتفصيل على مدونة الصف. وعليهم توضيح كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللّحظي لإيجاد الميل، أو السرعة المتجهة اللّحظية.

تنبيه!

التعويض تذكر أن توزِّع الإشارة السالبة إلى يسار $f(t)$ على كل حد فيها.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft، وتمثل الدالة $h(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h\to 0}\frac{2000-16(5+h)^2-[2000-16(5)^2]}{h}$$ $f(t+h) = 2000 - 16(5+h)^2$، $f(t) = 2000 - 16(5)^2$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-160h-16h^2}{h}$$ بالضرب، ثم التبسيط

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-160-16h)}{h}$$ بالتحليل

$$= \lim_{h\to 0}(-160-16h)$$ بالقسمة على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ خاصية الفرق للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة

أي أن سرعة الكرة بعد 5s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7s. **-224 ft/s**

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي زمن.

مثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن.

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h\to 0}\frac{18(t+h)-3(t+h)^3-1-[18t-3t^3-1]}{h}$$ $s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$، $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{18h-9t^2h-9th^2-3h^3}{h}$$ بالضرب، ثم التبسيط

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(18-9t^2-9th-3h^2)}{h}$$ بالتحليل

$$= \lim_{h\to 0}(18-9t^2-9th-3h^2)$$ بالقسمة على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$ خاصية الفرق للنهايات، ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$$= 18 - 9t^2$$ بالتبسيط

أي أنَّ سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن. **$v(t) = 90 - 32t$**

153 الدرس 8-3 المماس والسرعة المتجهة

السرعة المتجهة اللحظية

المثالان 5 ,4 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة السرعة المتجهة اللَّحظية لإيجاد السرعة المتجهة اللَّحظية لجسم متحرك عند نقطة محددة، أو التوصل إلى معادلة نجد من خلالها السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند أي زمن.

مثالان إضافيان

4 **بنايات:** صعد سلمان إلى أعلى بناية ارتفاعها 30 ft، ومن هناك رمى قطعة نقدية نحو الأرض. إذا كان ارتفاع القطعة النقدية عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من رميها يُعطى بالعلاقة: $h(t) = 30 - 16t^2$، فأوجد السرعة المتجهة اللحظية للقطعة النقدية بعد 2s. $v(t) = -64$ ft/s

5 **نحل:** يُعطى بُعد نحلةٍ بالبوصات عن خَليَّتِها بعد t ثانية بالعلاقة: $p(t) = 12t - 6t^3 + 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للنَّحلة عند أي زمن. $v(t) = 12 - 18t^2$

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة تأكد من فهم الطلاب للفرق بين السرعة المتوسطة المتجهة، والسرعة اللَّحظية المتجهة. فالسرعة المتوسطة المتجهة هي السرعة المتوسطة المتجهة بين نقطتين مختلفتين، أما السرعة اللَّحظية المتجهة فهي السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: زوِّد مجموعات ثنائية من الطلاب بسلك وشريط لاصق، واطلب إلى كل مجموعة تشكيل قطع مكافئ باستعمال السلك ولصقه على ورقة، ثم اطلب إليهم استعمال مسطرة لرسم مماس لهذا المنحنى. وتحديد ميل هذا المماس، ثم ناقشهم في العلاقة بين ميل المماس عند نقطة، ومعدل التغيّر اللَّحظي للدالة عند تلك النقطة.

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$ **$-3, 5$**

2) $y = 6 - 3x$, $(-2, 12)$, $(6, -12)$ **$-3, -3$**

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ **$-3, -\frac{1}{3}$**

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$ **$12, 3$**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$ **$m = -2$**

6) $y = -x^2 + 4x$ **$m = -2x + 4$**

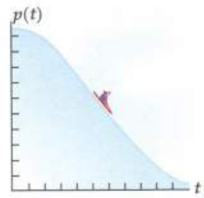
7) $y = 8 - x^2$ **$m = -2x$**

8) $y = \frac{1}{x^2}$ **$m = -\frac{2}{x^3}$**

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$**

10) $y = -2x^3$ **$m = -6x^2$**

11) **تزلج:** تمثِّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن. **$m = 0.18t^2 - 2.16t$**

b) أوجد الميل عندما $t = 2s, 5s, 7s$. **$-3.6, -6.3, -6.3$**

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات): (مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \leq t \leq 5$ **45 mi/h تقريبًا**

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \leq t \leq 8$ **65 mi/h تقريبًا**

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$, $4 \leq t \leq 7$ **49 mi/h تقريبًا**

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \leq t \leq 4.5$ **45 mi/h تقريبًا**

16) **طباعة:** تمثِّل $w(t) = 10t^2 - \frac{1}{2}t^3$ عدد الكلمات التي طبعها خالد بعد t دقيقة. (مثال 3) **a) 46 كلمة في الدقيقة**

a) ما متوسط عدد الكلمات لكل دقيقة بين الدقيقتين الثانية والرابعة؟

b) ما متوسط عدد الكلمات لكل دقيقة بين الدقيقتين الثالثة والسابعة؟ **60.5 كلمة في الدقيقة**

تمثِّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $h(t) = 100 - 16t^2, t = 3$ **-96 ft/s**

18) $h(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$ **12.4 ft/s**

19) $h(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$ **-512 ft/s**

20) $h(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$ **-121.6 ft/s**

21) $h(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$ **-58.2 ft/s**

22) $h(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$ **-57.6 ft/s**

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن: (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$ **$v(t) = 28t$**

24) $s(t) = t - 3t^2$ **$v(t) = 1 - 6t$**

25) $s(t) = 5t + 8$ **$v(t) = 5$**

26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ **$v(t) = -2t + 4$**

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ **$v(t) = 24t - 6t^2$**

28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$ **$v(t) = 9t^2 + 6$**

29) **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية بالدالة $h(t) = 15000 - 16t^2$. (مثال 5)

a) أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز. **-112 ft/s**

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظلّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟ **/s, -160 ft/s**

c) أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن. **$= -32t$**

30) **غوص:** يُبيِّنُ الجدول أدناه ارتفاع غواص d بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.7	42.1	40.6	33.8	25.3	14.2	0.85

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \leq t \leq 1.0$. **-6.2 m/s**

b) إذا كانت معادلة المنحنى التقريبي لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$. فأوجد سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3s. **$v(t) = -9.82t - 0.04, -29.5$ m/s**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 29-1 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للتمارين 22-17، ذكِّر الطلاب باستعمال صيغة معدل التغيّر اللّحظي، و ليس حساب $h(t)$ لقيمة t المعطاة؛ لأنها لا تساوي السرعة المتجهة اللحظية.

اكتشف الخطأ في التمرين 34، على الطلاب أن يتذكروا أن شكل منحنى دالة القيمة المطلقة شبيه بالحرف "V" ويَنتُج عنه ميلان مختلفان. وبذلك تكون دالة الميل الناتجة ليست متصلة.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	29–1 ، 34 ، 46–36
ضمن المتوسط	29–1 فردي، 30، 31، 33 ، 34، 46–34
فوق المتوسط	46–30

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها 75 ft/s. افرض أن ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$. $t \approx 2.344\text{ s}$ (c

a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $-32t + 75$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5s من ركلها؟ 59 ft/s

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ 90.39 ft تقريبًا

32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$، حيث t الزمن بالثواني، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن. $9t^2 + 8$

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2s, 4s, 6s$ 44 m, 152 m, 332 m

33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين نظرية القيمة المتوسطة، والتي تنص على أنه إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه توجد نقطة $(c, f(c))$ على منحنى الدالة يساوي الميل عندها متوسط مُعدّل تغيّر الدالة على الفترة نفسها. $y = x + 6, 1$

a) **عدديًا:** أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -x^2 + 8x$ في الفترة $[1, 6]$، وأوجد معادلة القاطع على هذه الفترة.

b) **عدديًا:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة على منحنى $f(x)$. $m = -2x + 8$

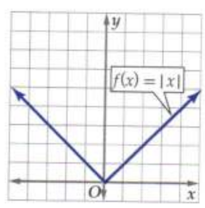
c) **عدديًا:** أوجد نقطةً على منحنى $f(x)$، بحيث يكون الميل عندها مساويًا لمتوسط مُعدّل تغيّر الدالة الذي أوجدته في الفرع a، وأوجد معادلة مماس منحنى $f(x)$ عند هذه النقطة. انظر الهامش

d) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين قاطع $f(x)$ على الفترة $[1, 6]$، والمماس عند النقطة التي أوجدتها في الفرع c. انظر الهامش

e) **بيانيًا:** استعمل حاسبة بيانية؛ لتمثيل كل من $f(x)$، القاطع، المماس على الشاشة نفسها. هل يعزز التمثيل البياني تخمينك؟ فسر إجابتك. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **اكتشف الخطأ:** سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة؛ لأن الدالة الأصلية متصلة، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش



35) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 8x^3 + 9x^2 - 2$

36) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة "يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط". برّر إجابتك. انظر الهامش

37) **تبرير:** صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t) = at + b$، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برّر إجابتك. انظر الهامش

38) **اكتب:** بين لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية صفرًا عند نقطة القيمة العظمى أو الصغرى. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

39) $\lim_{x \to 4} (x^2 + 2x - 2)$ 22

40) $\lim_{x \to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$ 1

41) $\lim_{x \to 0} (x + \sin x)$ 0

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

42) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5}$ $\frac{3}{2}$

43) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 + x^3 + 3x}$ 0

تدريب على اختبار

44) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟ F

F $4x$ G x

H $2x$ J $-4x$

45) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim_{t \to 2} \frac{d(t) - d(2)}{t - 2}$ تمثل سرعة الكرة بعد 2s، فكم سرعتها بعد 2s؟ C

A 46 ft/s   C 64 ft/s

B 58 ft/s   D 72 ft/s

46) ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$؟ G

F -9 G 27

H 9   J 34

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلاب توضيح العلاقة بين ميل مماس منحنى دالة عند نقطة، ومعدل تغيّر الدالة عند نفس النقطة. إجابة ممكنة: ميل مماس الدالة عند نقطة هو معدل تغيّر الدالة عند النقطة نفسها.

تمثيلات متعددة

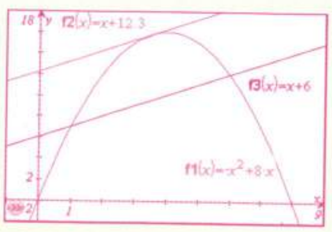
يستعمل الطلاب في التمرين 33 التحليل العددي والتعبير اللفظي والتمثيل البياني لاستكشاف نظرية القيمة المتوسطة.

إجابات:

33c) $(3.5, 15.75), y = x + 12.25$

33d) المستقيمان متوازيان؛ لأن ميليهما متساويان.

33e)



إجابة ممكنة: نعم؛ المستقيمان متوازيان.

34) جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو -1 عندما $x < 0$، 1 عندما $x > 0$. لذا، فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين: $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$؛ ولذلك يكون غير متصل.

36) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثّل الدالة $y = \sin x$

37) صح، إجابة ممكنة: بما أن $s(t)$ دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي a، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 6x + 5$ عند أي نقطة عليه، واعتمد على إجابتك وإجابة السؤال 35؛ لوصف أي علاقة بين الدالة الأصلية، والمعادلة التي تصّف ميل الدالة عند أي نقطة. $m = 15x^4 - 6x^2 + 2x - 6$، في كل حد اضرب المعامل في القوة، ثم اطرح 1 من القوة، واحذف الحد الثابت.

38) إجابة ممكنة: إذا مُثّلت دالة السرعة اللحظية لجسم بيانيًا واحتوى التّمثيل البياني نقطة عظمى أو صغرى، تكون خطوط المماس عند هذه النقاط أفقية، أي موازية للمحور x، وميل هذا المماس 0 . أي أن السرعات اللحظية عند النقاط العظمى أو الصغرى هي 0 فمثلًا، عند قذف كرة إلى أعلى، فإنها ستصل إلى أقصى ارتفاع، ثم تصبح سرعتها سالبة، وتعود إلى سطح الأرض. عند أقصى ارتفاع تكون السرعة اللحظية صفرًا.

قدّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 1-8)

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}$ **1**

2) $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}$ **1**

3) $\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2-18}{x-3}$ **12**

4) $\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-1}{x}$ **0**

5) $\lim_{x\to3}\frac{2x}{x^2+1}$ $\frac{3}{5}$

6) $\lim_{x\to1}\sqrt{x^3+3}$ **2**

7) $\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+20}}{x}$ **−1**

8) $\lim_{x\to3}\frac{|4-x|}{\sqrt{3x}}$ $\frac{1}{3}$

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًا بحيث تصبح قيمتها بآلاف الريالات بعد t سنة $v(t)=\frac{400t+2}{2t+15}$. (الدرس 1-8)

a) مثّل الدالة $v(t)$ بيانيًا في الفترة $0\le t\le10$. **انظر الهامش**

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t=2, 5, 10$. **42000, 80000, 115000 ريال**

c) استعمل التمثيل البياني لحساب $\lim_{t\to\infty}v(t)$. **200**

d) وضّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية. **إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.**

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 2-8)

10) $\lim_{x\to9}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$ **ليس ممكنًا؛ عندما $x=9$، فإن المقام يساوي صفرًا.**

11) $\lim_{x\to-2}(2x^3+x^2-8)$ **−20**

12) **حياة بريّة:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t)=\frac{10t^3-40t+2}{2t^3+14t+12}$، وذلك بعد t سنة، حيث $t\ge3$. ويُبيّن الشكل أدناه أعداد الغزلان على مدى 5 سنوات. ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 2-8) **500 غزال**

احسب كل نهاية مما يأتي: (الدرس 2-8)

13) $\lim_{x\to\infty}15-x^2+8x^3$ **∞**

14) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x-2}{4x^3+5x^2}$ $\frac{1}{2}$

15) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{2x^4-14x^2+2}$ **0**

16) $\lim_{x\to\infty}10x^3-4+x^2-7x^4$ **−∞**

17) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to0}\frac{2x^2+5}{10-(2.7)^{\frac{16}{x}}}$؟ (الدرس 1-8) **A**

A غير موجودة
B $\frac{1}{2}$
C ∞
D $-\infty$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-8)

18) $y=x^2-3x$, $(2,-2)$, $(-1,4)$ **1, −5**

19) $y=2-5x$, $(-2,12)$, $(3,-13)$ **−5, −5**

20) $y=x^3-4x^2$, $(1,-3)$, $(3,-9)$ **−5, 3**

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًا لأعلى بسرعة 90ft/s، وتمثل الدالة $h(t)=-16t^2+90t+3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 3-8)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة. $-32t+90$

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5s من الإطلاق؟ **74 ft/s**

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟ **129.76ft تقريبًا**

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثل ميل منحنى $y=7x^2-2$ عند أي نقطة عليه. (الدرس 3-8) **H**

F $m=7x$
G $m=7x-2$
H $m=14x$
J $m=14x-2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكّر بأن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 3-8)

23) $s(t)=12+0.7t$, $2\le t\le5$ **42 mi/h**

24) $s(t)=2.05t-11$, $1\le t\le7$ **123 mi/h**

25) $s(t)=0.9t-25$, $3\le t\le6$ **54 mi/h تقريبًا**

26) $s(t)=0.5t^2-4t$, $4\le t\le8$ **120 mi/h تقريبًا**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-8)

27) $h(t)=4t^2-9t$ $v(t)=8t-9$

28) $h(t)=2t-13t^2$ $v(t)=2-26t$

29) $h(t)=2t-5t^2$ $v(t)=2-10t$

30) $h(t)=6t^2-t^3$ $v(t)=12t-3t^2$

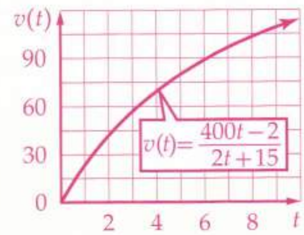
الدروس من 1-8 إلى 3-8

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجب عنها الطلاب بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدرس المشار إليه بعد كل سؤال.

إجابات:

(9



مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-8 ,2-8 ,1-8	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (128)		

8-4 المشتقات
Derivatives

فيما سبق:
درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدل التغيُّر اللحظي.

والآن:
- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قانوني الضرب والقسمة لإيجاد المشتقات.

المفردات:
المشتقة derivative
الاشتقاق differentiation
المعادلة التفاضلية differential equation
المؤثر التفاضلي differential operator

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

ركل أحمد كرةً رأسيًّا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s . يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم اشتقاق الدالة لتحديد ما إذا كانت الكرة سوف تبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.

قواعد أساسية: استعملت النهايات في الدرس 3-8 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **بالاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

قراءة الرياضيات
المشتقات يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x، أو f prime of x.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ ، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1 , 5$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة المشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$ $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$ ، $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$ بالتبسيط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$$ بالتحليل

$$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$$ بالقسمة على h

$$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$$ خاصيتا المجموع والفرق للنهايات ونهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1 , 5$.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(5) = 8(5) - 5$	$x = 1 , x = 5$	$f'(1) = 8(1) - 5$
$f'(5) = 35$	بالتبسيط	$f'(1) = 3$

✓ تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ ، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

(1A $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2 , 5$
$f'(x) = 12x$, (1A
$f'(2) = 24, f'(5) = 60$

(1B $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1 , 4$
$f'(x) = -10x + 2,$
$f'(1) = -8, f'(4) = -38$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ ، y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-4
حساب ميل المماسات؛ لإيجاد معدل التغير اللحظي.

الدرس 8-4
إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
استعمال قاعدتي الضرب والقسمة؛ في إيجاد المشتقات.

ما بعد الدرس 8-4
استعمال قواعد الدالة الأصلية؛ في حساب تكاملات بعض الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"، وذكِّرهم بمعادلة الحركة بتسارع ثابت، التي درسوها في الفيزياء:
$h - h_0 = v_0 t - 16t^2$، حيث h_0 هو الارتفاع الذي قُذف منه الجسم، v_0 السرعة الابتدائية، t الزمن.

واسأل:
- ما الدالة التي تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية؟
$h(t) = -16t^2 + 65t + 3$
- استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد أعلى ارتفاع تصله الكرة. 69 ft تقريبًا
- هل يمكن أن تبلغ الكرة ارتفاع 68 ft؟ علِّل.
نعم، حيث ستصل الكرة إلى ارتفاع 69 ft تقريبًا.

قواعد أساسية

مثال 1 يُبيِّن كيفية إيجاد مشتقة الدالة وحساب قيمها عند نقاط محددة؛ وذلك من خلال التعويض المباشر.

مصادر الدرس 8-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (162)	• تنويع التعليم، ص (162)	• تنويع التعليم، ص (162, 164)
كتاب التمارين	• ص (21)	• ص (21)	• ص (21)

استعملت حتى هذه اللحظة النهاية عندما تقترب من الصفر لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القوة**

التعبير اللفظي: قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 قاعدة مشتقة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 9x^{9-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= 9x^8$	بالتبسيط

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$	الدالة المعطاة
$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$	بإعادة كتابة الدالة كقوى نسبية
$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$	بالتبسيط

c) $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$	الدالة المعطاة
$h(x) = x^{-8}$	بإعادة كتابة الدالة كقوى سالبة
$h'(x) = -8x^{-8-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A) $j(x) = x^4$ $\quad j'(x) = 4x^3$

2B) $k(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2C) $m(x) = \frac{1}{x^5}$ $\quad m'(x) = -\frac{5}{x^6}$

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس، لنحصل على $-4-1=-4+(-1)$ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي **قواعد أخرى للاشتقاق**

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. أي أنه إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوى: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

قواعد أساسية

الأمثلة 4-2 تُبيِّن كيفية استعمال قواعد الاشتقاق؛ في إيجاد مشتقات دوال مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد مشتقة: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x + 12$، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, 4$.

$f'(x) = 6x^2 + 4x - 7, f'(1) = 3, f'(4) = 105$

2 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

a) $f(x) = x^5$ $\quad f'(x) = 5x^4$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x^6}$ $\quad g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^{10}}$ $\quad h'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$

مثالان إضافيان

3 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 6x^2 - 3$ $\quad f'(x) = 12x$

b) $g(x) = 2x^3(5x - 3)$

$g'(x) = 40x^3 - 18x^2$

c) $h(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x}$

$h'(x) = 6x - 2$

4 **حركة:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم بالمليمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 6t - 2t^3 + 4$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللّحظية $v(t)$ للجسم. $v(t) = 6 - 6t^2$

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية: اختر مجموعة من الطلاب ليقوموا بتوضيح كيفية استعمال قواعد الاشتقاق لبقية طلاب الصف.

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع
$= 15x^2$	بالتبسيط

b) $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتي مضاعفات القوى، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بالتبسيط

c) $h(x) = \frac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \frac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \frac{5x^3}{x} - \frac{12x}{x} + \frac{6\sqrt{x^5}}{x}$	بقسمة كل حد في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

المشتقات إذا كانت $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$، وإذا كانت $f(x) = cx$، فإن $f'(x) = c$.

☑ تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ $\quad f'(x) = 10x^4 - 3x^2$

3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$ $\quad g'(x) = 15x^4 + 24x^3$

3C) $h(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$ $\quad h'(x) = 12x^2 - 3$

الآن، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل. في مثال 5 من الدرس 3–8 أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بالتبسيط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي $v(t) = 18 - 9t^2$. لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-8.

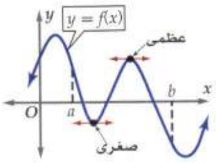
☑ تحقق من فهمك

4) تمثّل الدالة $h(t) = 55t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن. $v(t) = 55 - 32t$

تُسمَّى النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير مُعرفة نقطةً حرجةً للدالة. والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير مُعرف.

مفهوم أساسي **نظرية القيمة القصوى**

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.



لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة فلا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

مثال 5 من واقع الحياة — القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية : تمثِّل الدالة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3} \quad \text{الدالة المعطاة}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0 \quad \text{قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق}$$

$$= -t^2 + 8t \quad \text{بالتبسيط}$$

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$0 = h'(t) \quad \text{بكتابة المعادلة}$$

$$= -t^2 + 8t \quad h'(t) = -t^2 + 8t$$

$$= -t(t-8) \quad \text{بالتحليل}$$

أي أن لهذه الدالة نقطتين حرجتين عندما $t = 0 , 8$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإننا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

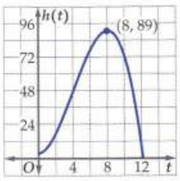
$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89 \quad \text{قيمة عظمى}$$

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67 \quad \text{قيمة صغرى}$$

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

التحقق من الحل يعزِّز التمثيل البياني للدالة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ المجاور على الفترة $[1, 12]$ هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8$ s. ✓



الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

تحقق من فهمك

5) **رياضة القفز :** تمثِّل الدالة $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft ، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

قواعد أساسية

لمثال 5 يُبيِّن كيفية استعمال النقاط الحرجة و أطراف الفترات؛ في إيجاد القيم العظمى الصغرى لدالة معرفة على فترة مغلقة.

مثال إضافي

الألعاب البهلوانية : تُمثِّل الدالة $h(t) = 4 + 5t - 2t^2$ ارتفاع لاعب بهلواني بالأقدام بعد قفزه من منصة إلى أخرى في الفترة الزمنية $[0, 3]$، حيث t الزمن بالثواني. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يصله اللاعب.

أقصى ارتفاع هو 7.125 ft بعد 1.25 s ، وأدنى ارتفاع يساوي 1 ft بعد 3 s.

قاعدتا مشتقتي الضرب والقسمة

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة الضرب؛ في إيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين.

مثال إضافي

6 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^3 - 4)$

$h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 8$

b) $h(x) = (x^4 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x + 1)$

$h'(x) = (4x^3 - 2x)(x^3 - x + 1) + (x^4 - x^2 + 2)(3x^2 - 1)$

المحتوى الرياضي

قاعدة مشتقة الضرب لاحظ أن قاعدة مشتقة مضاعفات القوى هي حالة خاصة من قاعدة مشتقة الضرب، حيث يُعَدّ الثابت عاملًا، كما أن بإمكاننا تعميم قاعدة مشتقة الضرب لأكثر من دالتين. فمثلًا:

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المشتقة: يُعبّر رمز المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عن "التغيُّر في y مقسومًا على التغيّر في x" والحرف d هو اختصار للحرف اليوناني دلتا (delta)، والذي يستعمل للتعبير عن فرق القيم، أو التغيّر في القيم.

قاعدتا مشتقتي الضرب والقسمة: تعلمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالّتين تساوي مجموع مشتقتي الدالّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقتي الدالتين؟ افترض أن $f(x) = x, g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب	ضرب المشتقات
$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$	$\frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$
$= \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$	$= 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالّتين.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f، g موجودة عند x، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن $g(x) = 3x^2 - 5$, $f(x) = x^3 - 2x + 7$، أي أن $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 2$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ من الفرض

$g'(x) = 6x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ بالتعويض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ بالتبسيط

b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن $g(x) = 6x^2 - x - 2$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ بالتعويض

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب
ينتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله دون تبسيط ما لم تكن بحاجة إلى تبسيطه.

تحقق من فهمك (6A-B) انظر الهامش

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

6B) $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

إجابات (تحقق من فهمك):

6A) $h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x)$

6B) $h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x)$

يمكنك بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x، وكان $g(x) \neq 0$، فإن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

مثال 7 قاعدة مشتقة القسمة

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن $f(x) = 5x^2 - 3,\ g(x) = x^2 - 6$، أي أن $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ بالتعويض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بالتبسيط

b) $h(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن $f(x) = x^2 + 8,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ بالتعويض

$= \dfrac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ بفك الأقواس، ثم التبسيط

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة
يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًا في كثير من التمارين، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

✓ تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

7A) $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$ $\quad \dfrac{155}{(12x + 5)^2}$

7B) $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$ $\quad \dfrac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2}$

قاعدتا مشتقتي الضرب والقسمة

المثال 7 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة القسمة في إيجاد مشتقة ناتج قسمة دالتين.

مثال إضافي

7 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 - 2}$

$h'(x) = \dfrac{4x^4 - 24x^2}{x^4 - 4x^2 + 4}$

b) $h(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

$h'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

إرشادات للمعلم الجديد

المشتقات: السرعة المتجهة اللّحظية، والمشتقة وميل المماس هي مصطلحات متكافئة. والمشتقات هي أسهلها حسابًا. ولكن من الضروري أن يفهم الطلاب العلاقة بين هذه المصطلحات الثلاث.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون: نظِّم الطلاب في مجموعات مكونة من خمسة إلى ثمانية طلاب، واطلب إلى كل مجموعة كتابة قواعد الاشتقاق بلغتهم الخاصة، ثم اطلب إلى كل مجموعة عرْض ما كتبوه على المجموعات الأخرى، بحيث يتم التحقق من سلامة اللغة المستعملة في صياغة القواعد. قم بعد ذلك بالتحقق من كتابات الطلاب.

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقة كلٍّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1) **1–5) انظر ملحق الإجابات**

1) $f(x) = 4x^2 - 3, x = 2, -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5, 3$

3) $m(j) = 14j - 13, j = -7, -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17, n = 7, 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b, b = -4, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2, 3) **6-13) انظر الهامش**

6) $y(f) = -11f$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$

13) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

14) **درجات الحرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة: **a-c) انظر ملحق الإجابات**
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ، حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدَّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة $0 \le h \le 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$ **15-20) انظر ملحق الإجابات**

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) **رياضة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. تمثل الدالة $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية عندما $0 \le t \le 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$. **$h'(t) = 65 - 32t$**

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لمسار الكرة في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft؟

b) (0, 3), (2.03, 68.9) **c) انظر ملحق الإجابات**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6) **22-28) انظر ملحق الإجابات**

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 7) **29-34) انظر ملحق الإجابات**

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملبوسات بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًّا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d ريالًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d ريالًا. **$r(d) = d(80 - 2d)$**

b) أوجد $r'(d)$. **$r'(d) = -4d + 80$**

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن. **20 ريالًا**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مَثِّل الدالة والمشتقة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه. **36-39) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات**

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ **$f'(x) = 6x + 2$**

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$ **$g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$**

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$ **$f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10$**

39) $g(x) = \frac{1}{x}$ **$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$**

40) **المشتقات العليا:** لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$. وتسمى المشتقات على هذا النحو بالمشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًّا مما يأتي: **a-c) انظر الهامش**

a) المشتقة الثانية للدالة $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة للدالة $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة للدالة $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 34-1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: نبِّه الطلاب في سؤال 8 إلى عدم إبقاء الجذر التربيعي في المقام في إجابتهم، ويمكننا التخلص من الجذر التربيعي في المقام بضرب كل من البسط والمقام بالجذر التربيعي.

خطأ شائع: في الأسئلة 28–22، ذكّر الطلاب بأن مشتقة حاصل ضرب دالتين لا تساوي حاصل ضرب مشتقتيهما، إلا أنها تساوي حاصل جمع كل دالة في مشتقة الدالة الأخرى.

إجابات:

6) $y'(f) = -11$

7) $z'(n) = 4n + 7$

8) $g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}}$

9) $b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$

10) $n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

11) $f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

12) $q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3$

13) $p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3$

40a) $f''(x) = 80x^3 - 12x$

40b) $'''(x) = -420x^4 + 96x - 42$

40c) $h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الواجب المنزلي
دون المتوسط	1–34 ، 46، 48–62
ضمن المتوسط	1–34 فردي، 45 ، 46، 48–62
فوق المتوسط	35–62

(41-44) انظر ملحق الإجابات

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0 عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي -2 عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0 عندما $x = -1, 2, 4$.

45) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال. انظر ملحق الإجابات (b, c, e

a) **تحليليًا:** أوجد مشتقة صيغة مساحة الدائرة ومشتقة صيغة حجم الكرة بالنسبة لنصف القطر r. $A' = 2\pi r,\ V' = 4\pi r^2$

b) **لفظيًا:** وضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع a.

c) **بيانيًا:** ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$، ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) **تحليليًا:** اكتب صيغةً تمثِّل مساحة المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a. ثم أوجد مشتقتي الصيغتين. $A = 4a^2, A' = 8a,\ V = 8a^3, V' = 24a^2$

e) **لفظيًا:** وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع d.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$. حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

47) **تحدٍّ:** أوجد $f'(y)$ علمًا بأن
$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$
$$f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$$

48) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، بإثبات أن:
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه). انظر ملحق الإجابات

49) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"إذا كانت $f(x) = x^{5n+3}$، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$" انظر ملحق الإجابات

50) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:
$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[\,g(x)]^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه). انظر ملحق الإجابات

51) **اكتب:** هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 8-3)

52) $y = x^2 - 3x, (0, 0), (3, 0)$ $-3, 3$

53) $y = 4 - 2x, (-2, 8), (6, -8)$ $-2, -2$

54) $y = x^2 + 9, (3, 18), (6, 45)$ $6, 12$

احسب كل نهاية مما يأتي: (الدرس 8-2)

55) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$ -8

56) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ $-\frac{1}{3}$

57) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$ $-\frac{1}{2}$

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 8-1)

58) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2 - x - 12}{|x - 4|}$ 7

59) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x} + 2x + 3)$ 3

تدريب على اختبار

60) ما مشتقة $h(x) = (-7x^2 + 4)\,(2 - x)$؟ D

A) $-14x$

B) $14x$

C) $-21x^2 - 28x + 4$

D) $21x^2 - 28x - 4$

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟ H

F) 1

G) 2

H) 4

J) 8

62) ما مشتقة $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$؟ F

F) $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$

G) $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$

H) $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

J) $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

8-4 المشتقات

أوجد مشتقة كلّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

1) $g(x) = 3x^2 - 5x, x = -2, 1$ $6x - 5, -17, 1$

2) $h(x) = 4x^3 - x^2, x = 3, 0$ $12x^2 - 2x, 102, 0$

3) $f(x) = x^2 - 4x + 7, x = 2, -3$ $2x - 4, 0, -10$

4) $m(x) = -2x^2 - 6x + 1, x = 0, -3$ $-4x - 6, -6, 6$

5) $q(x) = -1 + x^3 - 2x^4, x = -1, 3$ $3x^2 - 8x^3, 11, -189$

6) $t(x) = 3x^7 - 1, x = -1, 1$ $21x^6, 21, 21$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $f(x) = (x^2 + 5x)^2$ $f'(x) = 4x^3 + 30x^2 + 50x$

8) $f(x) = x^2(x^3 + 3x^2)$ $f'(x) = 5x^4 + 12x^3$

9) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$ $f'(x) = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$

10) $h(x) = -\frac{3}{x^6}$ $h'(x) = \frac{18}{x^7}$

11) $p(x) = -4x^5 + 6x^3 - 5x^2$ $p'(x) = -20x^4 + 18x^2 - 10x$

12) $n(x) = (3x^2 - 2x)(x^3 + x^2)$ $n'(x) = 15x^4 + 4x^3 - 6x^2$

13) $r(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$ $r'(x) = \frac{(-3x^2 + 2x + 6)}{(x^2 + 2)^2}$

14) $q(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 3)$ $q'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

15) **فيزياء:** تسارع جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل الدالة $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة). $24\ m/s^2$

21

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 45 التحليل الجبري والتعبير اللفظي والتمثيل البياني لاستكشاف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب شرح كيف ساعدتهم أفكار الدرس السابق حول المماس والسرعة المتجهة في تعلم فكرة المشتقة في هذا الدرس.

تنبيه !

اكتشف الخطأ: في السؤال 46، على الطلاب أن يعرفوا أنَّ $[\,f'(x)\,]^2 = f'(x)\cdot f'(x)$. لاحظ أن قوة الحد الرئيس يجب أن تكون زوجية في هذه الحالة؛ لذا فإن عبد الله محق.

تنويع التعليم

فوق

توسَّع: أوجد القيمة أو القيم التي يكون عندها المماسان للمنحنيين $f(x) = x, g(x) = x^2$ متوازيين. وضح إجابتك.

يكون المماسان متوازيين، إذا تساوى ميلاهما، ويعني أن $f'(x) = g'(x)$، وبما أن $f'(x) = 1$، $g'(x) = 2x$، فإن $f'(x) = g'(x)$ فقط عندما $x = \frac{1}{2}$.

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل
Area Under the Curve and Integration

فيما سبق:
درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها.

والآن:
- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:
التجزيء المنتظم
regular partition
التكامل المحدد
definite integral
الحد الأدنى
lower limit
الحد الأعلى
upper limit
مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum
التكامل
integration

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

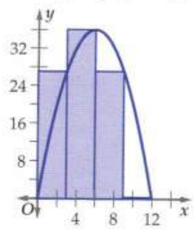
المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة، طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل والمضلع المنتظم، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

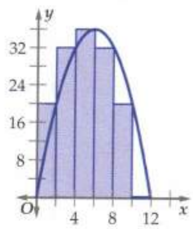
قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

باستعمال الأشكال أدناه، لاحظ أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة $f(x)$ عند طرف قاعدة المستطيل الأيمن، فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) أدناه هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.



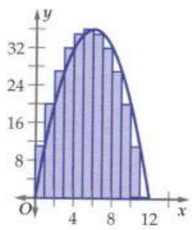
الشكل (1)
المساحة باستعمال 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$
$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$
$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$
$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$
المساحة الكلية 270 وحدة مربعة



الشكل (2)
المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$
$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$
$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$
$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$
$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$
المساحة الكلية 280 وحدة مربعة



الشكل (3)
المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$
$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$
$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$
$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$
المساحة الكلية 286 وحدة مربعة

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

إرشادات للدراسة
التكلفة الحدية (الهامشية) هي المشتقة الأولى للتكلفة الحقيقية عند إنتاج x وحدة من منتج ما.

8-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-8
حساب النهايات جبريًّا باستعمال خصائصها.

الدرس 5-8
تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد .

ما بعد الدرس 5-8
استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد المساحة تحت منحنى.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما التكلفة الحدية (الهامشية) لإنتاج كتاب واحد، 10 كتب، 100 كتاب؟ 9.998 ريالات، 9.98 ريالات، 9.80 ريالات
- ماذا يحدث للتكلفة الحدية عندما يزداد عدد الكتب المطبوعة؟ تتناقص.

مصادر الدرس 5-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (168)		• تنويع التعليم، ص (170)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)

المساحة تحت منحنى

المثالان 1, 2 يُبيّنان كيفية حساب المساحة التقريبية تحت منحنى دالة باستعمال مساحات مستطيلات

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 18x$ والمحور x على الفترة $[0, 18]$ باستعمال 6 ، 9 ، 18 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لكل مستطيل؛ لتحديد ارتفاعه.

6 مستطيلات = 945 وحدة مربعة
9 مستطيلات = 960 وحدة مربعة
16 مستطيلًا = 969 وحدة مربعة

2 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدة منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات؛ لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

الأطراف اليمنى = 34 وحدة مربعة
الأطراف اليسرى = 18 وحدة مربعة
الوسط = 26 وحدة مربعة.

المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 8 ... = 2268 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة ...

تحقق من فهمك

1) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لكل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

إرشاد تقني

جداول للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات على الحاسبة البيانية TI-nspire أدخل الدالة بالضغط على (on) ، ثم اختيار ، مما يسمح لك بالحصول على جدول وعمل قائمة من الارتفاعات لعدة قيم من x . ويمكنك أيضًا تعديل فترات قيم x في جدول Spreadsheet .

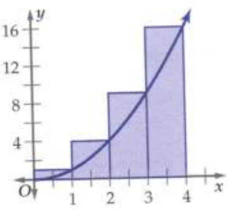
لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لكل مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها ، ... ما قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

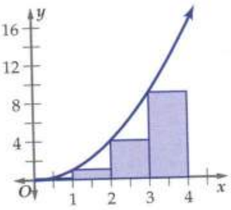


الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

2) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 15.4وحدة مربعة، الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة، الوسط = 20.2 وحدة مربعة

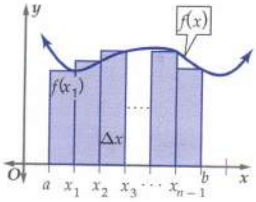
عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x ، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

المحتوى الرياضي

التقريب باستعمال المستطيلات تم التعرف إلى طريقتين لتقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال الأطراف اليمنى، أو الأطراف اليسرى للمستطيلات، حيث يعطي الوسط للتقريبين تقريبًا أفضل للمساحة. وبإمكاننا أيضًا حساب المساحة باستعمال أصغر وأكبر ارتفاع لكل مستطيل، حيث يُعطي الوسط للتقريبين الأخيرين تقريبًا أفضل للمساحة الكلية.

في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b-a$، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$، ويرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للمستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.



قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$ كالآتي: مجموع حواصل ضرب Δx في $f(x_i)$ من $i=1$ إلى $i=n$.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\ \Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\ \Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

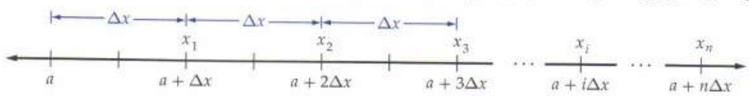
$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \qquad \text{بجمع المساحات}$$

$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \qquad \text{بإخراج العامل المشترك } \Delta x$$

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{باستعمال رمز المجموع}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x \qquad \text{الخاصية الإبدالية للضرب}$$

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i. وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

مفهوم أساسي — التكامل المحدد

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\ ,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.

تنبيه!

المجموع إن مجموع عدد ثابت c هو cn، وليس صفرًا أو ∞. فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1826 – 1866). والذي يُعزى إليه إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad \text{، } c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: احرص على حَلّ عدة أمثلة حول إيجاد المساحات تحت المنحنيات، ثم احتفظ بكل مثال على شكل ملاحظة، وأضف هذه الملاحظات إلى الصفحة الإلكترونية الخاصة بالصف، بحيث يستطيع الطلاب الاعتماد عليها بوصفها مرجعًا إضافيًّا.

إرشادات للمعلم الجديد

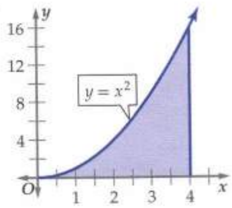
رمز التكامل نبِّه الطلاب إلى أن رمز التكامل هو شد للحرف S في كلمة *sum*.

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \text{ ، عدد ثابت } c \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

مثال 3 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، أو $\int_0^4 x^2\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n} \qquad b = 4 , a = 0$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n} \qquad a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\,\Delta x \qquad f(x_i) = x_i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right) \qquad x_i = \frac{4i}{n}, \Delta x = \frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}\right)^2 \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2}{n^2} \qquad \text{بتوزيع القوة}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right) \qquad \text{بالضرب والتوزيع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3} \qquad \text{بالضرب}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2} \qquad \text{بالقسمة}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(\frac{(2n^2+3n+1)}{n^2}\right) \qquad \text{بالتحليل}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{بالقسمة على } n^2$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty} 2 + \left(\lim_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right] \qquad \text{خصائص النهايات}$$

$$= \frac{64}{6}\,[2 + 3(0) + 0] \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\int_0^1 3x^2\,dx$ وحدة مربعة

3B) $\int_0^3 x\,dx$ 4.5 وحدة مربعة

إرشادات للدراسة

النهايات حلّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

التكامل

الأمثلة 5-3 تُبيّن كيفية استعمال التكامل لإيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة ما.

مثال إضافي

3 استعمل النهايات ؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ ، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ، أو $\int_0^4 (x^2+1)\,dx$.

25.33 وحدة مربعة تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الدقة نبّه الطلاب إلى أهمية كتابة كل خطوة عند حساب التكامل؛ تجنبًا للوقوع في أخطاء غير مقصودة. كما يجب على الطلاب أن يكونوا حريصين في اختيار الصيغة المناسبة لمجاميعهم.

تنويع التعليم

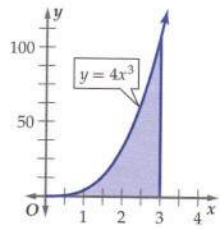
دون

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنى دالة في أحد الأمثلة على ورق مربعات كبير، ثم اطلب إليهم أن يقصُّوا المساحة المطلوبة، وأن يحدّدوا عدد الوحدات المربعة التي تحويها هذه المنطقة. والذي قد يتطلب تجميع أجزاء مختلفة من المساحات، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا بين المساحة باستعمال التكامل وعدد الوحدات المربعة التي أوجدوها.

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$، أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 3, a = 1$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 1 + i\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n}$ $a = 1, \Delta x = \frac{2}{n}$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$$ $f(x_i) = 4(x_i)^3$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$$ $x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$ مفكوك $\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$$ بالتبسيط

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$ صيغ المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$ خاصية التوزيع

$$= \lim_{n\to\infty}\left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$$ بالتبسيط

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 + 24\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$ بالقسمة

$$= \lim_{n\to\infty}8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$ خصائص النهايات

$$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80$$ بالتبسيط

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

4A) $\int_1^3 x^2\,dx$ 8.67 وحدات مربعة تقريبًا

4B) $\int_2^4 x^3\,dx$ 60 وحدة مربعة

تنبيه!

النهايات عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال النهايات، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

مثال إضافي

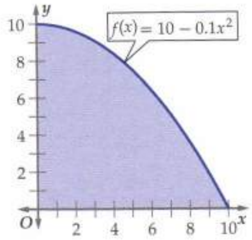
4 استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3 + 1$ والمحور x في الفترة $[2, 4]$، أو $\int_2^4 (x^3+1)\,dx$.

62 وحدة مربعة

69 الدرس 5-8 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى

بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربع الواحد من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت مساحة أيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx$ ، فكم تكلفة تبليط الممرين؟ علمًا بأن x مقيسة بالأقدام.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n} \quad a=0,\ b=10$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \quad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n} \quad a=0,\ \Delta x = \frac{10}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^2)\Delta x \quad f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n} \quad x_i=\frac{10i}{n},\ \Delta x=\frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right) \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right) \quad \text{بالقسمة على } n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{بالقسمة على } n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 100-\frac{50}{3}(2+0+0)\approx 66.67 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ ft^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67 \times 2) \times 22.4$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما تُعطَى بالتكامل $\int_0^{5}(5-0.2x^2)dx$ ، حيث x مقيسة بالأقدام؟ برِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

5) لا؛ مساحة كل جزء من الجدار $16.67\ ft^2$ تقريبًا، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي $2(16.67)$، ويساوي $33.34\ ft^2$ تقريبًا. إذن كمية الطلاء لا تكفي.

مثال إضافي

أعمال: ينتج مصنع 2000 قميص يوميًّا. تُعطى تكلفة زيادة الإنتاج من 2000 قميص إلى 5000 قميص يوميًّا بالتكامل: $\int_{2000}^{5000}(20-0.004x)\,dx$. ما قيمة الزيادة في التكلفة؟ 18000 ريال

إرشادات للمعلم الجديد

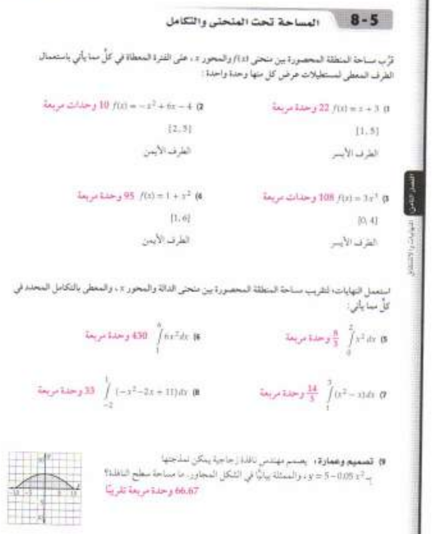
إجابة السؤال لجميع "مسائل من واقع الحياة"، ذكّر الطلاب بأن عليهم التحقّق من أنهم قد أجابوا عن المطلوب في المسألة. في المثال 5، تحتاج الإجابة إلى ضرب المساحة في 2 لوجود ممرين متطابقين، ثم الضرب في 22.4 ريالًا .

تنويع التعليم

فوق

توسُّع: احسب $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ من خلال التَّمثيل البياني للدالة ، وتحديد المساحة الدقيقة تحت المنحنى. وضِّح إجابتك.

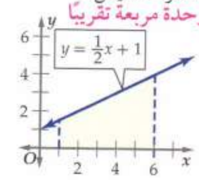
6.28، المساحة الدقيقة تحت المنحنى هي 2π ؛ لأن المنطقة على شكل نصف دائرة طول نصف قطرها 2.



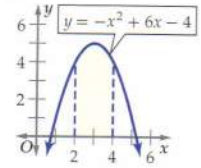
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

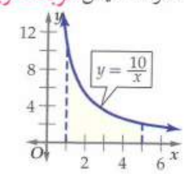
1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن **15 وحدة مربعة تقريبًا**



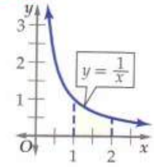
2) 4 مستطيلات **9.25 وحدات**
الطرف الأيسر **مربعة تقريبًا**



3) 8 مستطيلات **14.29 وحدة**
الطرف الأيمن **مربعة تقريبًا**



4) 5 مستطيلات **0.65 وحدة**
الطرف الأيمن **مربعة تقريبًا**

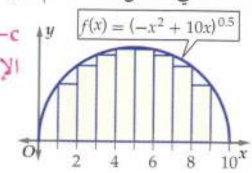


5) **أرضيات:** يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x)=(-x^2+10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟

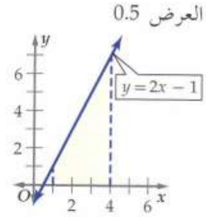
a–c) انظر ملحق الإجابات



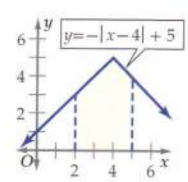
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2)

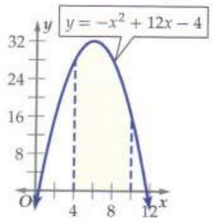
6) العرض 0.5



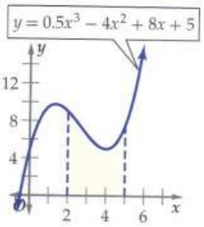
7) العرض 0.5 **6-9) انظر الهامش**



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_1^4 4x^2\,dx$ **84 وحدة مربعة تقريبًا**

11) $\int_0^2 6x\,dx$ **12 وحدة مربعة تقريبًا**

12) $\int_1^3 (2x^2+3)\,dx$ **23.33 وحدة مربعة تقريبًا**

13) $\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$ **10.67 وحدات مربعة تقريبًا**

14) $\int_3^4 (-x^2+6x)\,dx$ **8.67 وحدات مربعة تقريبًا**

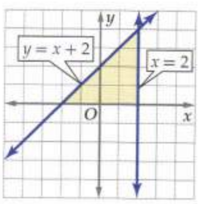
15) $\int_2^4 (-3x+15)\,dx$ **12 وحدة مربعة تقريبًا**

16) $\int_2^5 (x^2-x+1)\,dx$ **33.33 وحدة مربعة تقريبًا**

17) $\int_1^3 12x\,dx$ **48 وحدة مربعة تقريبًا**

18) **طباعة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًّا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب. فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل $\int_{1000}^{1500} (10-0.002x)\,dx$. (مثال 5) **3750 ريالًا**

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث. **انظر الهامش**

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x+2)\,dx$. **8 وحدات مربعة**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ **0.67 وحدة مربعة تقريبًا**

21) $\int_{-1}^{0} (x^3+2)\,dx$ **1.75 وحدة مربعة تقريبًا**

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2-6x)\,dx$ **17.33 وحدة مربعة تقريبًا**

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\,dx$ **12.5 وحدة مربعة تقريبًا**

24) $\int_{-2}^{0} (2x+6)\,dx$ **8 وحدات مربعة تقريبًا**

25) $\int_{-1}^{0} (x^3-2x)\,dx$ **0.75 وحدة مربعة تقريبًا**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-18 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع في التمارين 4–1، قد ينسى الطلاب أن يضربوا في عرض المستطيلات؛ لذا ذكِّرهم بضرورة الضرب في العرض الصحيح لهذه المستطيلات .

إجابات:

5c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل. إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد في حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات.

6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.

7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–18 ، 31–33 ، 35–47
ضمن المتوسط	1–29 (فردي)، 30–33، 35–47
فوق المتوسط	19–47

8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.

9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة. المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

19a) الارتفاع = 4 وحدات، القاعدة = 4 وحدات، المساحة = 8 وحدات مربعة

4 التقويم

هم الرياضيات اطلب إلى الطلاب الكتابة
ن كيفية استعمال المستطيلات في إيجاد
مساحة التقريبية تحت منحنى دالة ما.
جابة ممكنة: أوجد مساحة كل مستطيل
ضرب العرض في الطول الذي يُمثّل
مة الدالة عند نقطة، ثم اجمع مساحات
مستطيلات.

تمثيلات متعددة

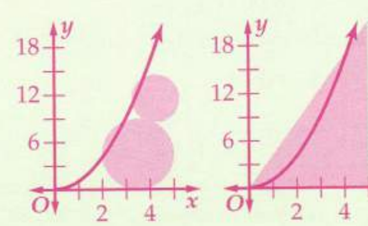
ستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل
بياني لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة
ن منحنيين، ثم حسابها جبريًّا.

تنبيه !

اكتشف الخطأ: في التمرين 31، على الطلاب إدراك أن التقريب الأكبر يتغيّر اعتمادًا على سلوك الدالة. إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى سيُعطي قيمة أكبر للمساحة. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات هو الذي يُعطي تقريبًا أكبر للمساحة.

جابات:

) إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريبًا جيدًا للمساحة، وذلك اعتمادًا على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات. أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.



استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$ **10.67 وحدات مربعة تقريبًا**

27) $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$ **4 وحدات مربعة تقريبًا**

28) $\int_{-4}^{3}2\,dx$ **14 وحدة مربعة تقريبًا**

29) $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ **3.75 وحدات مربعة تقريبًا**

30) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين. **a-e) انظر ملحق الإجابات**

a) **بيانيًا:** مَثِّل منحنيي $f(x)=-x^2+4, g(x)=x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه وظلّل المساحتين اللتين يمثلهما التكاملان $\int_0^1(-x^2+4)\,dx, \int_0^1 x^2\,dx$

b) **تحليليًا:** احسب $\int_0^1(-x^2+4)\,dx, \int_0^1 x^2\,dx$.

c) **لفظيًا:** وضّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساوية لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$. ثم احسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع b.

d) **تحليليًا:** أوجد $f(x)-g(x)$، ثم احسب $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$

e) **لفظيًا:** خمّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

32) **تبرير:** افترض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f. اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\,dx$، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلومًا. برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

33) **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة. **انظر إجابات الطلاب**

34) **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t(x^2+2)\,dx$. $\frac{t^3}{3}+2t$

35) **اكتب:** وضّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟ **انظر الهامش**

مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4) **36-38) انظر الهامش**

36) $j(x)=(2x^3+11x)(2x^8-12x^2)$

37) $f(k)=(k^{15}+k^2+2k)(k-7k^2)$

38) $s(t)=(\sqrt{t}-7)(3t^8-5t)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$: (الدرس 8-3)

39) $y=x^3$ **3**

40) $y=x^3-7x^2+4x+9$ **−7**

41) $y=(x+1)(x-2)$ **1**

أوجد كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 8-2)

42) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$ **3**

43) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ **−1**

44) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$ $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار

45) ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y=-x^2-3x+6$ والمحور x، في الفترة $[2, 6]$؟ **A**

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

46) أيٌّ مما يأتي يمثّل مشتقة $n(a)=\frac{4}{a}-\frac{5}{a^2}+\frac{3}{a^4}+4a$؟ **J**

F $n'(a)=8a-5a^2+3a^4$

H $n'(a)=4a^2-5a^3+3a^4+4$

G $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{3}{a^5}+4$

J $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{10}{a^3}-\frac{12}{a^5}+4$

47) ما قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$؟ **J**

F $\frac{1}{15}$ H $\frac{3}{15}$

G $\frac{2}{15}$ J $\frac{4}{15}$

32) إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

36) $j'(x)=(6x^2+11)(2x^8-12x^2)+(2x^3+11x)(16x^7-24x)$

37) $f'(k)=(15k^{14}+2k+2)(k-7k^2)+(k^{15}+k^2+2k)(1-14k)$

38) $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8-5t)+(\sqrt{t}-7)(24t^7-5)$

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

The Fundamental Theorem of Calculus

فيما سبق:

درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة.

والآن:

- أجدُ دوال أصلية.
- أستعملُ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فإنه من الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-8 و4-8، أنَّه إذا أُعطيْتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة المتجهة، وطُلِب إليك إيجاد الصيغة التي تم إيجاد السرعة المتجهة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f.

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحققُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f،

فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$

إجابة ممكنة: $x^2, x^2 + 5, x^2 - 7, x^2 + 28$

1B) $-3x^{-4}$

إجابة ممكنة: $x^{-3}, x^{-3} + 33, x^{-3} - 4, x^{-3} + 9$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .

8-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-8

استعمال النهايات؛ لتقريب المساحات تحت منحنى دالة.

الدرس 6-8

إيجاد دوال أصلية.

استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الدرس 6-8

إيجاد تكاملات لدوال من غير كثيرات الحدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما علاقة الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم بالدالة التي تُمثّل ارتفاعه؟
  الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم هي مشتقة الدالة التي تُمثّل ارتفاعه.
  أو الدالة التي تُمثّل ارتفاع القلم هي الدال الأصلية للدالة التي تُمثّل سرعته.
- ما الذي يحتاج إليه علي لتحديد الارتفاع الذي أسقط منه القلم؟ يحتاج لإيجاد الدالة الأصلية لدالة السرعة وتعويض ع الثواني التي استغرقها القلم للوصول إلى سطح الأرض بدلًا من t.

مصادر الدرس 6-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177, 179)
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي **قواعد الدالة الأصلية**

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 **قواعد الدوال الأصلية**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$ الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= \frac{1}{2}x^8 + C$ بالتبسيط

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ الدالة المعطاة

$= 2x^{-4}$ بإعادة كتابة الدالة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$ بالتبسيط

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$ بإعادة كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $f(x) = 6x^4$ $F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$

2B) $f(x) = \frac{10}{x^3}$ $F(x) = -5x^{-2} + C$

2C) $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ $F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C$

يُعطى الشكل العام للدَّالة الأصلية باسم ورمز خاصَّين.

مفهوم أساسي **التكامل غير المحدد**

يُعطى **التكامل غير المحدد** للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$ ، فمثلًا ، إذا كان $f(x) = 3$ ، فإن $F(x) = 3x$.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثالان 1, 2 يُبيِّنان كيفية إيجاد دالة أصلية لدوال كثيرات الحدود ودوال القوى.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 6x$ إجابة ممكنة: $3x^2$

b) $f(x) = -6x^{-7}$ إجابة ممكنة: x^{-6}

2 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^5$ $\frac{1}{2}x^6 + C$

b) $f(x) = \frac{4}{x^6}$ $-\frac{4}{5x^5} + C$

c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثاني الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي تعلوا عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\, dt \qquad \text{العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة}$$

$$= \int -32t\, dt \qquad v(t) = -32t$$

$$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C \qquad \text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت}$$

$$= -16t^2 + C \qquad \text{بالتبسيط}$$

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، 0 s للزمن الابتدائي.

$$s(t) = -16t^2 + C \qquad \text{الدالة الأصلية لـ } v(t)$$

$$30 = -16(0)^2 + C \qquad s(t) = 30,\ t = 0$$

$$30 = C \qquad \text{بالتبسيط}$$

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 30 \qquad \text{دالة موقع الكرة}$$

$$0 = -16t^2 + 30 \qquad s(t) = 0$$

$$-30 = -16t^2 \qquad \text{بطرح 30 من كلا الطرفين}$$

$$1.875 \approx t^2 \qquad \text{بقسمة كلا الطرفين على } -16$$

$$1.369 \approx t \qquad \text{بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين}$$

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تحقق من فهمك

3) **سقوط حر:** عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعةُ المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها. $s(t) = -16t^2 + 120$

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

3B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-8، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًا التسارع نفسه، بإهمال تأثير الهواء. وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد ثابت التكامل في مواقف خاصة.

مثال إضافي

3 **القفز إلى الماء:** تُمثّل الدالة $v(t) = -32t$ السرعة التي قفز بها شخص من فوق منحدر ارتفاعه 100 ft باتجاه سطح الماء، حيث $v(t)$ سرعة الشخص المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية t.

a) أوجد دالة موقع الشخص $s(t)$ بعد t ثانية من قفزه.
$s(t) = -16t^2 + 100$

b) أوجد الزمن الذي يستغرقه الشخص للوصول إلى سطح الماء. 2.5 s

إرشادات للمعلم الجديد

الدوال الأصلية أكد على الطلاب أن مصطلح الدالة الأصلية «مصطلح مضلل» إذ يوجد دوال أصلية عددها لانهائي، فلا نقول: أوجد الدالة الأصلية، إنما نقول: أوجد دالة أصلية، حيث إن وجود ال التعريف تعني واحدة فقط.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثال 4 يُبيِّن كيفية استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

مثال إضافي

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x في الفترة المعطاة

a) $y = 5x^4$ على الفترة $[2, 4]$، أو $\int_2^4 5x^4\,dx$. 992 وحدة مربعة

b) $y = -x^2 + 6x + 9$ على الفترة $[0, 6]$، أو $\int_0^6 (-x^2 + 6x + 9)\,dx$. 90 وحدة مربعة

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة على الطلاب إضافة مدخل يوضحون فيه مفهوم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، وكيفية استعمالها في حساب المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

إرشادات للمعلم الجديد

دوال أصلية عند حساب تكامل ما، نبّه الطلاب إلى ضرورة إيجاد دالة أصلية أولًا ثم القيام بالتعويض.

تاريخ الرياضيات

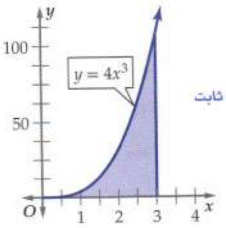
ماريا آجنسي (1718–1799)
عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

مثال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$ أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا، أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C \quad \text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت}$$

$$= x^4 + C \quad \text{بالتبسيط}$$

الآن، احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

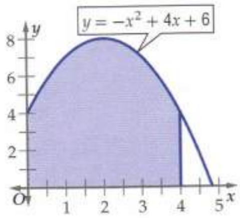
$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C) \quad a = 1, b = 3$$

$$= 81 - 1 = 80 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$ أو $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



أولًا، أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C \quad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \quad \text{بالتبسيط}$$

الآن، احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right) \quad a = 0, b = 4$$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67 \quad \text{بالتبسيط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$ 117

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$ 46

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، وحساب الفرق بين القيمتين، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا الدالتين الأصليتين، فإن الفرق بين قيمتي C يساوي صفرًا. لذا، فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$ بالتبسيط

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right]$ $a = 2, b = 3$

$= 20.25 - 14 = 6.25$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$ $2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B) $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$ 15.6

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالَّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\, dx$. ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$\int_0^{0.5} 360x\, dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$ $a = 0, b = 0.5$

$= 45 - 0 = 45$ بالتبسيط

أي أن الشغل اللازم هو 45 J.

تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\, dx$ 116.62 J

6B) $\int_0^{1.4} 512x\, dx$ 501.76 J

تنبيه!

التكاملات صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثالان 5, 6 يُبيّنان كيفية إيجاد التكاملات المحددة وغير المحددة.

مثالان إضافيان

5 أوجد كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (x^3 - 2x + 1)\, dx$

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b) $\int_1^4 (x^3 - 2x + 1)\, dx$

51.75

6 يُعطى الشغل اللازم لشد نابض من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{2.5} 60x\, dx$. ما قيمة الشغل اللازم مقيسًا بوحدة الجول؟ 187.5J

المحتوى الرياضي

التكاملات المحددة وغير المحددة

ينتج عن التكامل غير المحدد للدالة حد ثابت، إلا أن هذا الثابت يُحذف عند حساب التكامل المحدد؛ لأنه يُضاف إلى الحد العلوي، ويُطرح من الحد السفلي للتكامل.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون: نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إليهم كتابة فقرة يصفون فيها النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل واستعمالاتها. واطلب إليهم عرض أعمالهم أمام الطلاب الآخرين.

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1,2)

1) $f(x) = x^5$ — 1–6) انظر الهامش

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

3) $q(r) = \frac{3}{4}r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8}r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

4) $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$

6) $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$

7) **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$ — a–c) انظر الهامش.

b) احسب قيمة C عندما $t = 2s$ ، $s(t) = 0$.

c) كم ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4,5)

8) $\int (6m + 12m^3)\, dm$ — $3m^2 + 3m^4 + C$

9) $\int_1^4 2x^3\, dx$ — 127.5

10) $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$ — 46.5

11) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4\right) dh$ — 7.99

12) $\int (3.4t^4 - 1.2t^3 + 2.3t - 5.7)\, dt$

$0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$

13) $\int (14.2w^{6.1} - 20.1w^{5.7} + 13.2w^{2.3} + 3)\, dw$

$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (مثال 6)

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$. $s(t) = -16t^2 + 34t$

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟ 2.125 s

15) **هندسة:** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت هذه القوس. (مثال 6) $264600\ ft^2$

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) $\int_{-3}^{1} 3\, dx$ — 12

17) $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\, dx$ — 27

18) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$ — 2.5

19) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\, dx$ — 4

20) $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\, dx$ — 28.5

21) **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوفة بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعها 228 ft بعد 3 s .

a) أوجد أقصى ارتفاع تصله المقذوفة. 237 ft

b) أوجد سرعة المقذوفة عندما تصل إلى سطح الأرض. −123.16 ft/s تقريبًا

احسب كل تكامل مما يأتي: 22–27) انظر الهامش.

22) $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

23) $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

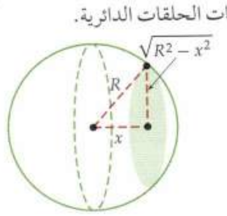
24) $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

25) $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\, dt$

26) $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

27) $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

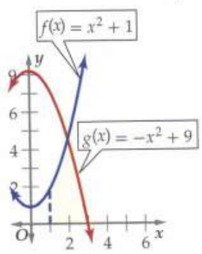
28) **حجم الكرة:** يمكن إيجاد حجم كرة طول نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات الحلقات الدائرية.



يبلغ طول نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx$ لحساب حجم الكرة. $\frac{4}{3}\pi R^3$

29) **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$. 6 وحدات مربعة



تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–15، 32–46
ضمن المتوسط	1–19 فردي، 21، 22–26 زوجي، 28، 29، 30، 32 – 46
فوق المتوسط	16–46

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: للأسئلة 8 و 12 و 13 ، ذكِّر الطلاب بإضافة الثابت C في إجاباتهم؛ لأن التكاملات غير محددة .

إجابات

1) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$

2) $F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C$

3) $Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C$

4) $W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{5}u^2 + C$

5) $U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C$

6) $M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C$

7) $s(t) = -16t^2 + C$

7) $s(t) = -16t^2 + 64$

7) $28ft$

2) $-x^3 - 4x^2 + 24$

2) $2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$

2) -92

2) $-3x^3 - 2x^2 - 576$

2) $4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$

$-7x^3 + 44x + 57$

30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) **هندسيًّا:** مَثِّل الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًّا، وظلِّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \leq x \leq 4$. انظر ملحق الإجابات (a, c, e

b) **تحليليًّا:** احسب كلًّا من:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\,,\ \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$ 4, −4

c) **لفظيًّا:** أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) **تحليليًّا:** أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب 0, 8

$$\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$$

e) **لفظيًّا:** أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ ، حيث r عدد ثابت. $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك: (32–34 انظر الهامش

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

33) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

34) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\,dx$

35) **برهان:** أثبت أنه لأي عددين ثابتين m ، n ، فإن $\int_a^b (n + m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$. انظر ملحق الإجابات

36) **تبرير:** صف قيم $\int_a^b f(x)\,dx$ ، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، $f(x)$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \leq x \leq b$. انظر ملحق الإجابات

37) **اكتب:** بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد. انظر الهامش

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي: (الدرس 8-5)

38) $\int_{-2}^{2} 14x^6\,dx$ 512

39) $\int_0^6 (x + 2)\,dx$ 30

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4)

40) $j(k) = \frac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$ $\quad \frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2}$

41) $g(n) = \frac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$ $\quad \frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2 + 1)^2}$

42) إذا كان $\lim_{x \to 1} (2x^2 + ax) = 8$ ، فأوجد قيمة a. (الدرس 8-2) 6

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (الدرس 8-3)

43) $y = x^2 + 3$ $\quad m = 2x$

44) $y = x^3$ $\quad m = 3x^2$

تدريب على اختبار

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k؟ C

A 1

B 2

C 3

D 4

46) يُعطى الشغل المبذول لضخِّ المياه خارج بركة سباحة أبعادها $10m \times 5m \times 2m$ بالتكامل $\int_0^2 490000x\,dx$.

ما قيمة الشغل المبذول بالجول؟ F

F 980000J

G 985000J

H 990000J

J 995000J

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = 4x^3$ $\quad F(x) = x^4 + C$

2) $f(x) = 2x + 3$ $\quad F(x) = x^2 + 3x + C$

3) $f(x) = x(x^2 - 3)$ $\quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$

4) $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$ $\quad F(x) = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$

احسب كل تكامل مما يأتي:

5) $\int 8\,dx$ $\quad 8x + C$

6) $\int (2x^3 + 6x)\,dx$ $\quad \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + C$

7) $\int (-4x^3 - 2x^2 + 5x)\,dx$ $\quad -x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

8) $\int_2^5 2x\,dx$ $\quad 21$

9) $\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2)\,dx$ $\quad 500$

10) $\int_{-2}^{1} (1 - x)(x + 3)\,dx$ $\quad 9$

11) **فيزياء:** الشُّغل اللازم بوحدة الجول لضغط نابض مسافة x قدم من وضعه الطبيعي يُعطى بالصيغة $W = \int_0^x 2x\,dx$. ما مقدار الشُّغل اللازم لضغط النابض مسافة 6in من وضعه الطبيعي؟ 0.25J

12) **أعمال النجارة:** افرض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة x قطعة أثاث تُعطى بالتكامل $h = \int_0^x (30 - 3x)\,dx$ ، فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟ 126h

23

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل البياني والتحليل الجبري، والتعبير اللفظي لاستكشاف العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب كتابة كيفية استفادته من مفاهيم الدرس السابق عن التكامل في الدرس الجديد عن الدوال الأصلية.

إجابات:

32) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفرًا.

33) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائمًا.

34) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $f(x)$ دالة زوجية وكل من a,b سالبًا.

37) إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة $F(x)$ على الثابت C ، فإنه سيظهر في كل من $F(b)$ و $F(a)$ ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن C تحذف.

تنويع التعليم

فوق

توسُّع: افترض أن $f(x)$ دالَّة متصلة وأن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$. أثبت أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$
$$= [F(c) - F(a)]$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 8-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزاد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كلاهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

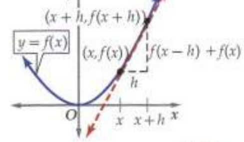
حساب النهايات جبريًا (الدرس 8-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 8-3)

- مُعدَّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 8-4)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 8-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث b ، a هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 8-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

النهاية من جهة واحدة ص 132	المؤثر التفاضلي ص 157
النهاية من جهتين ص 136	التجزيء المنتظم ص 167
التعويض المباشر ص 141	التكامل المحدد ص 167
الصيغة غير المحددة ص 142	الحد الأدنى ص 167
المماس ص 150	الحد الأعلى ص 167
مُعدل التغير اللحظي ص 150	مجموع ريمان الأيمن ص 167
قسمة الفرق ص 150	التكامل ص 167
السرعة المتجهة اللحظية ص 152	الدالة الأصلية ص 173
المشتقة ص 157	التكامل غير المحدد ص 174
الاشتقاق ص 157	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 175
المعادلة التفاضلية ص 157	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو معدل التغير اللحظي والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال التكامل المحدد

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال التعويض المباشر، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$ فإن $F(x)$ تُسمى دالة أصلية لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ الصيغة غير المحددة.

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ الاشتقاق .

7) إذا سُبقت دالة بـ $\frac{d}{dx}$ المؤثر التفاضلي ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة السرعة المتجهة اللحظية .

التقويم التكويني

المفردات

شير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى صفحة التي وردت فيها المفردة لأول رة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل أسئلة 8-1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال ذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

حاجي المفردات:

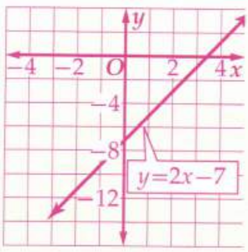
عزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال ربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات متقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن لمة باستعمال قائمة الحروف، والبحث عن لمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل طلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق مل مطبوعة.

مراجعة الدروس

مراجعة : إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

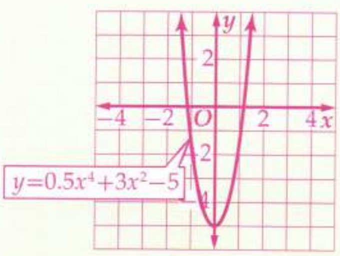
إجابات

9) -1



	2.99	2.999	3	3.001	3.01
	-1.02	−1.002		−0.998	−0.998

10) -1.5



	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
	−1.579	−1.508		−1.499	−1.492

مراجعة الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 130-138)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x\to3}(2x-7)$ (9, 10) انظر الهامش

10) $\lim_{x\to1}(0.5x^4+3x^2-5)$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ 5

12) $\lim_{x\to4}\frac{x^2+x+20}{x-4}$ غير موجودة

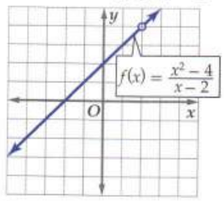
13) $\lim_{x\to4}\frac{9}{x^2-8x+16}$ ∞

14) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}$ غير موجودة

مثال 1

قدّر $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ بالعدد 4.



التعزيز عدديًا : كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ←   → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4.

8-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 139-148)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x\to5}\frac{x^2+2x+10}{x}$ 9

16) $\lim_{x\to-1}(5x^2-2x+12)$ 19

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عند $x=25$.

17) $\lim_{x\to25}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-5}$

18) $\lim_{x\to2}(-3x^3-2x^2+15)$ -17

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2-2x-8}$ $-\frac{1}{6}$

20) $\lim_{x\to\infty}(2-4x^3+x^2)$ $-\infty$

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to2}(2x^3-x^2+4x+1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to2}(2x^3-x^2+4x+1)=2(2)^3-2^2+4(2)+1$$
$$=16-4+8+1=21$$

b) $\lim_{x\to-4}\frac{2x-7}{2-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x=-4$؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to-4}\frac{2x-7}{2-x^2}=\frac{2(-4)-7}{2-(-4)^2}=\frac{-8-7}{2-16}=\frac{15}{14}$$

8-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 150-155)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

21) $y = 6 - x, (-1, 7), (3, 3)$ $\quad -1, -1$

22) $y = x^2 + 2, (0, 2), (-1, 3)$ $\quad 0, -2$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23) $y = -x^2 + 3x$ $\quad m = -2x + 3$

24) $y = x^3 + 4x$ $\quad m = 3x^2 + 4$

تمثّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية. أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $s(t) = 15t - 16t^2, t = 0.5$ $\quad v(0.5) = -1 \text{ ft/s}$

26) $s(t) = -16t^2 - 35t + 400, t = 3.5$ $\quad v(3.5) = -147 \text{ ft/s}$

تمثّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

27) $h(t) = 12t^2 - 5$ $\quad v(t) = 24t$

28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ $\quad v(t) = -4t + 3$

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ صيغة مُعدَّل التغيُّر اللحظي

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $\quad x = 2$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ $\quad f(2+h) = (2+h)^2, f(2) = 2^2$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$ بفك الأقواس

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h}$ بالتبسيط، ثم بالتحليل

$= \lim_{h\to 0} (4 + h)$ بالقسمة على h

$= 4 + 0 = 4$ خصائص المجموع للنهايات ونهاية الدالة الثابتة والدالة المحايدة

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4.

8-4 المشتقات (الصفحات 157-164)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11, t = -4, 1$ $\quad g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3$

30) $m(j) = 10j - 3, j = 5, -3$ $\quad m'(j) = 10; m'(5) = 10, m'(-3) = 10$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: للتمارين 31-34 انظر الهامش

31) $p(v) = -9v + 14$

32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35) $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$ $\quad f'(m) = \frac{-25}{(5+2m)^2}$

36) $m(q) = \frac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ $\quad m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5, g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x), g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

$g(x) = x^3 + 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)3x^2}{(x^3 + 2)^2}$ بالتعويض

$= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$ بالتبسيط

جابات:

31) $p'(v) = -9$

32) $z'(n) = 8n + 9$

33) $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

34) $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

إجابات:

43) $G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

44) $R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

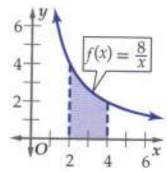
45) $M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

46) $P(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 165-172)

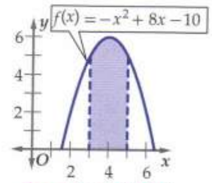
قرّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

37)



5.16 وحدة مربعة

38)



11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

39) $\int_1^2 2x^2\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

40) $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$ 37.5 وحدة مربعة تقريبًا

41) $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

42) $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$ 55.5 وحدة مربعة تقريبًا

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة [0, 2] أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 2, a = 0$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$ $a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$

$\int_0^2 2x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$ $x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\right)$ بالتبسيط

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ صيغ المجموع

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ بالتبسيط

$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ بإخراج عامل مشترك، ثم القسمة على n^2

$= \frac{16}{3} \approx 5.33$ خصائص النهايات

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 173-179)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي: 43-46 انظر الهامش

43) $g(n) = 5n - 2$

44) $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

45) $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

46) $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

47) $\int 8x^2\,dx$ $\frac{8}{3}x^3 + C$

48) $\int (2x^2 - 4)\,dx$ $\frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

49) $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$ 2466.53 وحدة مربعة

50) $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ بإعادة كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -1x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$ بالتبسيط

b) $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 7x^0$ بإعادة كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ بالتبسيط

تطبيقات ومسائل

51) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، حيث $t \geq 5$. (الدرس 1-8)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات. **2966 حيوانًا**

b) أوجد $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ ؟ **8000**

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة.
افترض أن الدالة $v(t) = \frac{800t}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الريالات. (الدرس 1-8)

a) مَثِّل الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \leq t \leq 10$. **انظر الهامش**

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3 , 6 , 10$. **7674, 11114, 13524**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$. **20000**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة. **انظر الهامش**

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 ريال، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك. **نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة**

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. (الدرس 2-8)

a) أكمل الجدول أدناه: **للتمارين a, b انظر الهامش**

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) مَثِّل الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ إذا كانت موجودة. **90**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.
إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالًا

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًّا إلى الأعلى بسرعة 150 ft/s.
افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 3-8)

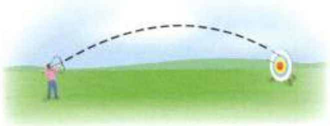
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. $-32t + 150$

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟ **102 ft/s**

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟ **≈4.69 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **≈359.8 ft**

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف.
افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 3-8)



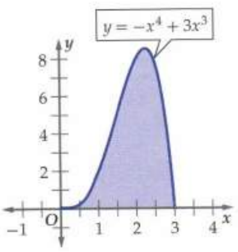
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم. $-32t + 35$

b) ما سرعة السهم بعد 0.5 s من إطلاقه؟ **19 ft/s**

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟ **≈1.09 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟ **≈20.64 ft**

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ (الدرس 6-8) **607.5 in²**



57) ضفادع: تمثل الدالة $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية ، حيث t الزمن بالثواني. (الدرس 6-8)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$ ، على فرض أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$.
$s(t) = -16t^2 + 26t$

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟
1.63 s

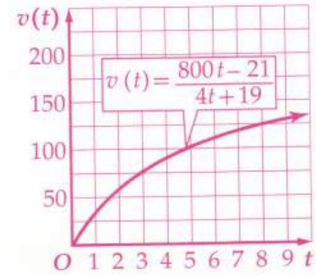
58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 6-8) **a)** $-16t^2 + 20$

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض. **... 2 s**

إجابات:

52a)

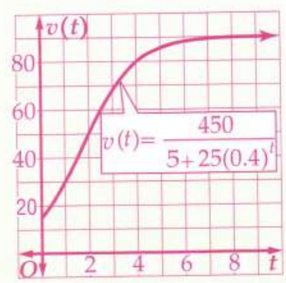


52d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

53a)

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

53b)



اختبار الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$ **-6**
2) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ **8**
3) $\lim_{x\to 7} \frac{6}{x-7}$ **غير موجودة**
4) $\lim_{x\to\infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$ **∞**

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. **100**

b) فَسّر الناتج في الفرع a. **انظر الهامش**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$ **-25**
7) $\lim_{x\to 9} (2x^3 - 12x + 3)$ **1353**

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **200**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 7x + 2)$ **∞**
10) $\lim_{x\to\infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$ **∞**
11) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$ **0**
12) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{25+x} - 4}{x}$ **0**

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$؟ **A**

A $-\frac{1}{9}$
B 0
C $\frac{1}{9}$
D غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$, $(-5, 7)$, $(-2, -8)$ **$-8, -2$**
15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$, $(-1, -2)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ **$-12, -\frac{3}{4}$**
16) $y = (2x+1)^2$, $(-3, 25)$, $(0, 1)$ **$-20, 4$**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$ **$v(t) = 9 + 6t$**
18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$ **$v(t) = 20t - 21t^2$**
19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$ **$v(t) = 9t^2 + 4$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$ **$f'(x) = -3$**
21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$ **$b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$**
22) $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$ **$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}}$**
23) $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ **$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8$**
24) $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$ **$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$**

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالريال لإنتاج x كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x) = 15 - 0.005x$.

a) أوجد دالة تمثل التكلفة الحقيقية. **$C(x) = 15x - 0.0025x^2$**

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة. **3125 ريالًا**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\,dx$ **10.5 وحدات مربعة تقريبًا**
27) $\int_3^8 10x^4\,dx$ **65050 وحدة مربعة تقريبًا**
28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\,dx$ **156 وحدة مربعة تقريبًا**

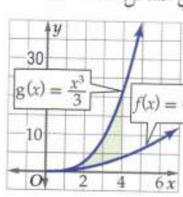
أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$ **$D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C$**
30) $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$ **$W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C$**

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\,dx$ **$\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C$**
32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\,dx$ **45**

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟ **H**



F $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة
G $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة
H $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة
J 16 وحدة مساحة

الفصل 8 اختبار الفصل

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدّيًا للطلاب.

إجابة:

5b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (134)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة للفصل 8، ص 129

1) يظهر من المنحنى أن $g(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$، و $g(x)\to 0$ عندما $x\to-\infty$.

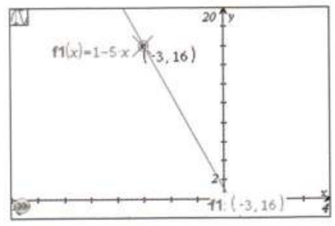
2) يظهر من المنحنى أن $f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$، و $f(x)\to 0$ عندما $x\to-\infty$.

3) يظهر من المنحنى أن $p(x)\to 1$ عندما $x\to\infty$، و $p(x)\to 1$ عندما $x\to-\infty$.

4) من المنحنى، يظهر أن $m(x)\to -5$ عندما $x\to\infty$، وأن $m(x)\to -5$ عندما $x\to-\infty$.

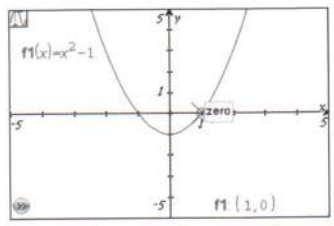
الدرس 1-8 (تحقق من فهمك)، ص (130, 131)

1A)



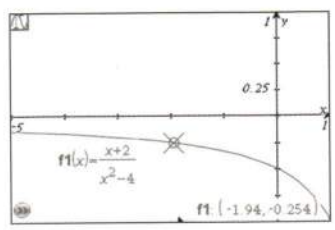
x	−3.01	−3.001	−3	−2.999	−2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

1B)



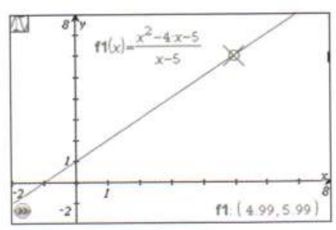
x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	−0.0199	−0.001999		0.002001	0.0201

2A)



x	−1.99	−1.999	−2	−2.001	−2.01
$f(x)$	−0.2506	−0.2501		−0.2499	−0.2494

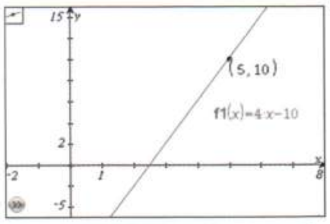
2B)



x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

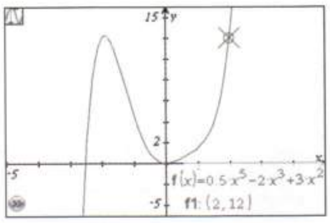
الدرس 1-8، ص (137, 138)

1)



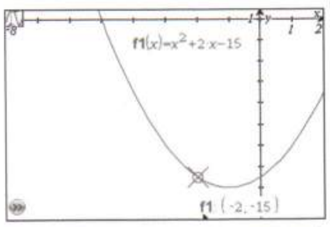
x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

2)



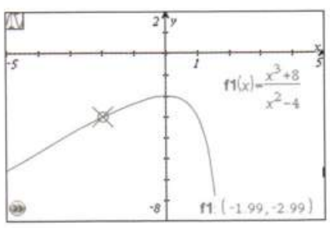
x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

3)



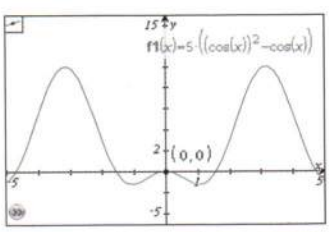
x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−14.98	−14.998		−15.002	−15.02

4)



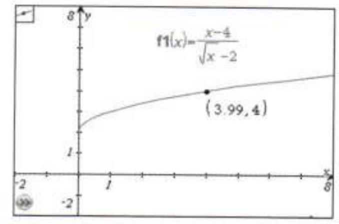
x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−3.008	−3.0008		−2.9993	−2.993

5)



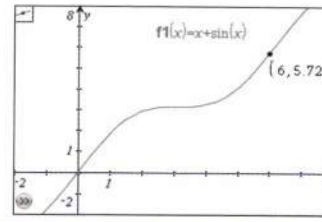
x	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	−0.0002	−0.000002		−0.000002	−0.0002

(6



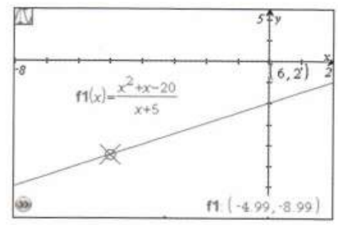
x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.998	3.9997		4.0002	4.003

(7



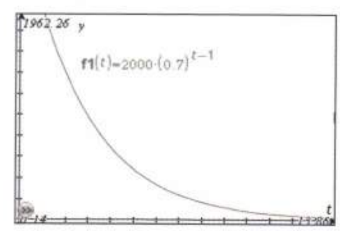
x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

(8



x	−5.01	−5.001	−5	−4.999	−4.99
$f(x)$	−9.01	−9.001		−8.999	−8.99

(37a



(37b $(5, 480.2)$ ، $(10, 80.71)$ ، $(15, 13.56)$

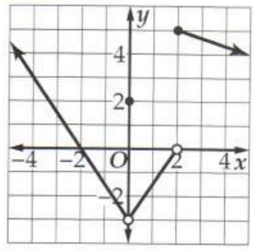
(37d لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريبًا، وهو أقل من 7000 m ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

(49 إجابة ممكنة: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، $g(x)=\begin{cases}2x & ، x=0\\ x+1 & ، x>0\end{cases}$.

(50 $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة؛ $\lim_{x\to 2} g(x)$ غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام الدالة النسبية صفرًا، والبسط لا يساوي صفرًا عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

(51 أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c. فإذا كانت الدالة غير متصلة عند c، وكان $f(c)=L$، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة مختلفة عن L.

(52 إجابة ممكنة:



(54 إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن x بـ a في الدالة، أما إذا لم تكن الدالة متصلة، فبإمكانك التبسيط ثم التعويض عن x بـ a. وإذا لم تفد أي من الطريقتين، فإننا نقدّر النهاية باستعمال التمثيل البياني.

(55

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)\stackrel{?}{=}\cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\div\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\stackrel{?}{=}\cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cancel{\cos\theta}\cdot\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\right)\stackrel{?}{=}\cos^2\theta$$

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\stackrel{?}{=}\cos^2\theta$$

$$\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\cancel{\sin\theta}}\right)\stackrel{?}{=}\cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta=\cos^2\theta$$

(56 عند $x=5$:

$$h(5)=0$$

$$\lim_{x\to 5} h(x)=0$$

وبما أن $h(5)=\lim_{x\to 5} h(x)$ ، فإن $h(x)$ متصلة عند $x=5$

عند $x=-5$:

$$h(-5)=\frac{0}{0}\ (\text{غير معرّفة})$$

$$\lim_{x\to -5} h(x)=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)}=-10$$

وبما أن $h(-5)$ غير معرّفة، $\lim_{x\to -5} h(x)$ موجودة فإنه يوجد نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-5$.

(41a $\lim_{x\to 0}\frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}=38$ ؛ عندما تكون الإستضاءة أقل ما يمكن فإنه لا يوجد ضوء. وعندما يكون المكان مظلمًا، فإن اتساع بؤبؤ عين الحيوان يكون 38 mm.

(41b $\lim_{x\to\infty}\frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}=8.5$ ؛ عندما تكون الإستضاءة أكبر ما يمكن فإن اتساع بؤبؤ عين الحيوان يكون 8.5 mm.

(49

$$\lim_{x\to c} p(x)=\lim_{x\to c}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0)$$
$$=\lim_{x\to c} a_nx^n+\lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1}+\dots+\lim_{x\to c} a_2x^2+\lim_{x\to c} a_1x+\lim_{x\to c} a_0$$
$$=a_n\lim_{x\to c} x^n+a_{n-1}\lim_{x\to c} x^{n-1}+\dots+a_2\lim_{x\to c} x^2+a_1\lim_{x\to c} x+\lim_{x\to c} a_0$$
$$=a_n\left(\lim_{x\to c} x\right)^n+a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1}+\dots+a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2+a_1\lim_{x\to c} x+\lim_{x\to c} a_0$$
$$=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\dots+a_2c^2+a_1c+a_0$$
$$=p(c)$$

(50 أثبت أن العبارة صحيحة عند $n=1$،

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^1=L^1=L=\lim_{x\to c}[f(x)]$$

أي أن العبارة صحيحة عند $n=1$. افترض أن العبارة صحيحة عند $n=k$ حيث k عدد صحيح موجب أي: $\lim_{x\to c}[f(x)]^k=L^k$.
والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عند $n=k+1$ أي أن

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{k+1}=L^{k+1}$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{k+1}=\lim_{x\to c}[f(x)]^k\cdot\lim_{x\to c}[f(x)]^1=L^k\cdot L^1=L^{k+1}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n=k+1$. وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

(53 إجابة ممكنة:

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}(x+5)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$
خاصية الفرق	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}(x-5)=\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}5$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim_{x\to c}[kf(x)]=k\lim_{x\to c}f(x)$	$\lim_{x\to 2}2x=2\lim_{x\to 2}x$
خاصية الضرب	$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}[x^2(x-5)]=\left(\lim_{x\to 2}x^2\right)\left(\lim_{x\to 2}x-5\right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$, if $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$	$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{(x-5)}\right]=\frac{\left(\lim_{x\to 2}x^2\right)}{\left(\lim_{x\to 2}x-5\right)}$ حيث $\lim_{x\to 2}(x-5)\neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x\to c}[f(x)^n]=[\lim_{x\to c}f(x)]^n$	$\lim_{x\to 2}[(x-5)^2]=[\lim_{x\to 2}(x-5)]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$ إذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)>0$ عندما n زوجي.	$\lim_{x\to 9}\sqrt{(x-5)}=\sqrt{\lim_{x\to 9}(x-5)}$

(54 إجابة ممكنة: إذا كانت النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$، فإنها لا تساوي 1، لأن ∞ ليس عددًا حقيقيًّا؛ بل يمثل رمزًا. حَلِّل هذه المسألة بتمثيل الدالة النسبية الأصلية بيانيًّا، وملاحظة سلوكها حول نقطة النهاية.

(58

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-2x+x+9=x^2-x+9$$

المجال: $(-\infty,\infty)$ أو R

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-2x-x-9=x^2-3x-9$$

المجال: $(-\infty,\infty)$ أو R

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2-2x).(x+9)=x^3+9x^2-2x^2-18x=x^3+7x^2-18x$$

المجال: $(-\infty,\infty)$ أو R

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x}{x+9}$$

المجال: $\{x|x\neq -9, x\in R\}$

(59

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=\frac{x}{x+1}+x^2-1$$
المجال : $\{x|x\neq -1, x\in R\}$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=\frac{x}{x+1}-x^2+1$$
المجال : $\{x|x\neq -1, x\in R\}$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$=\frac{x}{\cancel{x+1}}\cdot(x-1)(\cancel{x+1})$$
$$=x(x-1)$$
المجال : $\{x|x\neq -1, x\in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x+1}\div(x^2-1)$$
$$=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-1}$$
المجال : $\{x|x\neq -1, x\neq 1, x\in R\}$

الدرس 4-8، ص (163, 164)

(1 $f'(x)=8x, f'(2)=16, f'(-1)=-8$

(2 $g'(t)=-2t+2, g'(5)=-8, g'(3)=-4$

(3 $m'(j)=14, m'(-7)=14, m'(-4)=14$

(4 $v'(n)=10n+9, v'(7)=79, v'(2)=29$

(5 $r'(b)=6b^2-10, r'(-4)=86, r'(-3)=44$

(14a $f'(h)=-0.0108h^2-0.02h+2.04$

(14b $f'(2)\approx 1.96°F, f'(14)\approx -0.36°F, f'(20)\approx -2.68°F$

(14c $68.92°F$

(15 نقطة حرجة $(-2, -8)$، صغرى $(-2, -8)$، عظمى $(-5, 10)$

(16 نقطة حرجة $(0, -2)$، صغرى $(1, 5)$، عظمى $(4, 350)$

(17 نقطة حرجة $(-5, -10)$، صغرى $(-6, -11)$، عظمى $(-3, -2)$

(18 نقطة حرجة $(-9, 405)$، صغرى $(-11, 385)$، عظمى $(-9, 405)$

(19 نقطة حرجة $(1, 1)$، صغرى $(0, 0)$، عظمى $(3, 9)$

(20 نقطتان حرجتان $(-3, 21.5)$ و $(2, 0.67)$، صغرى $(2, 0.67)$، عظمى $(5, 32.17)$

(21c نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 68.9 ft. وهذا أعلى من 68 ft.

(22 $f'(x)=4(x^2+9)+2x(4x+3)$

(23 $g'(x)=(12x^3+2)(5-3x)-3(3x^4+2x)$

(24 $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11}-4t)+(\sqrt{t}+2)(33t^{10}-4)$

(25 $g'(x)=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+2\right)\left(0.5x^4-3x\right)+\left(2x^3-3\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+2x\right)$

(26 $c'(t)=(3t^2+2-7t^6)(t^6+3t^4-22t)+(t^3+2t-t^7)\cdot(6t^5+12t^3-22)$

(27 $q'(a)=\left(\frac{9}{8}a^{\frac{1}{8}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}}-13a\right)+\left(a^{\frac{9}{8}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}}-13\right)$

(28 $f'(x)=(7x^4+2.7)(7.3x^9-0.8x^5)+(1.4x^5+2.7x)(65.7x^8-4x^4)$

(29 $f'(m)=-\frac{12}{(3+2m)^2}$

(30 $r'(t)=\frac{10t}{(3-t^2)^2}$

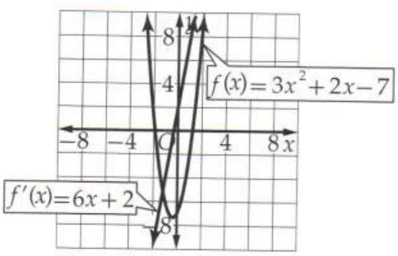
(31 $m'(q)=\frac{q^6-2q^4-8q^3-9q^2-8q}{(q^3-2)^2}$

(32 $f'(x)=\frac{4x^2+3x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}+12}{2(-x^2+3)^2}$

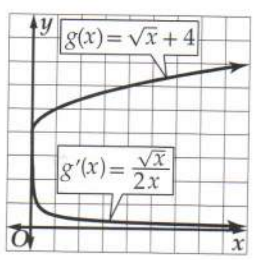
(33 $q'(r)=\frac{r^2-15}{r^4}$

(34 $t'(w)=\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}+\frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}}$

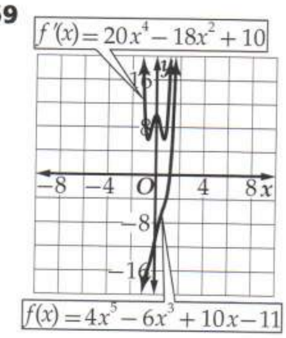
(36



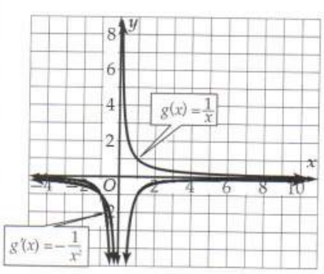
(37



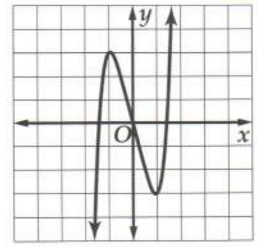
(38



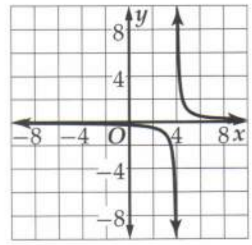
(39



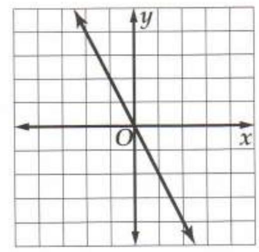
41) إجابة ممكنة :



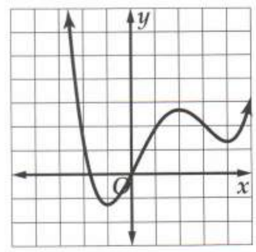
42) إجابة ممكنة:



43) إجابة ممكنة:

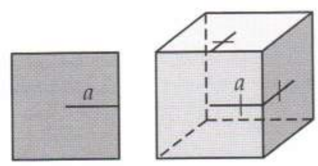


44) إجابة ممكنة:



45b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة. مشتقة صيغة حجم الكرة هي صيغة مساحة سطح الكرة.

45c)



45e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.

46) عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبدالله أن $f'(x) = 12x + 4$، ثم ربَّع الطرفين. أما أحمد فقد ربَّع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

48) إجابة ممكنة:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} +$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}g(x+h)\right] +$$

$$f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

49) صحيحة: إجابة ممكنة: إنّ قوة $f(x)$ هي $5n+3$. حسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معامل في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من $5n+3$ أي $(5n+3)-1$ أو $5n+2$.

50) إجابة ممكنة:

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-[g(x+h)-g(x)]f(x)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

51) إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين تختلفان بانسحاب رأسي فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلًا للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$ المشتقة نفسها وهي $2x$.

الدرس 5-8، ص (171, 172)

5a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة $[1, 10]$، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5$
$R_7 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_8 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_9 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_{10} = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريبًا.

5b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$
$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريبًا.

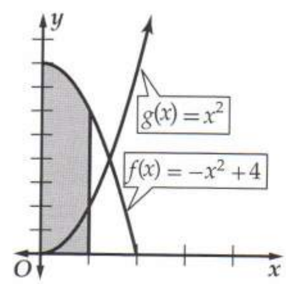
5c) نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= \frac{1}{2}\pi 5^2$$
$$= 12.5\,\pi$$
$$\approx 39.27$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوِّض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

30a)



30b)

$$\int_0^1 (-x^2 + 4)\,dx = 3\tfrac{2}{3}\,,$$
$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

30c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ ، والذي يمثل المساحة الكلية بين $f(x)$ والمحور x. وبما أننا لا نحتاج للمساحة تحت $g(x)$ ، لذا، فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل $\int_0^1 x^2\,dx$ من $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ لنحصل على $3\frac{1}{3}$ أو 3.33 تقريبًا.

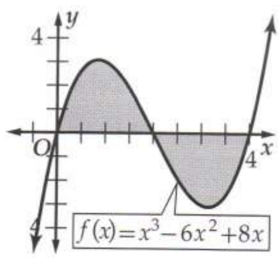
30d) $-2x^2 + 4$ ، $3\frac{1}{3}$.

30e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنيي دالتين، فإن بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنى، ثم نطرح إحداهما من الأخرى، أو نجد الفرق بين الدالتين، ثم نحسب تكامل الدالة الناتجة.

31) كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيُعطي مساحاتٍ أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحاتٍ أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيُعطي قيمةً أكبر للمساحة ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمةً أصغر.

الدرس 8-6، ص (179)

30a)



30c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور x موجبة، والمساحة تحت المحور x هي سالب التكامل.

30e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور x.
أما المساحة الكلية فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

35)

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$
$$nx + mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$
$$(nb+mb) - (na+ma) = (nb-na) + (mb-ma)$$
$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

36) بما أن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ يقع تحت المحور x، فإن اشارة $f(x)$ سالبة. وبما أن $f(x)$ سالبة و Δx موجبة، فإن كل حد في $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالب.

وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن

$\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية مجاميع سالبة، فإنه يكون سالبًا.

الرياضيات

المحتويات

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education