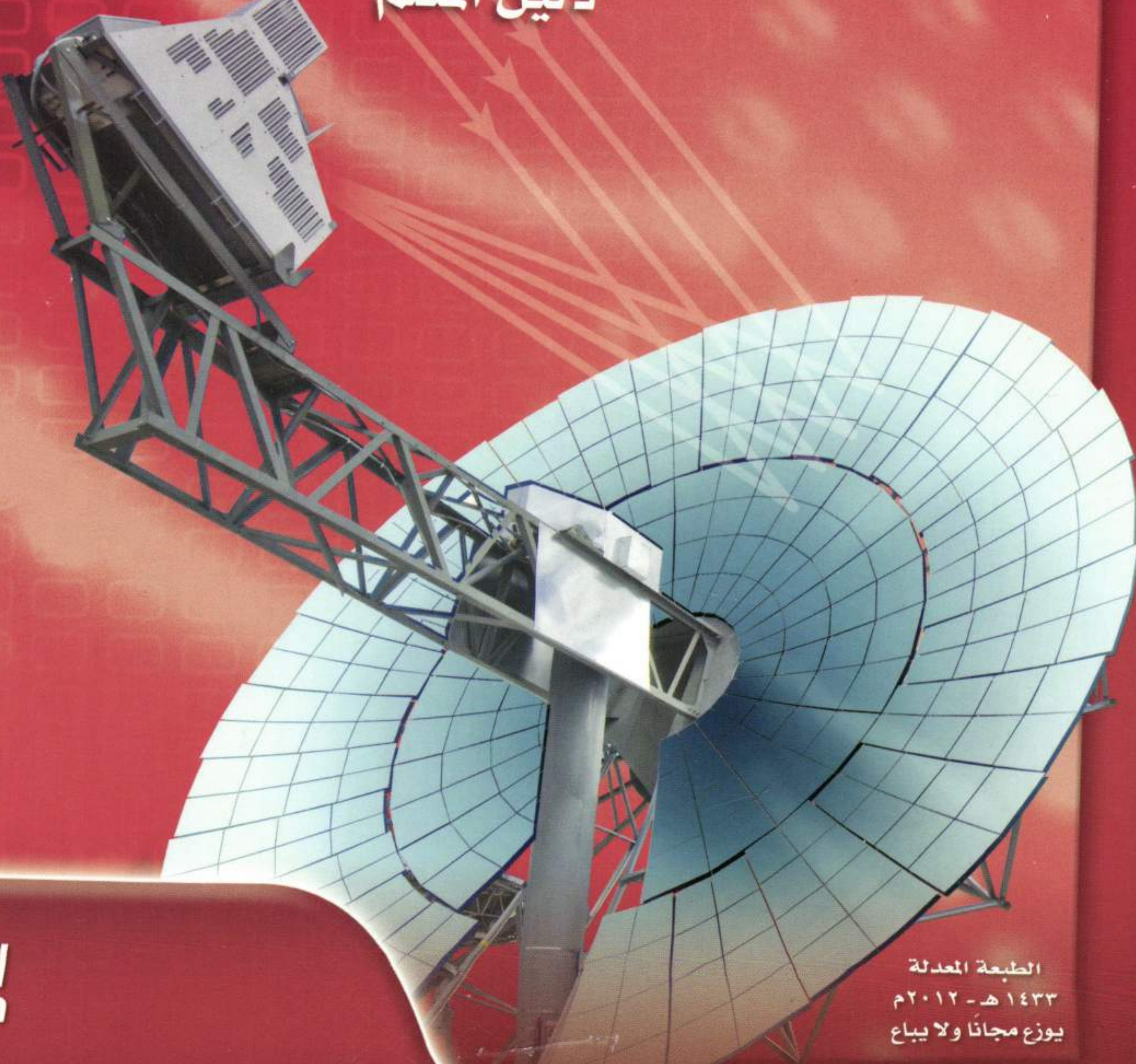
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم



العبيكان
Obeikan

الطبعة المعدلة
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م
يوزع مجانًا ولا يباع

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة المعدلة
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢م

الرياضيات
الصف الأول الثانوي

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبو غليون
عبدالحكيم عبدالله سليمان
يوسف سليمان جرادات
د. عبدالله محمد الجوعي
صلاح بن عبد الله الزيد
أحمد مصطفى سمارة
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

Original Title:

Geometry © 2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D

Contributing Authors
Jerry Cummins
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph. D
Arthur K. Wayman, Ph. D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

College Readiness
Robert Lee Kimball, Jr.

Graphing Calculator
Ruth M. Casey

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro, Ph.D

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

حول الغلاف
تسـقط أشـعة الشـمس المتوازية على الطبق الشمسي فترتد مكوِّنة زوايا متناظرة وأخرى متحالفة. تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.

www.obeikaneducation.com

www.macmillanmh.com

McGraw Hill Education

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعما للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوذ اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 5 الأشكال الرباعية

الفصل 6 التشابه

الفهرس

الفصل 7 التحولات الهندسية والتماثل

الفصل 8 الدائرة

الفصل 5

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (9)

	الدرس 5-1 حصتان	توسع 5-1 حصة واحدة	الدرس 5-2 حصتان
العنوان	زوايا المضلع	معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع	متوازي الأضلاع
الأهداف	• إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع واستعماله. • إيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع واستعماله.	• استعمال الجداول الإلكترونية لإيجاد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم.	• تعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وتطبيقها. • تعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وتطبيقها.
المفردات	القطر		متوازي الأضلاع
التمثيلات المتعددة	ص (16)		ص (25)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (4) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (5) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	جهاز العرض، ص (12)		السبورة التفاعلية، ص (21)
تنويع التعليم	ص (11, 13)		ص (21, 24)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الأشكال الرباعية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(13) حصة	(4) حصص	(17) حصة

الدرس 5-3 حصتان	الدرس 5-4 حصتان	الدرس 5-5 حصتان	الدرس 5-6 حصتان
تمييز متوازي الأضلاع	**المستطيل**	**المعيّن والمربع**	**شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة**
• تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع. • إثبات أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.	• تعرف خصائص المستطيل وتطبيقها • تحديد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.	• تعرُّف خصائص المعين والمربع وتطبيقها. • تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً أو معينًا أو مربعًا.	• تطبيق خصائص شبه المنحرف. • تطبيق خصائص شكل الطائرة الورقية.
	المستطيل	المعيَن المربَع	شبه المنحرف قاعدتا شبه المنحرف ساقا شبه المنحرف زاويتا القاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين القطعة المتوسطة لشبه المنحرف شكل الطائرة الورقيّة
ص (33)	ص (40)	ص (48)	ص (57)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق
مدونة، ص (30)	مدونة، ص (38)	تسجيل مرئي، ص (45)	السبورة التفاعلية، ص (53)
ص (29, 32, 34)	ص (37, 41)	ص (45, 46, 49)	ص (52, 54, 56)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (35)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة، ص (59-62)
• اختبار الفصل، ص (63)

الفصل 5

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 5**	
	التهيئة للفصل 5 ، ص (9)	مخطط المعالجة، ص (9)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص(11, 12) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 5 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(35) اختبار منتصف الفصل، ص(13) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 5 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(59-62) اختبار الفصل، ص(63) اختبار معياري تراكمي، ص(64-67) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 5 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 5**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(15-20) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(21-22) اختبار المفردات ، ص(14) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(23) الاختبار التراكمي: الفصول 1-5 ، ص(24-26) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

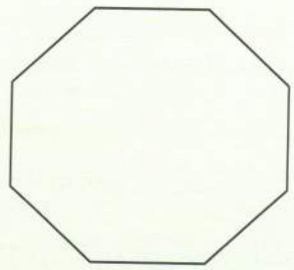
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون والمكانيّون: اعرض صورًا لأغطية لحف يظهر عليها مضلع مكرر. قُص أحد تكرارات المضلع، ثم قسمه إلى مضلعات أخرى تكوِّن هذا المضلع. فمثلًا إذا كان الشكل المضلع سداسيًّا منتظمًا، فإنه يمكن تقسيمه إلى أشباه منحرفات متطابقة الساقين، أو معينات، أو مثلثات متطابقة الضلعين، أو مثلثات متطابقة الأضلاع أو أشكال طائرة ورقيّة. وعلى الطلاب أن يعملوا فُرادى لتصميم أغطية لحف منبثقة من مضلع سداسي منتظم ويلونوها. وحالما تنتهي التصاميم، اطلب إليهم أن يقيسوا الزوايا ويضعوا تخمينًا حول مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع، وأن يستعملوا القانون $(n-2)180°$ حيث n عدد الأضلاع، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا تقريرًا مختصرًا لتفسير حساباتهم، وأيّ خصائص للمضلعات المنتظمة مثل التماثل والتطابق التي تظهر في تصاميمهم ثم اعرض تصاميم اللحف في غرفة الصف.

البديل 2 دون المتوسط دون

أعطِ الطلاب المسألة الآتية:

ما قياس كل زاوية داخليّة وكل زاوية خارجيّة في مضلع ثماني منتظم؟ وضّح طريقة تفكيرك بالكلمات أو الأعداد أو المعادلات أو الرسم.



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن أعمال الفنان ايشر "Escher" في الإنترنت. واطلب إليهم أن يقرؤوا عن الطرائق التي استعملها في دمج زوايا المضلعات، والانعكاس والدوران في أعماله، ثم اطلب إليهم أن يختاروا واحدًا من أعماله لتحليله، أو يتعاونوا لاستخراج إحدى رسوم Escher وأن يكتبوا ملاحظات حول: لماذا وجدوا هذا الرسم مثيرًا ولافتًا للانتباه. ويجب أن يلاحظوا الخصائص الهندسية للعمل من حيث الأشكال والتماثلات والانعكاسات والدورانات.

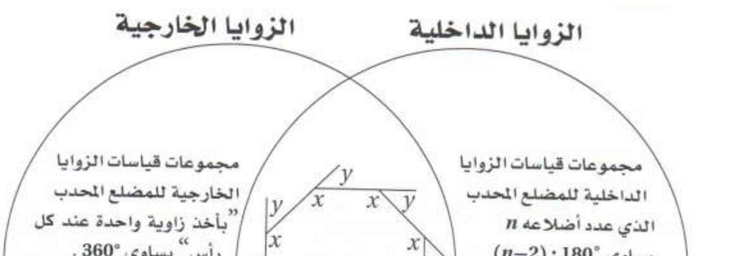
القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

يمكن عمل شكل ڤن كنشاط تعاوني بعد دراسة موضوع ما في هذا الفصل.

أعط مجموعات من الطلبة لوحات ورقية كبيرة وأقلام تخطيط، واطلب إلى كل مجموعة اختيار موضوعين متشابهين من موضوعات الفصل، مثل مجموع الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع واطلب إليهم المقارنة بينها برسم شكل ڤن.



يسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

- استعمال مفاهيم وخصائص هندسية لحل مسائل في مجالات عملية مختلفة مثل الفن والعمارة.
- تطبيق الرياضيات في مواقف حياتية يومية وفي أنشطة داخل المدرسة وخارجها وفي مجالات معرفية ومواضيع رياضية أخرى.
- التعبير عن الأفكار الرياضية باستعمال اللغة والأدوات الفعّالة والوحدات المناسبة والنماذج الرياضية البيانية أو العددية أو الحسية أو الجبريّة.

الفصل 5

- استعمال الأنماط العدديّة والهندسية لصياغة تعميمات حول الخصائص الهندسية متضمنة خصائص المضلعات.
- وضع تخمينات حول خصائص المضلعات الأساسية واختبارها.
- اشتقاق صيغ تتضمن الطول والميل ونقطة المنتصف واستعمالها.

مابعد الفصل 5

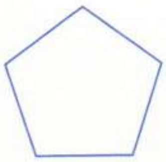
التهيئة للصف الثالث الثانوي

- استعمال خصائص القطوع المخروطية لوصف ظواهر طبيعية مثل خصائص انعكاس الضوء والصوت.
- استعمال مفهوم المتجهات لعمل نماذج لكميات تُحدد من خلال مقدارها واتجاهها.

ملخص الدروس

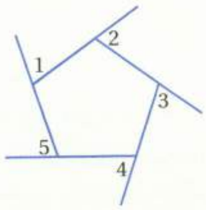
5-1 زوايا المضلع

تنص نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع على أنه إذا كان عدد أضلاع مضلع محدب n ومجموع قياسات الزوايا الداخلية S، فإن $S = 180°\cdot(n - 2)$. ويمكن استعمال هذه المعادلة لإيجاد قياس كل زاوية داخلية لمضلع منتظم. كما يمكن استعمالها لإيجاد عدد أضلاع مضلع إذا عُرف مجموع قياسات زواياه الداخلية.



$$n = 5$$
$$S = 180°\cdot(n - 2)$$
$$= 180°\cdot(5 - 2) = 540°$$

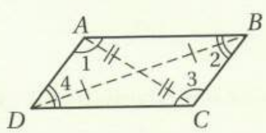
أما مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع محدب "بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس" فيساوي دائمًا $360°$ وذلك بغض النظر عن عدد أضلاعه. وهذه هي نظرية مجموع الزوايا الخارجية.



$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$$

5-2 متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ولمتوازي الأضلاع عدة خصائص خاصة تساعد على تعريفه. الأولى، الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة أيضًا. والثانية، الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. والثالثة، إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع تكون قوائم. وأخيرًا فإن قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.



$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$$
$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$$
$$m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$$
$$m\angle 4 + m\angle 1 = 180°$$
$$\triangle ABC \cong \triangle CDA$$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

بالإضافة إلى تعريف متوازي الأضلاع بوصفه شكلًا رباعيًا أضلاعه المتقابلة متوازية، توجد طرائق أخرى يمكن استعمالها لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. فإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع. وإذا كانت كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي متطابقتين فإنه متوازي أضلاع، وإذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصف كل منهما الآخر فإنه متوازي أضلاع. وإذا كان ضلعان متقابلان لشكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.

ويكفي أن يحقق الشكل الرباعي واحدًا من هذه الشروط الخمسة حتى يكون متوازي أضلاع. ولا حاجة لإثبات جميع خصائص متوازي الأضلاع.

وإذا رُسم شكل رباعي في مستوى إحداثي فيمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين وصيغة الميل لتحديد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. حيث تستعمل صيغة الميل لتحديد إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية أم لا. أما صيغة المسافة بين نقطتين فتستعمل لاختبار تطابق الأضلاع المتقابلة.

5-4 المستطيل

المستطيل هو شكل رباعي جميع زواياه قوائم. ولأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان، فإن للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وله خصائص أخرى خاصة به. فمثلًا، قطرا المستطيل متطابقان ويمكن أن يستعمل هذا لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل.

وإذا رسم شكل رباعي في مستوى إحداثي فإنه يمكن استعمال صيغة الميل للتحقق من كون الأضلاع المتجاورة متعامدة. فإذا كانت متعامدة يكون الشكل الرباعي مستطيلًا. كما يمكن استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإثبات أن شكلًا رباعيًا مستطيل، فيمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لحساب طولي القطرين. فإذا كانا متطابقين فإن متوازي الأضلاع مستطيل.

5-5 المعين والمربع

المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة. ونظرًا لأن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المعين متوازي أضلاع. لذلك فجميع خصائص متوازي الأضلاع تنطبق على المعين. وللمعين أيضًا خصائص خاصة به. فقطراه متعامدان. وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا. فإذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين يكون معينًا، وقطر المعين ينصف الزاويتين عند طرفيه.

وإذا كان شكل رباعي مَعينًا ومستطيلًا فإنه مربع. فالمربع حالة خاصة جدًا وله جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين. ومن المهم ملاحظة أن كل مربع معين ولكن ليس بالضرورة أن يكون كل معين مربعًا.

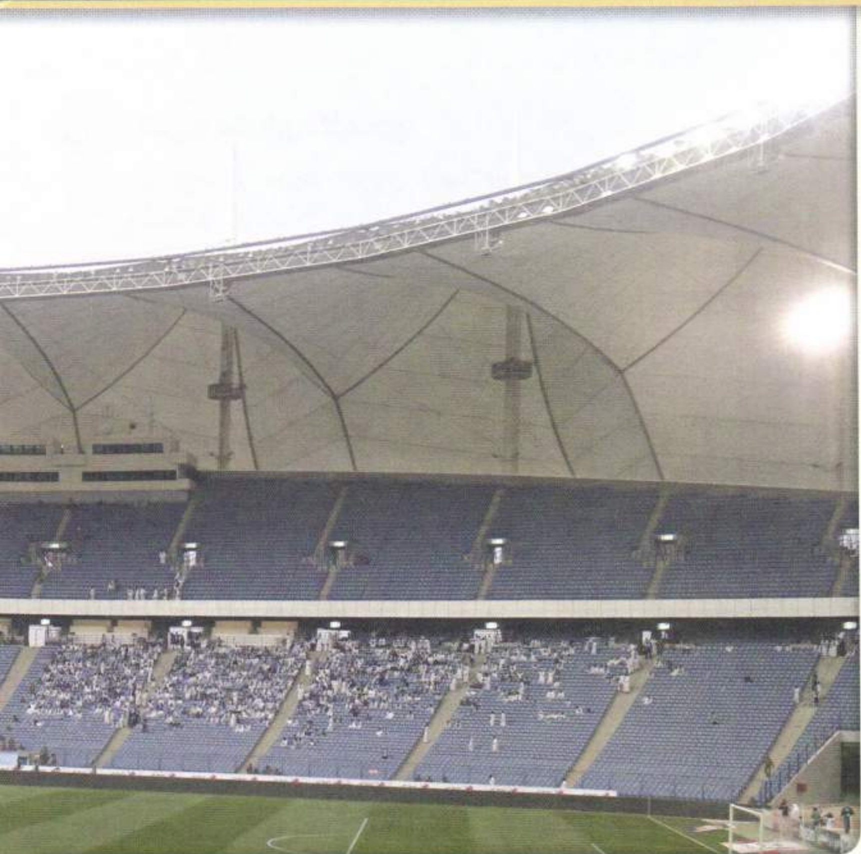
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان فقط متوازيان. يُسمّى الضلعان المتوازيان قاعدتي شبه المنحرف والضلعان غير المتوازيين ساقَيه. وكل قاعدة وساق يشكلان زاوية قاعدة. وإذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه متطابق الساقين. وزاويتا قاعدة شبه المنحرف المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان. وقطراه متطابقان أيضًا.

وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف قطعة متوسطة. والقطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين. وهذه العلاقة صحيحة لكل شبه منحرف وليس لمتطابق الساقين فقط.

وشكل الطائرة الورقية هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، كما يوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة. كما أن قطري شكل الطائرة الورقية متعامدان.

الفصل 5 الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



فيما سبق:
درستُ تصنيف المضلعات وتعرّف خصائصها وتطبيقها.

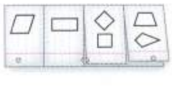
والآن:
- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

لماذا؟
أدوات رياضية:
تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 5 ، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1. اطو الورقة طوليًا.
2. اطو الورقة عرضيًا ثلاث مرات كما في الشكل، ثم بسطها.
3. قص الورقة على خطوط الطي حتى المنتصف.
4. عنون مستعملًا أشكالًا كما يظهر أدناه.



الفصل 5 ملاحظات

مشروع الفصل

وقت اللعب:

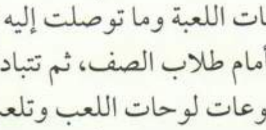
يستعمل الطلاب ما تعلموه من تصنيفات مختلفة للأشكال الرباعيّة لتصميم لوحة لعب باستعمال هذه الأشكال.

- نظم الطلاب في مجموعات ثنائية واطلب إليهم استعمال أنواع مختلفة من الأشكال الرباعيّة لتصميم لوحة لعب خاصة بهم. واطلب إليهم أن يحدّدوا الهدف للعبتهم ويضعوا تعليمات ممارسة اللعبة والفوز بها.
- بعد إكمال الخطوة السابقة وتجهيز لوحة اللعب، اطلب إلى الطلاب تصنيف الأشكال الرباعية التي استعملوها في لوحاتهم ثم اطلب إليهم أن يضعوا معايير لتصنيفات جديدة وتنظيم الأشكال الرباعيّة على أساس هذه المعايير.
- وأخيرًا اطلب إلى كل مجموعة أن تعرض لوحة اللعب التي صممتها وتعليمات اللعبة وما توصلت إليه في بحثها أمام طلاب الصف، ثم تتبادل المجموعات لوحات اللعب وتلعب كل مجموعة لعبة مجموعة أخرى.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

مثال:



سؤال: ما العلاقة بين أطوال الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع؟ وما العلاقة بين قياسات الزوايا المتقابلة فيه حسب توقعك؟

المطويات منظم أفكار

غرضها: يدون الطلبة ملاحظاتهم حول دروس هذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب عمل مطوياتهم وعنونتها كما هو موضّح.

يستعمل الطلاب مطوياتهم لتدوين ملاحظاتهم وتعريفات المصطلحات وتسجيل المفاهيم وتطبيق خصائص الأشكال الرباعيّة. شجع الطلاب على استعمال البيانات المسجّلة لمقارنة الأشكال الرباعية الستة التي يدرسونها في هذا الفصل.

وقت استعمالها:

أوراق المطويّة	الدروس
متوازي الأضلاع	$5-2, 5-3$
المستطيل	$5-2, 5-4$
المربع والمعين	$5-5$
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية	$5-6$

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9).
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

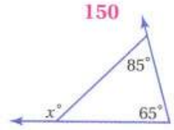
البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

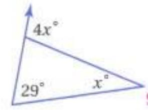
(يستعمل مع الدرس 1–5)

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشْر :

1) **150**



2) **9.7**



3) **دراجات هوائية :** في هيكل الدراجة الهوائية أدناه:
. $m\angle C = 60°$, $m\angle D = 105°$, $m\angle E = 50°$
أوجد قياس كل من $\angle A$, $\angle B$.

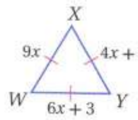
$m\angle A = 130°$

$m\angle B = 45°$

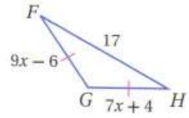
(يستعمل مع الدروس 6–5 ,3–5 ,2–5)

جبر : أوجد قيمة x ثم أطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتيين : (4, 5) انظر الهامش.

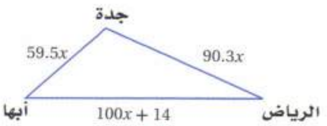
4)



5)



6) **مدن :** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2638 km ، فأوجد المسافة بين كل من المدن الثلاث.

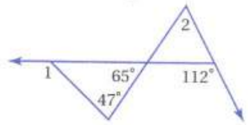


الرياض – جدة: 949 km تقريبًا،
الرياض – أبها: 1064 km تقريبًا،
جدة – أبها: 625 km تقريبًا

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في الشكل الآتي :



a) $m\angle 1$

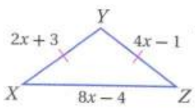
$m\angle 1 = 65° + 47°$	نظريّة الزاوية الخارجيّة
$m\angle 1 = 112°$	بالجمع

b) $m\angle 2$

$180° = m\angle 2 + 68° + 65°$	نظريّة مجموع قياسات زوايا المثلث
$180° = m\angle 2 + 133°$	بالتبسيط
$m\angle 2 = 47°$	بالطرح

مثال 2

جبر : أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$.



$XY = YZ$	معطى
$2x + 3 = 4x - 1$	بالتعويض
$-2x = -4$	بالطرح
$x = 2$	بالتبسيط
$XY = 2x + 3$	معطى
$= 2(2) + 3 = 7$	$x = 2$
$YZ = XY$	معطى
$= 7$	$XY = 7$
$XZ = 8x - 4$	معطى
$= 8(2) - 4 = 12$	$x = 2$

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فعد إلى"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فعد إلى

- تدريبات المهارات ، الفصل (3) ، ص (13, 18)
- مشروع الفصل، ص (8)
- www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فعد إلى

- تدريبات إعادة التعليم ، الفصل (3) ، ص (11-12, 16-17)
- www.obeikaneducation.com

إجابات:

4) $x = 1;\ WX = XY = YW = 9$

5) $x = 5;\ FG = GH = 39$

5-1 زوايا المضلع
Angles of Polygon

فيما سبق:
درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها.

والآن:
- أجدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع وأستعمله.
- أجدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع وأستعمله.

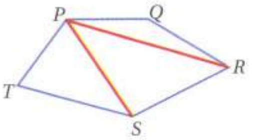
المفردات:
القطر
diagonal

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

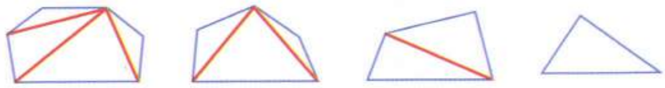
تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm ، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع: **قطر** المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه.



رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P هما R, S؛ لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P هما $\overline{PR}, \overline{PS}$. لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث °180، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

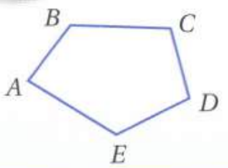
المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ\,(1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ\,(2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ\,(3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ\,(4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ\,(n-2)$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية :

نظرية 5.1 **مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع**

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه n يساوي $(n-2)\cdot 180^\circ$.



مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$$

سوف تبرهن النظرية 5.1 للثماني في السؤال 39

5-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

تعرف أسماء المضلعات وتصنيفها.

الدرس 5-1

إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع واستعماله.

إيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع واستعماله.

ما بعد الدرس 5-1

تعرّف خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وتطبيقها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما عدد الزوايا الداخليّة لكل خلية؟ 6
- قارن بين الزوايا الداخليّة لكل خليّة، والزوايا الداخليّة لجميع الخلايا. الزوايا الداخليّة لكل خليّة متساوية في القياس. وجميع الخلايا متطابقة، إذن قياسات الزوايا الداخليّة لجميع الخلايا متساوية.
- إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع السداسي يساوي °720، فما قياس كل زاوية داخلية لخلية النحل؟ °120
- الزاوية المنعكسة هي زاوية رأسها أحد رؤوس المضلع وداخليتها خارج المضلع. ما قياس الزاوية المنعكسة لخليّة النحل؟ وضح تبريرك. °240؛ قياس الدورة الكاملة °360. فإذا كان قياس الزاوية الداخلية لخلية النحل °120، فإن الفرق بين °360 و °120 هو قياس الزاوية المنعكسة.

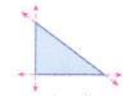
مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (11)	• تنويع التعليم ص (11, 13)	• تنويع التعليم ص (11, 13)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (4)	• كتاب التمارين ص (4)	• كتاب التمارين ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

يمكنك استعمال النظرية 5.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مراجعة المفردات

المضلع المحدّب
يكون المضلع محدبًا إذا لم يحتوِ امتداد أي من أضلاعه نقاطًا داخله، وبعكس ذلك يكون مقعرًا.


مضلع محدب


مضلع مقعر

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

a) **أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.**

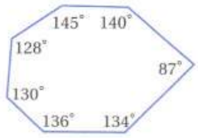
السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية 5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ$ $n=7$

$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ$ بالتبسيط

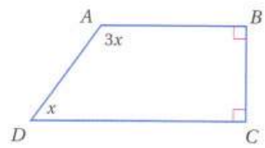
إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.

تحقق: ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.



$128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ$ ✓

b) **جبر:** **أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.**



الخطوة 1: أوجد قيمة x.
بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180 = 360$.

$360 = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة

$360 = 3x + 90 + 90 + x$ بالتعويض

$360 = 4x + 180^\circ$ بتجميع الحدود المتشابهة

$180 = 4x$ بطرح 180° من كلا الطرفين

$45^\circ = x$ بقسمة كلا الطرفين على 4

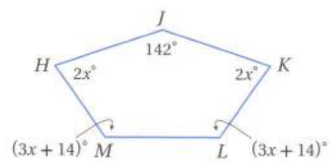
الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle D = x$ $m\angle B = 90^\circ$ $m\angle A = 3x$
$= 45^\circ$ $m\angle C = 90^\circ$ $= 3(45^\circ)$
$= 135^\circ$

تحقق من فهمك

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب. 1080°

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



(1B $m\angle H = 74^\circ$, $m\angle J = 142^\circ$, $m\angle K = 74^\circ$, $m\angle L = 125^\circ$, $m\angle M = 125^\circ$

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع

الأمثلة 1-3 تبيّن كيفية إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع.

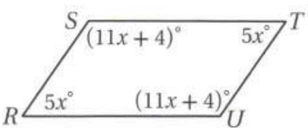
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **a)** أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للتساعي المحدّب. 1260°

b) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لمتوازي الأضلاع $RSTU$.



$m\angle R = m\angle T = 55^\circ$;
$m\angle S = m\angle U = 125^\circ$

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي ذكر الطلاب بأنهم إذا نسوا صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، فيمكنهم رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس ثم ضرب عدد المثلثات الناتجة في 180°. قدّم لهم مثالًا باستعمال مضلع خماسي أو سداسي.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

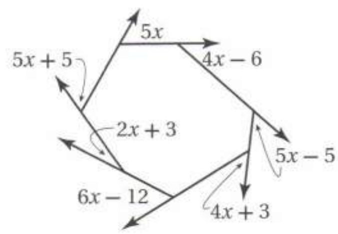
المتعلمون المنطقيّون: اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا مسطرة غير مدرجة لرسم مضلع غير منتظم له خمسة أضلاع أو أكثر، واطلب إليهم أن يستعملوا منقلة لإيجاد قياس نصف زواياه الداخليّة وزواياه الخارجيّة عند الرؤوس الأخرى، واطلب إليهم أن يتبادلوا رسومهم ويجدوا قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية الباقية دون استعمال المنقلة، ثم يعيدوا الرسوم إلى أصحابها الأصليين. ليتحققوا من الإجابات باستعمال المنقلة.

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدب في حل مسائل.

مثال إضافي

4 **a)** أوجد قيمة x في الشكل الآتي:



$x = 12$

b) أوجد قياس زاوية خارجيّة للعشاري المنتظم. $36°$

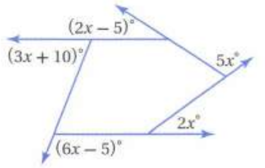
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 11–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثمّ استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

a) **جبر:** أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)+5x+2x+(6x-5)+(3x+10)=360$$
$$(2x+5x+2x+6x+3x)+[-5+(-5)+10]=360$$
$$18x=360$$
$$x=\frac{360}{18}=20$$

b) أوجد قياس زاوية خارجيّة للتساعي المنتظم.

تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي n، ثم اكتب معادلة وحلّها.

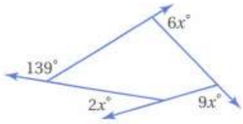
$9n = 360$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$n = 40$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة
لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من $180°$؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. 13

4B) أوجد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا. $30°$

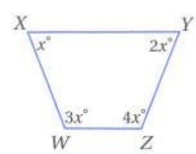
تأكـد

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

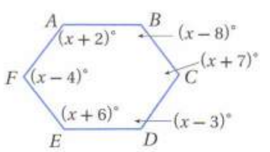
1) العشاري $1440°$ **2)** الخماسي $540°$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



4)



3) $m\angle X = 36°$, $m\angle Y = 72°$, $m\angle Z = 144°$, $m\angle W = 108°$

4) $m\angle A = 122°$, $m\angle B = 112°$, $m\angle C = 127°$, $m\angle D = 117°$, $m\angle E = 126°$, $m\angle F = 116°$

مثال 2 **5)** **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.

أوجد قياس زاوية داخليّة له. $156°$

مثال 3 أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

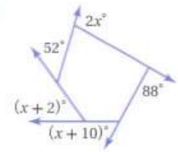
6) $150°$ 12 **7)** $170°$ 36

تنويع الواجبات المنزلية

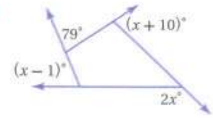
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	12-34، 44، 46-56
ضمن المتوسط	13-37 فردي، 39-42، 44، 51-56
فوق المتوسط	36-54، 55، 56 اختياري

مثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

(8 52



(9 68



أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي 90° **11)** ثُماني 45°

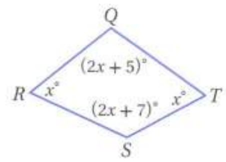
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا 1800° **13)** ذو 20 ضلعًا 3240° **14)** ذو 29 ضلعًا 4860° **15)** ذو 32 ضلعًا 5400°

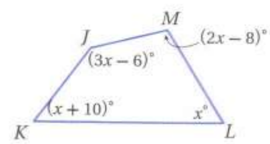
أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

(16



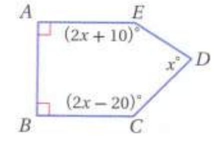
$m\angle Q = 121^\circ, m\angle R = 58^\circ,$
$m\angle S = 123^\circ, m\angle T = 58^\circ$

(17



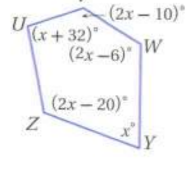
$m\angle J = 150^\circ, m\angle K = 62^\circ,$
$m\angle L = 52^\circ, m\angle M = 96^\circ$

(18



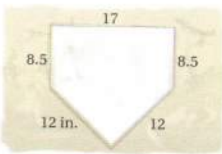
$m\angle A = 90^\circ, m\angle B = 90^\circ,$
$m\angle C = 128^\circ, m\angle D = 74^\circ,$
$m\angle E = 158^\circ$

(19



$m\angle U = 100^\circ, m\angle V = 126^\circ,$
$m\angle W = 130^\circ, m\angle Y = 68^\circ,$
$m\angle Z = 116^\circ$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع الخماسي في الشكل المجاور؟ 540°



مثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

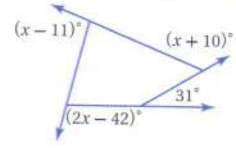
21) الاثنا عشري 150° **22)** الخماسي 108° **23)** العشاري 144° **24)** التُّساعي 140°

مثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

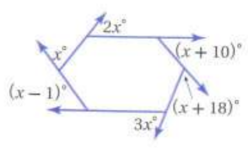
25) 60° 3 **26)** 90° 4 **27)** 120° 6 **28)** 156° 15

مثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

(29 93



(30 37



كتاب التمارين، ص (4)

الفصل الخامس، الأشكال الرباعية

1-5 زوايا المضلع

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

1) ذو 11 ضلعًا 1620° **2)** ذو 14 ضلعًا 2160° **3)** ذو 17 ضلعًا 2700°

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

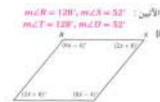
4) 144 10 **5)** 156 15 **6)** 160 18

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين:

7)

$m\angle J = 115^\circ, m\angle K = 130^\circ,$
$m\angle M = 50^\circ, m\angle N = 65^\circ$

8)



$m\angle R = 128^\circ, m\angle S = 52^\circ$
$m\angle T = 128^\circ, m\angle U = 52^\circ$

أوجد قياس زاوية خارجية وأخرى داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرِّب الإجابة إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا :

9) 16 الخارجية 22.5°، الداخلية 157.5° **10)** 24 الخارجية 15°، الداخلية 165° **11)** 30 الخارجية 12°، الداخلية 168°

12) 14 الخارجية 25.7°، الداخلية 154.3° **13)** 22 الخارجية 16.4°، الداخلية 163.6° **14)** 40 الخارجية 9°، الداخلية 171°

15) بلورات: تُصنَّف البلورات إلى سبعة أنواع بناءً على أشكال وجوهها، وينتمي البلور الفيروزي إلى نوع يسمى ثلاثي الميل. وكل وجه من الوجوه الستة لبلورة الفيروز على شكل متوازي أضلاع. أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأحد هذه الوجوه. 360°

4

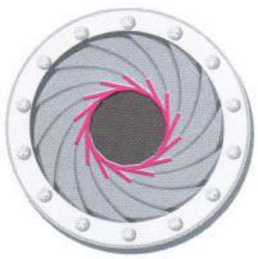
أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري °36　**32)** الخماسي °72　**33)** السداسي °60　**34)** ذو 15 ضلعًا °24

الربط مع الحياة

يعد ابن الهيثم رائد علم الضوء والبصريات؛ فقد وصف العديد من الظواهر الضوئية وصفًا دقيقًا في كتابه المناظر.

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس زاوية داخلية؟ °154.3 تقريبًا

b) أوجد قياس زاوية خارجية؟ °25.7 تقريبًا

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 $51.4°, 128.6°$　**37)** 13 $27.7°, 152.3°$　**38)** 14 $25.7°, 154.3°$

39) **برهان:** اكتب برهانًا حرًا لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع الثماني. انظر الهامش.

40) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع. انظر الهامش.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

41) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

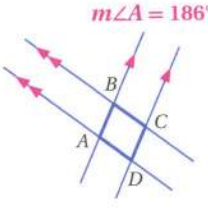
$x + 5, x + 10, x + 20, x + 30, x + 35, x + 40, x + 60, x + 70, x + 80, x + 90$

41) $105°, 110°, 120°, 130°, 135°, 140°, 160°, 170°, 180°, 190°$

42) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x, 4x + 13, x + 9, 2x - 8, 4x - 1$

$m\angle A = 186°, m\angle B = 137°, m\angle C = 40°, m\angle D = 54°, m\angle E = 123°$

43) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $FGHJ$ ، $QRST$. انظر الهامش.

b) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$	101	$m\angle B$	79	$m\angle C$	101	$m\angle D$	79
	AB	0.6 cm	BC	0.6 cm	CD	0.6 cm	DA	0.6 cm
$FGHJ$	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$	104
	FG	1 cm	GH	0.9 cm	HJ	1 cm	JF	0.9 cm
$QRST$	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	59	$m\angle S$	121	$m\angle T$	59
	QR	0.5 cm	RS	1.2 cm	ST	0.5 cm	TQ	1.2 cm

c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

d) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

43c) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

43d) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

43e) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية يكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

تنبيه لحل سؤال

المسطرة والفرجار والمنقلة: يتطلب السؤال 43 استعمال مسطرة وفرجار ومنقلة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 43، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء علاقات الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.

إجابات:

39) ارسم جميع الأقطار لمضلع ثماني محدّب من أحد رؤوسه.

لاحظ أنّ المضلع قُسم إلى 6 مثلثات وبما أنّ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل مثلث °180، فإنّ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للثماني يساوي

$$(8-2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$$

أو $(n-2) \cdot 180$ حيث n يساوي عدد أضلاع المضلع.

40) افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد اضلاعه n.

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحًا منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية

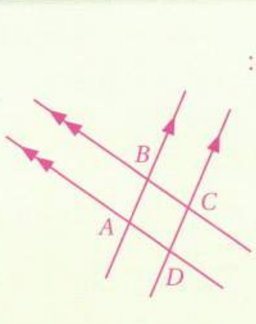
$= 180n - 180(n - 2)$

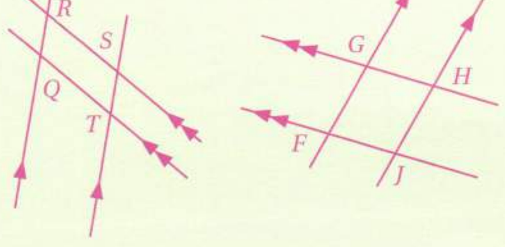
$= 180n - 180n + 360$

$= 360$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي °360.

43a) إجابة ممكنة:

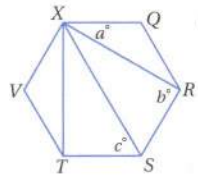




مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. فهل أي منهما إدعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك. انظر الهامش

45) **تحدٍّ:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$. برّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات



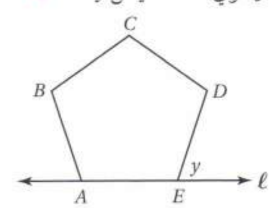
46) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيا في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك. 48–46) انظر الهامش.

47) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخلية. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

48) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على الاختبار المعياري

49) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي AE. ما قياس $\angle y$؟ 72°



50) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟ C

A مربع

B خماسي

C سداسي

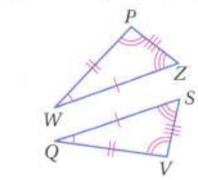
D ثماني

مراجعة تراكمية

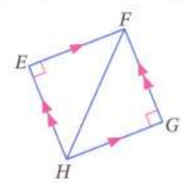
51) **تاريخ:** استعمل قدامى المصريين حبالًا معقودة على مسافات متساوية لتشكيل مثلثات. بحيث تكون رؤوس المثلثات عند العقد. ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الحبل أدناه؟ (الدرس 5-4) 3

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدد العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة تطابق: (الدرس 3-3) 54–52) انظر الهامش.

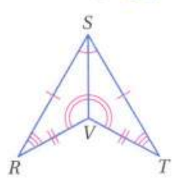
52)



53)

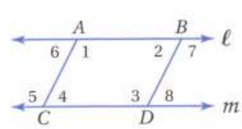


54)



استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، $\ell \parallel m$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي: 55, 56) انظر الهامش.



55) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

56) زاويتان متحالفتان.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 44، يجب على الطلاب أن يفهموا أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع يساوي 360°. في حين يزداد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بازدياد عدد الأضلاع.

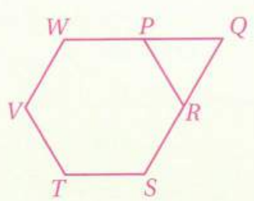
4 التقويم

تعلّم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيفيّة إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع وكيف ترتبط هذه العملية بالدرس التالي حول قياسات زوايا متوازي الأضلاع.

إجابات:

44) لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع محدّب يساوي 360°.

46) دائمًا؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجيّة، $m\angle QPR = 60°$ و $m\angle QRP = 60°$. ولمّا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لأي مثلث يساوي 180°، فإنّ $180° - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$، $180° - 60° - 60° = 60°$. إذن فالمثلث $\triangle PQR$ متطابق الأضلاع.



47) 8؛ إجابة ممكنة:

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لهذا المضلع يساوي $(5-2)\cdot180$ أو 540°. ومِثْلا هذا المجموع يساوي 2(540) أو 1080. وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة 1080° هو حلّ المعادلة $(n-2)\cdot180° = 1080°$ ومنها $n = 8$.

48) اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

52) $\angle W \cong \angle Q$؛ $\angle P \cong \angle V$؛ $\angle Z \cong \angle S$؛ $\overline{WP} \cong \overline{QV}$؛ $\overline{PZ} \cong \overline{VS}$؛ $\overline{WZ} \cong \overline{QS}$؛ $\triangle WPZ \cong \triangle QVS$

53) $\angle E \cong \angle G$؛ $\angle EFH \cong \angle GHF$؛ $\angle EHF \cong \angle GFH$؛ $\overline{EF} \cong \overline{GH}$؛ $\overline{EH} \cong \overline{GF}$؛ $\overline{FH} \cong \overline{HF}$؛ $\triangle EFH \cong \triangle GHF$

54) $\angle R \cong \angle T$؛ $\angle RSV \cong \angle TSV$؛ $\angle RVS \cong \angle TVS$؛ $\overline{RS} \cong \overline{TS}$؛ $\overline{SV} \cong \overline{SV}$؛ $\overline{RV} \cong \overline{TV}$؛ $\triangle RSV \cong \triangle TSV$

55) $\angle 1$ و $\angle 5$؛ $\angle 4$ و $\angle 6$؛ $\angle 2$ و $\angle 8$؛ $\angle 3$ و $\angle 7$

56) $\angle 1$ و $\angle 4$؛ $\angle 2$ و $\angle 3$؛ $\angle 1$ و $\angle 2$؛ $\angle 3$ و $\angle 4$؛ $\angle 5$ و $\angle 6$؛ $\angle 7$ و $\angle 8$

معمل الجداول الإلكترونية

توسع 5-1

زوايا المضلع
Angles of Polygon

الهدف: أستعمل الجداول الإلكترونية لإيجاد قياسات الزوايا الداخليّة والخارجيّة للمضلع المنتظم.

من الممكن إيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية بالإضافة إلى مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وذلك باستعمال برنامج الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمّم جدولًا إلكترونيًّا باتباع الخطوات الآتية :

- اكتب عناوين للأعمدة كما في الجدول أدناه .
- أدخل الأرقام 10–3 في العمود الأول.
- عدد المثلثات في كل مضلع أقل من عدد أضلاعه بـ 2. اكتب صيغة في الخلية B1 لطرح 2 من كل عدد في الخلية A1.
- اكتب صيغة في الخلية C1 لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخليّة. وتذكّر أن الصيغة هي $S = (n-2)180$.
- استمر في كتابة صيغ لحساب القيم المشار إليها في الجدول، ثم اسحب هذه الصيغ على القيم حتّى الصف 9. سيظهر الجدول في النهاية على النحو الآتي :

المضلعات والزوايا

◇	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

تمارين ومسائل:

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم. **=C2/A2**
2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم. **=A2*E2**
3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟ **$-180°, 0°$**
4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.
لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكوّن من قطع مستقيمة تقع في المستوى

استعمل جدولًا إلكترونيًّا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟ **15**
6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا. **22.5°**
7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا. **176.9°**
8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية °0، فأوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

8) سيكون قياس كل زاوية داخلية °180 ، وهذا غير ممكن للمضلع.

1 التركيز

الهدف
استعمال الجداول الإلكترونية لإيجاد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم.

المواد
- حاسوب
- برنامج الجداول الإلكترونية

إرشادات للتدريس
يمكن أن يستعمل الطلاب خاصية "Fill – down" للجداول الإلكترونية لإدخال البيانات في العمودين الأول والثاني. وسوف يلاحظ الطلاب أن بإمكانهم إيجاد مجموع قياس الزوايا الداخليّة لمضلع كثير الأضلاع بهذه الطريقة بما في ذلك مضلع عدد أضلاعه 115 ضلعًا (السؤال 7).

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات واطلب إلى أحد الطالبين في كل مجموعة أن يُدخل البيانات في الحاسوب، في حين يملي عليه الطالب الآخر المعلومات المُدخلة، ثم اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 4–1.

واسأل:
- ما فائدة الجداول الإلكترونية؟
يمكنك إدخال البيانات مرّة واحدة ثم البناء على هذه البيانات.
- ما عيوب استعمال الجداول الإلكترونية؟
قد تجعل الأخطاء في أثناء إدخال البيانات (كتابتها) نتائجك غير صحيحة.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 8–5.

3 التقويم

التقويم التكويني
تحقق من إجابات الطلاب عن الأسئلة 8–5، لتقويم ما إذا أدخل الطلاب الصيغ إدخالًا صحيحًا في الجدول الإلكتروني.

من المحسوس إلى المجرّد
اطلب إلى الطلاب توقع قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية لمضلع محدّب منتظم عدد أضلاعه 360 ضلعًا باستعمال المعلومات أعلاه.

5-2 متوازي الأضلاع
Parallelogram

فيما سبق:
درستُ تصنيف المضلعات الرباعية .

والآن:
- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبقها.

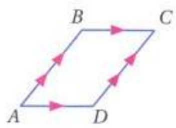
المفردات:
متوازي الأضلاع
parallelogram

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكله الأذرع متوازيين.

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱. ففي ▱$ABCD$ المبين جانبًا، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ بحسب التعريف.



▱$ABCD$

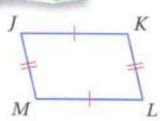
تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازيات الأضلاع.

نظريات — خصائص متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

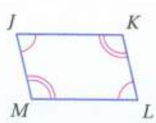
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$.



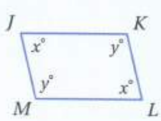
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$.



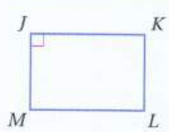
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x + y = 180$.



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في ▱$JKLM$، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ: $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



سوف تبرهن النظريات 5.6, 5.5, 5.3 في الأسئلة 5, 25, 27 على الترتيب

5-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

تصنيف المضلعات ذات الأضلاع الأربعة بوصفها أشكالاً رباعيّة.

الدرس 2-5

تعرّف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وتطبيقها.

تعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وتطبيقها.

ما بعد الدرس 2-5

تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما الخصائص التي تجعل الشكل المكوّن من الأذرع الخلفية متوازي أضلاع؟ كل ذراعين متقابلين يبقيان متوازيين دائمًا.
- ماذا يحصل لقياسات الزوايا عندما ينخفض الهدف من ارتفاع 10 ft إلى 5 ft؟ الزوايا الحادّة تصبح منفرجة والزوايا المنفرجة تصبح حادّة.
- ما التخمينات التي يمكن أن تضعها حول العلاقة بين الزوايا الأربعة بغض النظر عن ارتفاع الهدف؟ مجموع قياسات الزوايا الأربعة يبقى دائمًا °360. والزوايا المتقابلة تبقى دائمًا متطابقة. وإذا أصبحت إحدى الزوايا قائمة فإنّ جميع الزوايا تصبح قائمة.

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (21)	• تنويع التعليم ص (24 ,21)	• تنويع التعليم ص (24)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (5)	• كتاب التمارين ص (5)	• كتاب التمارين ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

أضلاع متوزاي الأضلاع وزواياه

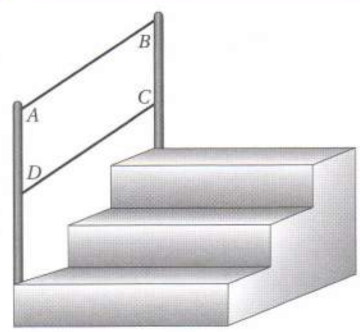
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص متوازي الأضلاع لإيجاد القياسات المجهولة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1



إنشاءات: في $\square ABCD$، افرض أنّ $m\angle B = 32°$، $CD = 80$ in، $BC = 15$in أوجد كل قياس مما يأتي:

a) AD 15 in

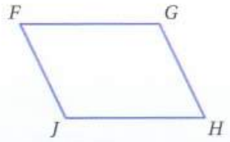
b) $m\angle C$ 148°

c) $m\angle D$ 32°

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال تكتب النظريات بمصطلحات عامّة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.

برهان نظريّة 5.4



اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريّة 5.4.

المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

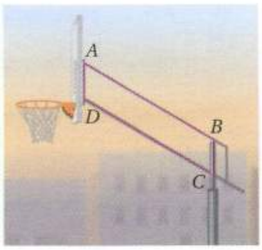
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square FGHJ$	1) معطى.
2) $FG \parallel JH, FJ \parallel GH$	2) تعريف متوازي الأضلاع.
3) $\angle F$, $\angle J$ متكاملتان. $\angle J$, $\angle H$ متكاملتان. $\angle H$, $\angle G$ متكاملتان.	3) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
4) $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$	4) الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي $94 \text{ ft} \times 50 \text{ ft}$، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض 10 ft .

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص متوازي الأضلاع



كرة سلة: في $\square ABCD$، إذا كان $m\angle A = 55°$, $AB = 2.5$ ft ، $BC = 1$ ft، فأوجد كلًّا مما يأتي :

a) DC

$DC = AB$ — كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان

$= 2.5$ ft — بالتعويض

b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180°$ — كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان

$m\angle B + 55° = 180°$ — بالتعويض

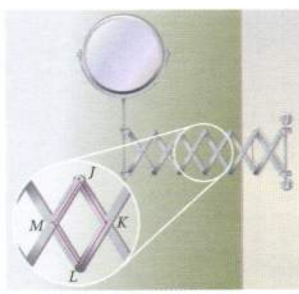
$m\angle B = 125°$ — بطرح °55 من كلا الطرفين

c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$ — كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان

$= 55°$ — بالتعويض

تحقق من فهمك



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47°, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK 8 cm **B)** $m\angle L$ 47°

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

1C) سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى °90 تبعًا للنظرية 5.6

تنبيه!

متوازي الأضلاع: لا تطبق النظريات 5.6–5.3 إلا إذا كُنت تعرف أن الشكل متوازي أضلاع. وعلى وجه الخصوص، عكس نظرية 5.6 ليس صحيحًا.

إرشادات للمعلم الجديد

متوازي الأضلاع: قبل أن تقدّم النظريات 5.6–5.3 إلى الطلاب، استعمل معهم أسلوب العصف الذهني لمعرفة الخصائص التي يعتقدون أنها صحيحة بالنسبة إلى متوازي الأضلاع.

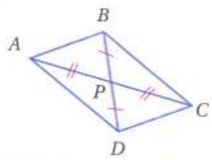
قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

نظريات — قطرا متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

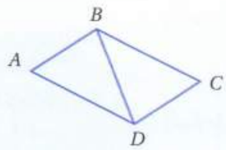
5.7 **قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.**

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



5.8 **قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.**

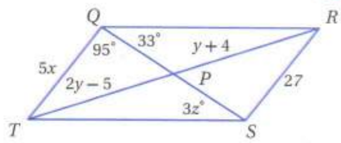
مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



سوف تبرهن النظريتين 5.7, 5.8 في السؤالين 28, 26 على الترتيب

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر

جبر: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:



a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان

$QT = RS$ تعريف تطابق القطع المستقيمة

$5x = 27$ بالتعويض

$x = 5.4$ بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$ قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر

$TP = PR$ تعريف تطابق القطع المستقيمة

$2y - 5 = y + 4$ بالتعويض

$y = 9$ بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

c) z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$ قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين

$\angle QST \cong \angle SQR$ العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة

$m\angle QST = m\angle SQR$ تعريف تطابق الزوايا

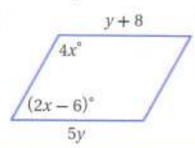
$3z = 33°$ بالتعويض

$z = 11$ بقسمة كلا الطرفين على 3

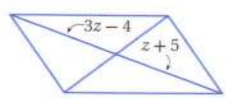
تحقق من فهمك

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A) $x = 31, y = 2$



2B) $z = 4.5$

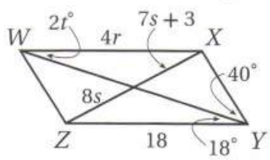


قطرا متوازي الأضلاع

الأمثلة 4-2 تبيّن كيفية استعمال النظريات لإثبات أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

مثال إضافي

2 إذا كان الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع فأوجد قيمة المتغير المحدد فيما يلي:



a) r 4.5

b) s 3

c) t 9

المحتوى الرياضي

القواطع: يمثل قطرا متوازي الأضلاع قاطعين لأضلاعه؛ لذلك فالزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: قدّم للطلاب عدة أسئلة حول إيجاد طولي قطري متوازي أضلاع، ثم اختر بعض الطلاب ليشرحوا أعمالهم لطلاب الصف، ثم احتفظ بأعمالهم ووزّعها على طلاب الصف.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: أكّد للطلبة أن أقطار بعض متوازيات الأضلاع تبدو كأنها تنصّف الزوايا المتقابلة، إلا أن هذه ليست خاصية لمتوازيات الأضلاع. نبّه الطلاب ألّا يفترضوا أن الزوايا منصفة. وفي الدرس 5–5 سوف يدرس الطلاب المعين والمربع حيث القطران ينصفان الزوايا المتقابلة في هذين الشكلين.

يمكنك استعمال النظرية 5.7 لتحديد إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مثال 3 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(2, -3)$, $(-2, 4)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (0, 0.5)$$ بالتبسيط

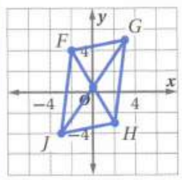
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5) \checkmark$$

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة
في المثال 3 ، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.

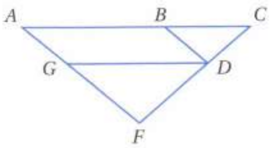


✓ تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$. $(-1, 2.5)$

يمكنك استعمال خصائص متوازي الأضلاع وأقطاره لكتابة براهين.

مثال 4 استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين



اكتب برهانًا حرًّا.

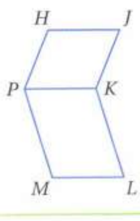
المعطيات: $\square ABDG, AF \cong CF$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle BDG \cong \angle A$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$، ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

✓ تحقق من فهمك



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP , PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$ انظر الهامش

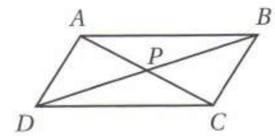
مثالان إضافيان

3 أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square MNPR$، الذي إحداثيات رؤوسه $M(-3, 0)$، $N(-1, 3)$، $P(5, 4)$، $R(3, 1)$. $(1, 2)$

4 اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: في $\square ABCD$ يتقاطع القطران $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ في النقطة P.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ ينصّف كل منهما الآخر.



البرهان

بما أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطراه؛ فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AC}$ قاطع. إذن $\angle BAC \cong \angle DCA$ و $\angle ABD \cong \angle CDB$ لأنها متبادلة داخليًّا، وحسب مسلمة ASA يكون $\triangle APB \cong \triangle CPD$، إذن حسب خصائص المثلثات المتطابقة يكون $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ و $\overline{BP} \cong \overline{DP}$. لذلك $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ ينصف كل منهما الآخر.

إجابة (تحقق من فهمك):

4) **المعطيات:** $\square HJKP , \square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $HJKP, PKLM$ متوازيا أضلاع (معطيات)

2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$, $\overline{PK} \cong \overline{ML}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع متطابقة)

3) $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$ (خاصية التعدي)

تأكد

مثال 1 1) **ملاحة:** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتين والذراعين الواصلين بينهما $\square MNPQ$.

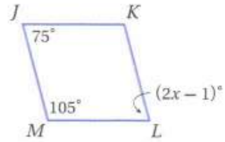
a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP. **2in**

b) إذا كان $m\angle NMQ = 148^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$. **32°**

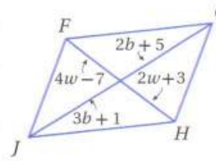
c) إذا كان $m\angle MQP = 55^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$. **55°**

مثال 2 **جبر:** أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

2) **38**



3) **$w = 5,\ b = 4$**



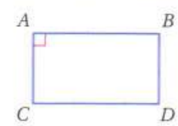
مثال 3 4) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$. **(0, 2)**

مثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين : **6 ,5) انظر الهامش.**

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

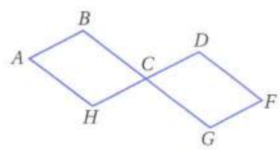
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



6) برهانًا ذا عمودين.

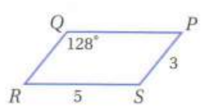
المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



تدرب وحل المسائل

مثال 1 استعمل $\square PQRS$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



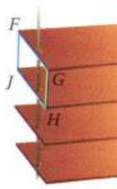
7) $m\angle R$ **52°**

8) QR **3**

9) QP **5**

10) $m\angle S$ **128°**

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}\text{ in}, FG = 1\text{ in}, \angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH **1 in**

b) GH **$\frac{3}{4}$in**

c) $m\angle JFG$ **62°**

d) $m\angle FJH$ **118°**

3 التدريب

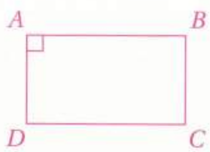
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

5) **المعطيات:** $\square ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\angle A$ قائمة.

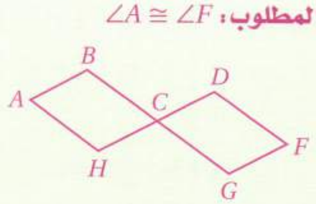
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. ولأن $\angle A$ قائمة فإنّ $\overline{AD} \perp \overline{AB}$. وحسب نظريّة القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$. إذن $\angle B$ قائمة لأنّ المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة، وكذلك $\angle D$ و $\angle B \cong \angle C$ و $\angle A \cong$ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. إذن $\angle C$ و $\angle D$ قائمتان لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) **المعطيات:** $\square ABCH$ ، $\square DCGF$.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $ABCH$ و $DCGF$ متوازيا أضلاع. (معطى)

2) $\angle BCH \cong \angle DCG$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\angle A \cong \angle BCH$ و $\angle DCG \cong \angle F$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle A \cong \angle F$ (خاصيّة التعدّي)

تنويع الواجبات المنزلية

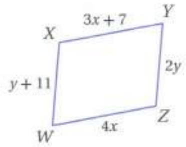
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7-17، 33-51
ضمن المتوسط	7-29 فردي ، 31، 33-51
فوق المتوسط	25-48، (اختياري: 49-51)

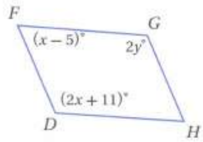
مثال 2 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

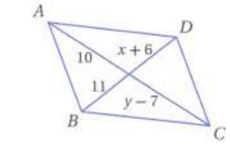
$x = 7, y = 11$ (12

$x = 58, y = 63.5$ (13

$x = 5, y = 17$ (14

(12


(13


(14


مثال 3 **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

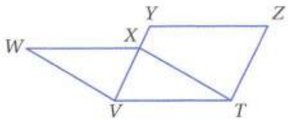
15) $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$ **$(2.5, 2.5)$**

16) $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$ **$(0, 1.5)$**

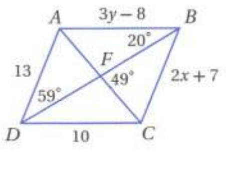
مثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :

17) **المعطيات:** $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ انظر الهامش



جبر: استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



18) x **3** | **19)** y **6**

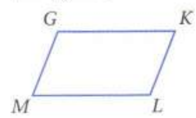
20) $m\angle AFB$ **131°** | **21)** $m\angle DAC$ **72°**

22) $m\angle ACD$ **29°** | **23)** $m\angle DAB$ **101°**

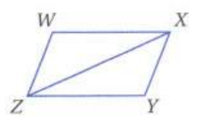
24) **هندسة إحداثية:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وضح تبريرك. انظر الهامش

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي : 28–26) انظر ملحق الإجابات

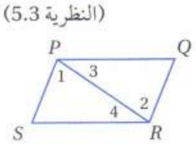
25) برهان ذو عمودين.
المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$ زوايا متكاملة.
(النظرية 5.5)



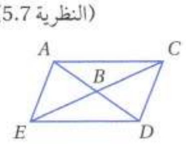
26) برهان ذو عمودين.
المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$
(النظرية 5.8)



27) برهان ذو عمودين.
المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$
(النظرية 5.3)



28) برهان حرّ.
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\overline{EC}$ ينصّف $\overline{AD}$
(النظرية 5.7)



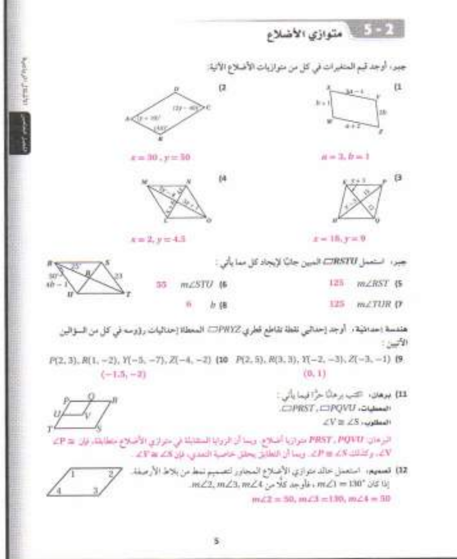
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا متوازي أضلاع يقع في الأرباع الأربعة لشبكة مستوى إحداثي، ثم اطلب إليهم أن يرسموا قطري الشكل. اطلب إليهم بعد ذلك أن يرسموا تمدّدين للشكل على الشبكة الإحداثية نفسها باستعمال معاملي التمدد 0.5 و 2 وأن يرسموا أقطار الشكلين الناتجين. اطلب إلى الطلاب أن يُسجّلوا العلاقة بين الزوايا الداخلية للأشكال الثلاثة وأقطار تلك الأشكال.

إخضاع متوازي الأضلاع للتمددات لا يغير قياسات الزوايا الداخليّة للأشكال الناتجة. وجميع الأقطار المتناظرة متوازية.

كتاب التمارين، ص (5)

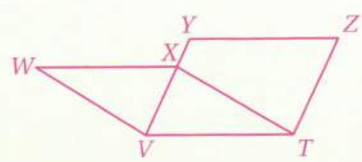


5-2 متوازي الأضلاع

إجابات:

17) **المعطيات:** $\square WXTV, \square ZYVT$.

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\square WXTV, \square ZYVT$ (معطى)

2) $\overline{WX} \cong \overline{VT}, \overline{VT} \cong \overline{YZ}$. (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ (خاصيّة التعدّي)

24) $(0, -1)$؛ إجابة ممكنة: الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضًا. ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرّك إلى الأسفل 6 وحدات و إلى اليمين وحدتين.

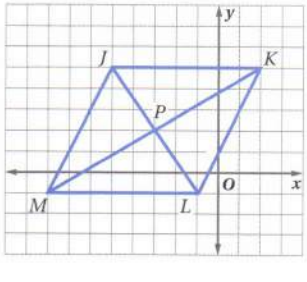
(29a $JP = \sqrt{13}$, $LP = \sqrt{13}$، بما أن $MP = \sqrt{34}$, $KP = \sqrt{3...}$ فإن القطرين $JP = LP$, $MP = K...$ ينصف كل منهما الآخر.

(29b لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

(29c لا؛ ميل $\overline{JK}$ يساوي 0 ، وميل $\overline{JM}$ يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.

🌐 الربط مع الحياة

توفر الرافعات التقاطعية مساحات عمل على ارتفاعات مختلفة تصل إلى $100\,m$.

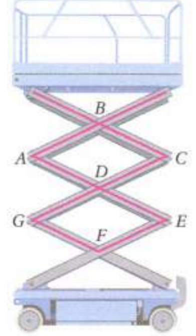


29) **هندسة إحداثية :** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:

a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.



30) **ميكانيكا :** في الشكل المجاور: $ABCD$, $DEFG$ متوازيا أضلاع متطابقان. a–c) انظر الهامش.

a) حدد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

b) حدد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

c) حدد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

31) **تمثيلات متعددة :** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) هندسيًّا : ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها. انظر الهامش.

b) جدوليًّا : أكمل الجدول الآتي:

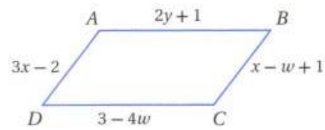
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
$ABCD$	نعم	نعم	نعم
$MNOP$	نعم	نعم	نعم
$WXYZ$	نعم	نعم	نعم

c) لفظيًّا : ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

(31c إجابة ممكنة: إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تحدٍّ :** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي $22\ in$ ، فأوجد AB . $7in$



33) **اكتب :** وضّح لماذا يُعد متوازي الأضلاع شكلًا رباعيًّا دائمًا، على حين أن الشكل الرباعيّ ليس دائمًا متوازي أضلاع. انظر الهامش

تنبيه لحل سؤال

المسطرة والمنقلة والفرجار : يتطلب السؤال 31 استعمال مسطرة ومنقلة وفرجار.

تمثيلات متعدّدة : في السؤال 31 ، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء شروط كون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

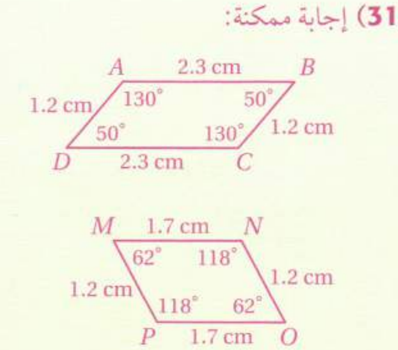
إجابات:

(30a $\angle C, \angle E, \angle G$؛ إجابة ممكنة: $\angle C$ تطابق $\angle A$ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\angle E$ تطابق $\angle A$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle G$ تطابق $\angle E$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدّي.

(30b $\overline{AD}, \overline{DE}, \overline{GF}$؛ إجابة ممكنة: $\overline{AD}$ تطابق $\overline{BC}$ لأنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\overline{DE}$ تطابق $\overline{BC}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\overline{GF}$ تطابق $\overline{DE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصيّة التعدّي.

(30c $\angle ABC, \angle ADC, \angle EDG, \angle EFG$؛ إجابة ممكنة: الزاويتان ABC و ADC مكملتان لـ $\angle C$؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. $\angle EDG$ مكملة لـ $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة لـ $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة لـ $\angle C$ بالتعويض.

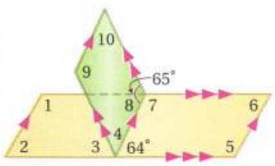
(31a إجابة ممكنة:



33) متوازي الأضلاع مضلع له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان، وكل زاويتين متقابلتين متطابقتان، وتعرّف الأشكال الرباعية على أنها مضلعات لها أربعة أضلاع. وبما أن متوازي الأضلاع له أربعة أضلاع فهو شكل رباعي. ويكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع عندما تكون الأضلاع المتقابلة متوازية.

34) **إجابة مفتوحة:** أعط مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا. انظر الهامش

35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$, $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وضّح تبريرك. انظر الهامش



36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

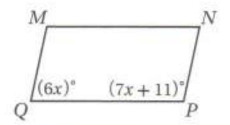
36) إجابة ممكنة: في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين. وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $9x - 18$, $3x + 42$. ما قياس الزاويتين؟ **D**

A 13, 167	**B** 58.5, 31.5
C 39, 141	**D** 81, 99

38) **إجابة شبكية:** إذا كان $MNPQ$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟ **13**



مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

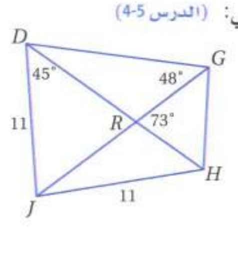
39) 108° **5**	40) 140° **9**	41) 147.3° **11**
42) 160° **18**	43) 135° **8**	44) 176.4° **100**

اكتب متباينة تربط بين قياسي كل زوج من الزوايا أو طولي كل زوج من القطع المستقيمة فيما يلي: (الدرس 5-4)

45) $m\angle DRJ, m\angle HRJ$ $\;$ $m\angle DRJ < m\angle HRJ$

46) DG, GH $\;$ $DG > GH$

47) $m\angle JDH, m\angle DHJ$ $\;$ إجابة ممكنة: $m\angle JDH \leq m\angle DHJ$



48) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند السيقان بعصي من جهة، وتربط بحبل من الجهة المقابلة. استعمل المتباينة SAS أو SSS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (الدرس 5-6) انظر الهامش

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

49) $\overline{YZ}$ ضلع؛ الميل: 3

50) $\overline{YW}$ قطر؛ الميل: $-\frac{4}{5}$

51) $\overline{ZW}$ ضلع؛ الميل: $-\frac{1}{6}$

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يعدوا قائمة لجميع خصائص متوازي الأضلاع التي تعلموها، واطلب إليهم أن يسلّموك أوراقهم قبل خروجك من غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 1–5 و 2–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

(34

(35 $m\angle 1 = 116°, m\angle 10 = 115°$؛ إجابة ممكنة $m\angle 8 = 64°$ لأن الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة.

$\angle 1$ مكمّلة لـ $\angle 8$ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. لذلك $m\angle 1$ يساوي 116°. $\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها 65° لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. لذلك فإن $m\angle 10$ يساوي $180° - 65°$ أو $115°$.

(48 حسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير. ولأنّ الدعامة ترتكز على الأرض ومثبّتة في الشجرة فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

5-3 تمييز متوازي الأضلاع
Distinguishing Parallelogram

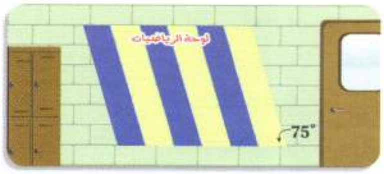
فيما سبق:
درستُ خصائص متوازي الأضلاع وتطبيقها.

والآن:
- أتعرّف الشروط التي تؤكد أنّ شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع.
- أُبرهن على أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

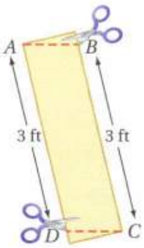
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها كيف قصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين.



أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريط متوازيان، فإننا نحتاج فقط للتأكد من أن الضلعين العلوي والسفلي قد قُصا بطول متساوٍ حتى نضمن أن الشرائط سوف تشكل متوازيات أضلاع.



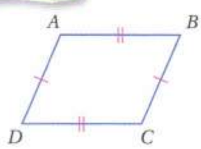
شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

نظريات: شروط متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

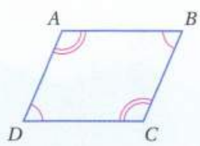
5.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



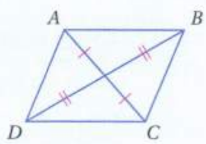
5.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$،
فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



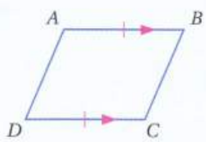
5.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منها الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر،
فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



5.12 في الشكل الرباعي، إذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$،
فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



سوف تبرهن النظريات 5.12 ,5.11 ,5.10 في الأسئلة 32 ,31 ,29 على الترتيب

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

تعرّف خصائص متوازي الأضلاع وتطبيقها.

الدرس 5-3

تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع.

إثبات أن أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

ما بعد الدرس 5-3

استعمال خصائص التشابه وتوسيعها لاستقصاء تخمينات حول المستطيلات وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- هل كانت الأطوال الأصليّة لشرائح الورق أكبر من أو أصغر من أو تساوي 3 ft؟ أطوال شرائح الورق كانت في الأصل أكبر من 3 ft ويجب طرح طول قطعة الطرف مثلثة الشكل من الطول الأصلي للورقة لأن قطعة الطرف سوف تُقص.
- قالت فاطمة أيضًا أنّه يُوجد قياس آخر يجب أن يكون متساويًا بين جميع شرائح الورق، وذلك من أجل التأكد من أن شرائح الورق تشكل متوازي أضلاع. فما القياس الذي أشارت إليه فاطمة؟ أطوال الأقطار المتناظرة في كل شريحة يجب أن تكون متساوية.
- إذا كان لدى فاطمة شريحة بطول 9 ft بالضبط من كل لون، فكيف يمكنها قصّ كل شريحة من الورق لتحصل على النتيجة نفسها؟ يمكنها قصّ مثلث من أحد الأطراف ولصقه في الطرف الآخر.

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (29)	• تنويع التعليم ص (29, 32)	• تنويع التعليم ص (29, 32, 34)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (6)	• كتاب التمارين ص (6)	• كتاب التمارين ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

شروط متوازي الأضلاع

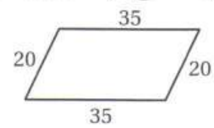
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية استعمال نظريات جديدة وهي عكس النظريات في الدرس 5-2 للتأكد من أن شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي أدناه متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

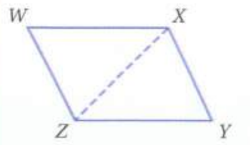


لكل زوج من الأضلاع المتقابلة الطول نفسه. لذلك فهما متطابقان. وإذا كان كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

إرشادات للمعلم الجديد

إرشاد: أكد على استعمال النظريات الواردة في الصفحة السابقة في البراهين. وفي هذا الدرس يتعلم الطلبة أنه لإثبات أن شكلًا رباعيًّا هو متوازي أضلاع فإن عليهم إثبات أن واحدة فقط من هذه النظريات تنطبق عليه.

برهان نظريّة 5.9



اكتب برهاناً ذا عمودين للنظريّة 5.9.

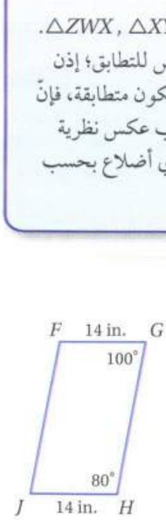
المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$

المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

البرهان:

بما أنّ أيّ نقطتين تحدّدان مستقيمًا، فإنّه يمكننا رسم المستقيم المساعد $\overline{ZX}$ لتشكيل $\triangle ZWX$, $\triangle XYZ$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YZX, \angle WZX \cong \angle YXZ$. وهذا يعني أنّ $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}, \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

مثال 1 تحديد متوازي الأضلاع

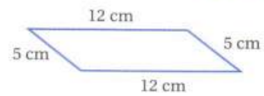


حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المجاور متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

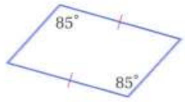
الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$, $\overline{JH}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول.
وبما أن $\angle FGH$, $\angle GHJ$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.
إذن فمن النظرية 5.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

(1A



(1B

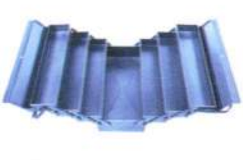


1A) نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

1B) لا؛ لأنه لا يحقق أي شرطٍ من شروط متوازي الأضلاع .

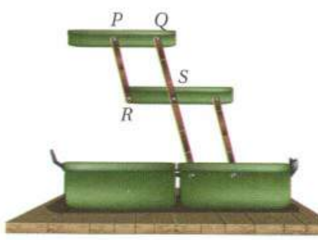
يمكنك استعمال شروط متوازي الأضلاع لإثبات علاقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات



الربط مع الحياة

يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.



صندوق الأدوات: **في الشكل المجاور، إذا كان $PQ = RS$, $PR = QS$، فبيّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع.**

بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9. إذن $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ؛ لذا، وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.

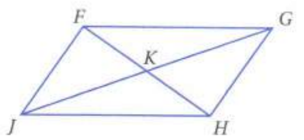
تحقق من فهمك

2) لوحات: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريط متوازيين. انظر ملحق الإجابات

28 الفصل 5 الأشكال الرباعية

يمكنك استعمال الجبر مع شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع.

مثال 3 استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة



في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1$, $KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2$, $KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

بناءً على النظرية 5.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

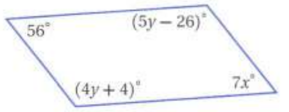
$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $x = 4$, $y = 2.5$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

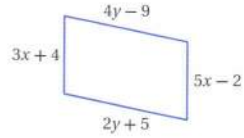
تحقق من فهمك

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



(3B



تعرفت شروط متوازي الأضلاع، وفيما يأتي ملخّص يوضح كيفيّة استعمال هذه الشروط لإثبات أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم إثبات أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع

أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقق أيًا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)
2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)
3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

تنبيه !

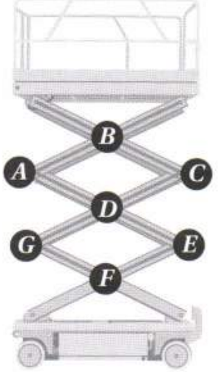
متوازي الأضلاع في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

$x = 8, y = 30$ (3A

$x = 3, y = 7$ (3B

مثال إضافي

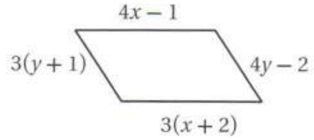
2 رافعات: تستعمل الرافعة التقاطعيّة عادة لبلوغ أماكن عمل مرتفعة بأمان. في الشكل أدناه $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$. وضح لماذا ستبقى الزوايا المتحالفة متكاملة دائمًا بغض النظر عن ارتفاع المنصّة.



بما أنّ كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي $ABCD$ متطابقتان، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع حسب النظرية 5.10. و تنص النظرية 5.5 على أن كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان. لذلك، $m\angle A + m\angle B = 180°$ و $m\angle C + m\angle D = 180°$. وبالتعويض، $m\angle A + m\angle D = 180°$ و $m\angle C + m\angle B = 180°$.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة كل من x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



$x = 7; y = 5$

تنويع التعليم

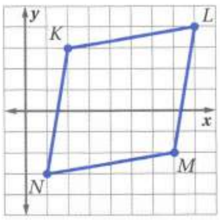
دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلاب أن يختار كل واحد منهم شريكًا، وكلّف أحدهما برسم متوازي أضلاع في مستوى إحداثي، واطلب إلى شريكه إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. بدّل الأدوار وكرّر النشاط مرّة ثانية.

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3), L(8, 4), M(7, -2), N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KN} \parallel \overline{LM}$, $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$.
لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

إرشادات للدراسة

صيغة نقطة المنتصف
لبيان أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة انظر الهامش

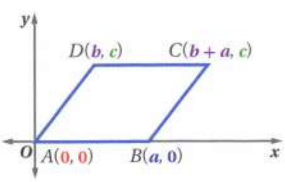
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف انظر ملحق الإجابات

درست في الفصل 3، أنّه يمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس المثلثات بمتغيرات. ثم استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لكتابة براهين إحداثيّة للنظريات. ويمكن عمل الشيء نفسه مع الأشكال الرباعيّة.

مثال 5 متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية:

في الشكل الرباعي، إذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، فافترض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، فيكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

مراجعة المفردات

البرهان الإحداثي
هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي

مثالان 5 ,4 يبيّنان كيفية استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع.

مثالان إضافيان

هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $QRST$ الذي رؤوسه: $Q(-1, 3)$، $R(3, 1)$، $S(2, -3)$، $T(-2, -1)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أو لا، ثم برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.

ميل $\overline{QR}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

ميل $\overline{ST}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

ميل $\overline{RS}$ يساوي 4

ميل $\overline{TQ}$ يساوي 4

إذن $QRST$ متوازي أضلاع حسب التعريف.

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقان فإنّه متوازي أضلاع.

ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي بحيث يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. استعمل الشكل الرباعي $A(0,0)$ ، $B(a, 0)$ ، $C(b + a, c)$ ، $D(b, c)$.

المعطيات: $ABCD$، شكل رباعي فيه $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان:

حسب التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية، استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

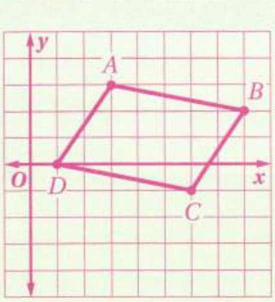
ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساوي الصفر. وبما أنّ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لهما الميل نفسه و $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذن الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع لأن الأضلاع المتقابلة متوازية.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يشترك كل طالبين معًا لعمل مدونة، يذكران فيها مع الشرح الطرائق المختلفة لإثبات أن شكلاً رباعيًا ما هو متوازي أضلاع، واطلب إليهم العمل معًا لتحرير أعمالهم ومراجعتها ليتأكدوا من أنّها صحيحة وواضحة.

إجابات (تحقق من فهمك):

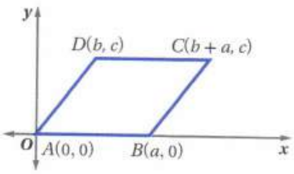


4A) إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة فإنّه متوازي أضلاع. $AB= \sqrt{26}$؛ $DC = \sqrt{26}$؛ $AD = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{13}$.
بما أنّ $AB = DC$ و $AD=BC$ فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع حسب النظرية 5.9.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596م - 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي. وقيل بأنه فكّر أولًا بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

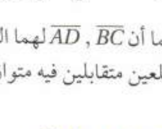
تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة. **انظر ملحق الإجابات**

تأكد

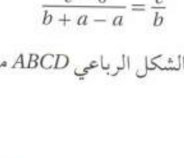
مثال 1 حدّد ما إذا كان شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

1)



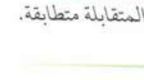
نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

2)



لا؛ لأنه لا يحقق أي شرطٍ من شروط متوازي الأضلاع.

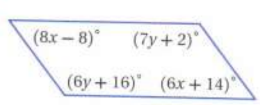
مثال 2 **3) طائرات ورقيّة:** يصنع أحمد طائرة ورقيّة كما في الشكل المجاور، فأراد أن يتحقق من أنّ الخيط المحيط بالهيكل يشكل متوازي أضلاع قبل تثبيت الأجزاء. كيف يمكنه استعمال أبعاد الهيكل الخشبي للتحقق من ذلك؟ وضح تبريرك.



$AP = CP$ (3، $BP = DP$ ؛ إجابة ممكنة: إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر فيكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. فإذا كان $AP = CP$, $BP = DP$، فإن الخيط يشكّل متوازي أضلاع.

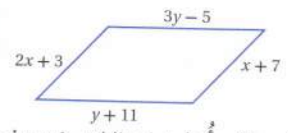
مثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4)



$x = 11$، $y = 14$

5)



$x = 4$، $y = 8$

مثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال. **8–6) انظر الهامش.**

6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

مثال 5 **8)** اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

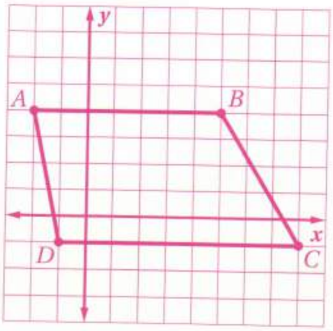
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–8 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

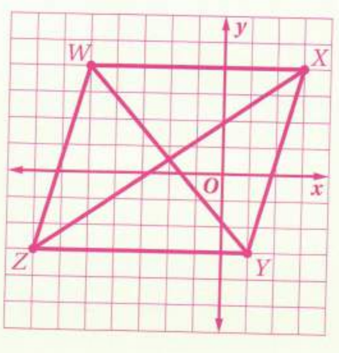
إجابات:

6) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيان. وبما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.



7) نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

وبما أنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع.



8) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: AC و DB ينصّف كل منهما الآخر.

البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$= \left(\frac{0+(a+b)}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

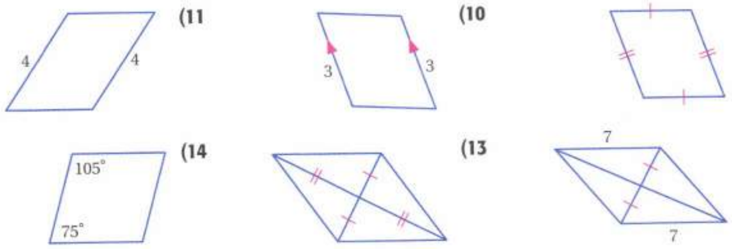
إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	28-9 ، 38 ، 39 ، 54-41
ضمن المتوسط	29-9 فردي ، 33 ، 36 ، 38 ، 39 ، 54-41
فوق المتوسط	52–29 ، (اختياري: 54 ,53)

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.



9) نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان.

10) نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

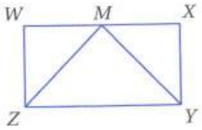
11) لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

12) لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

13) نعم؛ لأن قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

14) لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

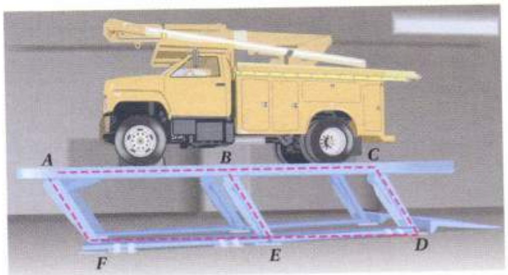
مثال 2 **15) برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.



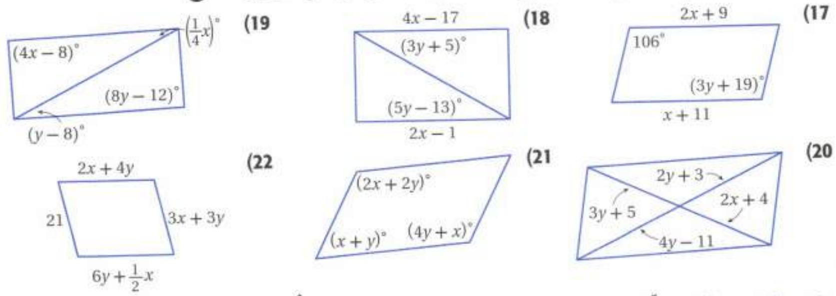
انظر ملحق الإجابات

16) رافعات: تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.

انظر ملحق الإجابات



مثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



$x = 2, y = 29$ (17

$x = 8, y = 9$ (18

$x = 30, y = 15.5$ (19

$x = 11, y = 7$ (20

$x = 40, y = 20$ (21

$x = 4, y = 3$ (22

مثال 4 **هندسة إحداثية:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

(23–26) انظر ملحق الإجابات

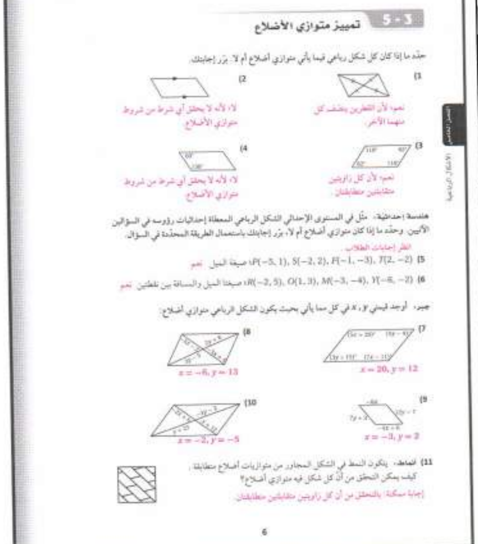
(23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$؛ صيغة الميل.

(24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$؛ صيغة المسافة بين نقطتين.

(25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

(26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

كتاب التمارين، ص (6)


5-3 تمييز متوازي الأضلاع

حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(1 نعم؛ لأن القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

(2 لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

(3 نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

(4 لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في السؤالين الآتيين. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

انظر إجابات الطلاب.

(5 $P(-5, 1), S(-2, 2), F(-1, -3), T(2, -2)$؛ صيغة الميل. نعم

(6 $R(-2, 5), O(1, 3), M(-3, -4), Y(-6, -2)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين. نعم

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(7 $x = 20, y = 12$

(8 $x = -6, y = 13$

(9 $x = -3, y = 2$

(10 $x = -2, y = -5$

(11 انماط: يتكون النمط في الشكل المجاور من متوازيات أضلاع متطابقة. كيف يمكن التحقق من أن كل شكل فيه متوازي أضلاع؟

إجابة ممكنة: بالتحقق من أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

6

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب تعيين النقاط $P(-4, -3), L(-1, 2), S(5, 1)$ في المستوى الإحداثي، واطلب إليهم تعيين نقطة رابعة T بحيث تصنع مع النقط الثلاث متوازي أضلاع وأن يبرهنوا أن الشكل متوازي أضلاع باستعمال النظريات التي تعلموها في هذا الدرس. إحداثيات ممكنة للنقطة الرابعة $(2, -4)$. ويمكن إثبات ذلك باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو صيغة الميل.

إجابة ممكنة: ميل $\overline{PL}$ يساوي $\frac{5}{3}$، ميل $\overline{LS}$ يساوي $-\frac{1}{6}$، ميل $\overline{ST}$ يساوي $\frac{5}{3}$، ميل TP يساوي $-\frac{1}{6}$. وبما أنّ للأضلاع المتقابلة الميل نفسه، فإنّ $\overline{ST} \parallel \overline{PL}$ و $\overline{TP} \parallel \overline{LS}$ لذلك فالشكل $PLST$ متوازي أضلاع حسب التعريف.

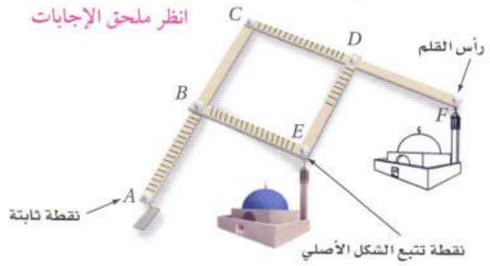
مثال 5 **27)** اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10. **27–29) انظر ملحق الإجابات**

30) **المِنْسَاخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.

انظر ملحق الإجابات



a) إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{CF}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$ ، $\overline{DF} \cong \overline{DE}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

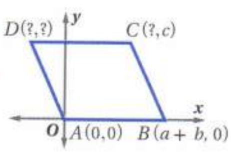
b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\text{in}$, $DF = 8\text{in}$ ، وطول الشكل الأصلي 5.5 in، فما طول الصورة؟ **9.2 in تقريبًا**

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يأتي: **(31, 32) انظر ملحق الإجابات**

31) النظريّة 5.11 **32)** النظريّة 5.12

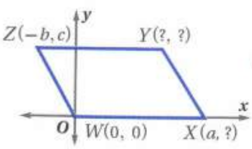
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

33)



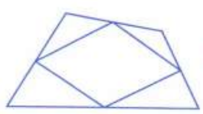
إجابة ممكنة: $C(a, c), D(-b, c)$

34)



$Y(a-b, c), X(a, 0)$

35) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكل متوازي أضلاع. **انظر ملحق الإجابات**



36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي خصائص المستطيل.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها. **انظر الهامش**

b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	3.3 cm
	$\overline{BD}$	3.3 cm
$MNOP$	$\overline{MO}$	2.8 cm
	$\overline{NP}$	2.8 cm
$WXYZ$	$\overline{WY}$	2.0 cm
	$\overline{XZ}$	2.0 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل. **انظر الهامش**

الربط مع الحياة

المِنْسَاخ هو أداة هندسية تستعمل لنسخ صورة أو مخطط وفق مقياس رسم معين.

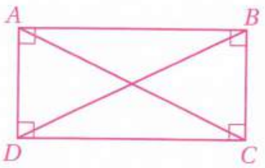
تنبيه لحل سؤال

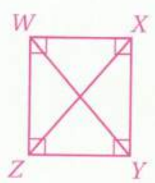
المسطرة والفرجار: يتطلب السؤال 36 استعمال مسطرة وفرجار.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء خصائص المستطيل.

إجابة:

36a) إجابة ممكنة:





36c) إجابة ممكنة: قطرا المستطيل متطابقان.

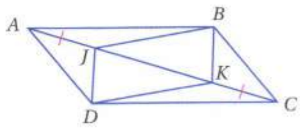
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (1 ,0). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (4 ,2)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (1 ,3). أوجد موقعي الرأسين الآخرين. $(1, -3)$ و $(-2, -2)$

38) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 . انظر الهامش

39) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟ انظر الهامش

40) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$. بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع. (40, 41) انظر ملحق الإجابات



41) **اكتب:** متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟

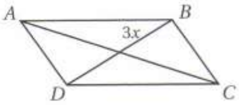
تدريب على الاختبار المعياري

42) إذا كان الضلعان AB, DC في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **B**

A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ **C** $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ **D** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

43) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $\overline{AC}$ تنصّف $\overline{BD}$ ، $AC = 40, BD = \frac{3}{5} AC$ ، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **4**



مراجعة تراكمية

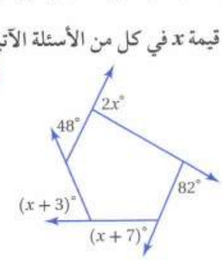
هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 5-2)

44) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$ **(1, 0.5)**

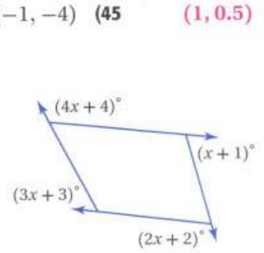
45) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$ **(4.5, 1.5)**

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 5-1)

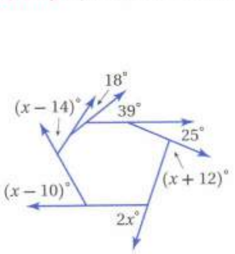
46) **55**



47) **35**



48) **58**



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

49) 135° **8** **50)** 144° **10** **51)** 168° **30** **52)** 162° **20**

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان $\overline{XY}, \overline{YZ}$ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

53) $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$ غير متعامدتين

54) $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$ غير متعامدتين

4 التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة يوضحوا من خلالها كيف ساعدهم الدرس السابق حول متوازي الأضلاع في درس تمييز متوازي الأضلاع.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 3–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

38) إجابة ممكنة: النظريتان إحداهما عكس الأخرى، فرضية النظرية 5.3 "الشكل ▱" وفرضية النظرية 5.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة". نتيجة النظرية 5.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 5.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

39) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، إلا أنه يمكنك أيضًا جعل متوازي الأضلاع أكبر أو أصغر بتغيير أطوال الأضلاع ودون تغيير قياسات الزوايا.

تنويع التعليم

فوق

توسع: قدّم للطلاب متوازي أضلاع مرسومًا على مستوى إحداثي، إحداثيات رؤوسه (0 ,0)، (4 ,2)، (4 ,8)، (0 ,6) ثم صل بين النقطتين (4 ,2) و (0 ,5) وبين النقطتين (4 ,3) و (0 ,6) وبين النقطتين (0 ,0) و(4 ,6) وبين النقطتين (0 ,2)و (4 ,8). ما الشكل الناتج من تقاطعات القطع المستقيمة الأربع؟ متوازي أضلاع.

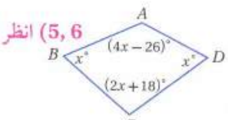
اختبار منتصف الفصل

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية: (الدرس 1-5)

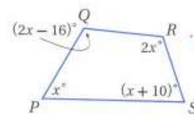
1) الخماسي $540°$
2) السباعي $900°$
3) ذو 18 ضلعًا $2880°$
4) ذو 23 ضلعًا $3780°$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-5)

5)



6) (5, 6) انظر الهامش.

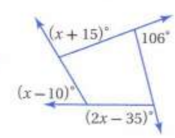


أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-5)

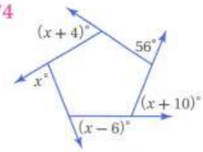
7) $720°$ 6
8) $1260°$ 9
9) $1800°$ 12
10) $4500°$ 27

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين: (الدرس 1-5)

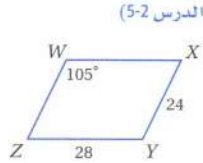
11) 71



12) 74



استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي: (الدرس 2-5)

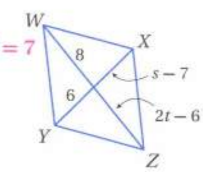


13) $m\angle WZY$ $75°$
14) WZ 24
15) $m\angle XYZ$ $105°$

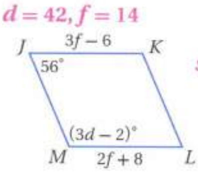
16) **تصميم:** صف طريقتين للتحقق من أنّ القطع المتناظرة حول المحور الرأسي عند منتصف التصميم المجاور متطابقة تمامًا. (الدرس 2-5) انظر الهامش.

جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين: (الدرس 2-5)

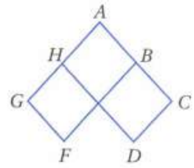
17) $s = 13, t = 7$



18) $d = 42, f = 14$

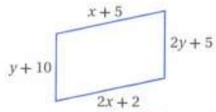


19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-5)
المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$ انظر ملحق الإجابات
المطلوب: $\angle F \cong \angle D$

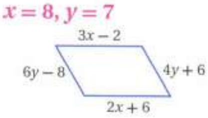


أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع: (الدرس 3-5)

20) $x = 3, y = 5$

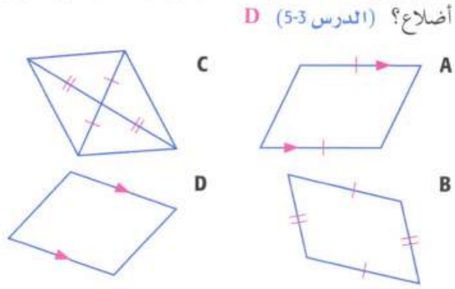


21) $x = 8, y = 7$



22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 3-5) انظر ملحق الإجابات

23) **اختيار من متعدد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-5) D



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع؟ برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-5) (24, 25) انظر ملحق الإجابات

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

الفصل 5 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (13)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس 1–5 إلى 3–5.

إجابات:

5) $m\angle A = 158°, m\angle B = 46°,$ $m\angle C = 110°, m\angle D = 46°$

6) $m\angle P = 61°, m\angle Q = 106°,$ $m\angle R = 122°, m\angle S = 71°$

16) إجابة ممكنة: تأكد من أنّ الأضلاع المتقابلة متطابقة أو أنّ الزوايا المتقابلة متطابقة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 3-5 ,2-5 ,1-5 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (16 ,11 ,6).
	تدريبات المهارات، ص (18 ,13 ,8).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

5-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

الدرس 5-4

تعرّف خصائص المستطيل وتطبيقها.

تحديد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.

ما بعد الدرس 5-4

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

اسأل:

- كيف يمكنك البدء بحل المسألة لو كنت سعيد؟ إجابة ممكنة: أقيس 80 in إلى الأعلى من أسفل الجدار. ثم 36 in عرضيًّا وبزاوية قائمة، ثم أعود ثانية إلى أسفل الجدار.
- ماذا سيعمل سعيد للتأكد من أنّ الخلفية مستطيلة؟ إجابة ممكنة: التأكد من أنّ أركان الخلفية زوايا قوائم. التأكد من أنّ جانبي الخلفية متساويان في الطول، والتأكد من أن حافّة الخلفية العلوية وحافتها السفليّة متساويتان في الطول.
- كيف يمكن لسعيد التأكد من أن الخلفية مستطيلة الشكل دون قياس أضلاعها أو زواياها؟ إذا كان القطران متطابقين وينصف كل منهما الآخر فإنّ الخلفية مستطيلة الشكل.

5-4 المستطيل
Rectangle

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

والآن:

- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.

المفردات:

المستطيل
rectangle

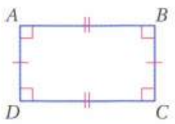
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

سعيد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات العلوم في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات العلوم، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل طوله 80 in، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

خصائص المستطيل: المستطيل هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية:

- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.



المستطيل $ABCD$

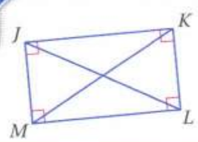
وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:

نظرية 5.13 قطرا المستطيل

أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

مثال: إذا كان $\square JKLM$ مستطيلًا، فإنّ $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.



سوف تبرهن النظرية 5.13 في السؤال 33

مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص المستطيل

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي ممرّان كما في الشكل المجاور. إذا كان $PS = 180\text{ m}$, $PR = 200\text{ m}$، فأوجد QT.

$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، فإنّه متوازي أضلاع. وقطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر؛ لذا فإن $QT = ST$.

$QT + ST = QS$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$QT + QT = QS$	بالتعويض
$2QT = QS$	بالتبسيط
$QT = \frac{1}{2} QS$	بقسمة كلا الطرفين على 2
$QT = \frac{1}{2}(200) = 100$	بالتعويض

تحقق من فهمك استعن بالشكل في المثال 1.

1A) إذا كان $TS = 120$، فأوجد PR. **240**

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$. **26°**

مصادر الدرس 5-4

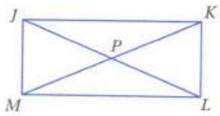
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (37)	• تنويع التعليم ص (37, 41)	• تنويع التعليم ص (37, 41)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (7)	• كتاب التمارين ص (7)	• كتاب التمارين ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم
تذكر من النظرية 5.6 أنه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قوائم.

يمكنك استعمال خصائص المستطيل والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2 استعمال خصائص المستطيل والجبر



جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x + 4)°$ و $m\angle JLK = (7x + 5)°$، فأوجد قيمة x.

بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90$. وبما أن المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.

لذا فإن $\angle JLM \cong \angle KJL$، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = 90°$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90°$	بالتعويض
$2x + 4 + 7x + 5 = 90$	بالتعويض
$9x + 9 = 90$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x = 81$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق من فهمك

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $JP = 3y - 5$, $MK = 5y + 1$، فأوجد قيمة y. 11

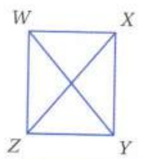
إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا: عكس النظرية 5.13 صحيح أيضًا.

نظرية 5.14

أضف إلى مطويتك

إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنّه مستطيل.

مثال: في $\square WXYZ$، إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$، فإنّ $\square WXYZ$ مستطيل.



سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 34

مثال 3 من واقع الحياة إثبات علاقات في المستطيل

كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft، $AC = 67$ ft، $BD = 67$ ft، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.

بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AC} \cong \overline{BD}$. وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

الربط مع الحياة

كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.

خصائص المستطيل

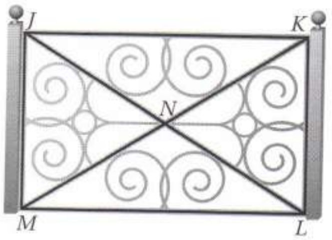
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية إثبات أن شكلًا رباعيًا يكون مستطيلاً جبريًّا باستعمال خصائص المستطيل ونظرياته.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

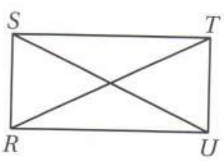
مثالان إضافيان

1 **إنشاءات:** دُعّمت بوابة حديقة مستطيلة الشكل بدعامتين قطريتين لتثبيتها. فإذا كان $JK = 12$ ft و $LN = 6.5$ ft، فأوجد KM.



$KM = 13$ ft.

2 الشكل الرباعي $RSTU$ مستطيل. إذا كان $m\angle RTU = (8x + 4)°$ و $m\angle SUR = (3x - 2)°$ فأوجد x. 8



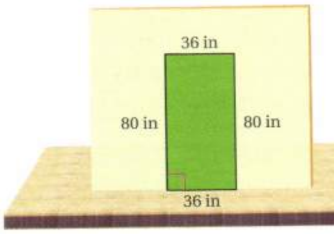
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: ارسم مستطيلًا على أرضية مبلطة باستعمال شريط لاصق، واستعمل الخيط للتحقق من أن الشكل الذي رسمته مستطيل من خلال قياس طولي قطريه.

تحقق من فهمك

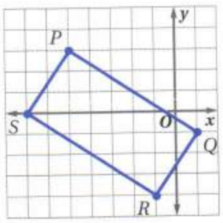
3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس سعيد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضح إجابتك. انظر الهامش.



يمكنك أيضًا استعمال خصائص المستطيل لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا مرسومًا في المستوى الإحداثي عُلمت إحداثيات رؤوسه هو مستطيل.

مثال 4 المستطيل والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $\square PQRS$ متطابقان؟

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $\square PQRS$ مستطيل.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل. لا؛ لأن الضلعين $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ غير متوازيين.

إرشادات للدراسة

المستطيل ومتوازي الأضلاع
كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

إثبات أنّ متوازي الأضلاع يكوّن مستطيلًا

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية إثبات أنّ متوازي الأضلاع يكوّن مستطيلًا باستعمال النظرية 5.14.

مثالان إضافيان

3 **تطريز:** يشُد بعض الخياطين القماش الذي يطرزون عليه رسومًا جميلة فوق أُطر خشبيّة فيسهّل عملهم، مما يتيح لهم التطريز بدقة كبيرة. ومن أجل التأكد من أن الإطار مستطيل الشكل يقيس الخياط قبل مد القماش أضلاع الإطار وأقطاره. إذا كان $AB = 12$ in، $BC = 35$ in، $CD = 12$ in، $DA = 35$ in، $BD = 37$ in و $AC = 37$ in، وضحّ كيف يمكن للخياط التأكد من أنّ الإطار مستطيل.

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$؛ فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ $\overline{BD} \cong \overline{AC}$؛ فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

4 رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-2, 3)$، $K(1, 4)$، $L(3, -2)$، $M(0, -3)$. حدّد ما إذا كان $JKLM$ مستطيلًا باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين.

بما أن $JK = ML = \sqrt{10}$ فإنّ $JM = KL = \sqrt{40}$ $JKLM$ متوازي أضلاع. ولأنّ $KM = JL = \sqrt{50}$، فإن $JKLM$ مستطيل.

التعليم باستعمال التقنيات

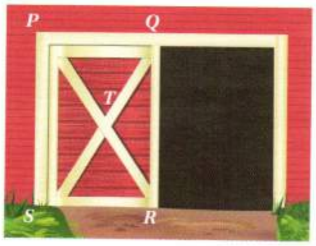
مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في مدونة الفصل فقرة توضح طريقتين مختلفتين لإثبات أنّ متوازي أضلاع مستطيل.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) نعم؛ بما أنّ الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإنّ المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت احدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإنّ جميع الزوايا قائمة. وبما أنّ الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وحسب التعريف، يكون المدخل مستطيلًا.

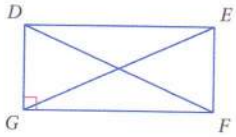
تأكـد

مثال 1 **زراعة:** في الشكل المجاور، الدعامتان المتقاطعتان تقويان دقة بوابة مخزن الحبوب، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.
إذا كان $PS = 7\text{ ft}, ST = 3\frac{13}{16}, m\angle PTQ = 67$،
فأوجد كلًّا مما يأتي:



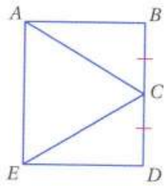
1) QR 7 ft
2) SQ $7\frac{5}{8}\text{ ft}$
3) $m\angle TQR$ $33.5°$
4) $m\angle TSR$ $56.5°$

مثال 2 **جبر:** استعن بالمستطيل $DEFG$ المبين جانبًا.



5) إذا كان $FD = 3x - 7$, $EG = x + 5$، فأوجد EG. 11
6) إذا كان $m\angle EFD = (2x-3)°$, $m\angle DFG = (x+12)°$، فأوجد $m\angle EFD$. $51°$

مثال 3 7) **برهان:** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$. انظر الهامش

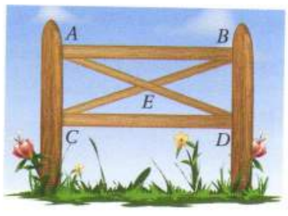


مثال 4 **هندسة إحداثية:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$، صيغة الميل. انظر الهامش
9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$، صيغة المسافة. انظر ملحق الإجابات

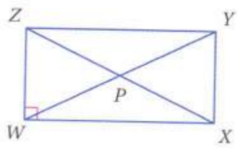
تدرب وحل المسائل

مثال 1 **سياج:** تُستعمل دعائم متقاطعة لتقوية السياج.
إذا كان $AB = 6\text{ ft}, AC = 2\text{ ft}, m\angle CAE = 65°$،
فأوجد كلًّا مما يأتي:



10) BD 2 ft
11) CB 6.3 ft
12) $m\angle DEB$ $50°$
13) $m\angle ECD$ $25°$

مثال 2 **جبر:** استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



14) إذا كان $ZY = 2x + 3$, $WX = x + 4$، فأوجد WX. 5
15) إذا كان $PY = 3x - 5$, $WP = 2x + 11$، فأوجد ZP. 43
16) إذا كان $m\angle ZYW = (2x-7)°$, $m\angle WYX = (2x+5)°$، فأوجد $m\angle ZYW$. $39°$
17) إذا كان $ZP = 4x - 9$, $PY = 2x + 5$، فأوجد ZX. 38
18) إذا كان $m\angle XZY = 3x + 6$, $m\angle XZW = 5x - 12$، فأوجد $m\angle YXZ$. $48°$
19) إذا كان $m\angle ZXW = x - 11$, $m\angle WZX = x - 9$، فأوجد $m\angle ZXY$. $46°$

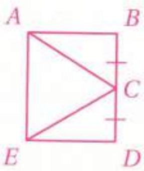
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

7) **المعطيات:** $ABDE$ مستطيل؛ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.



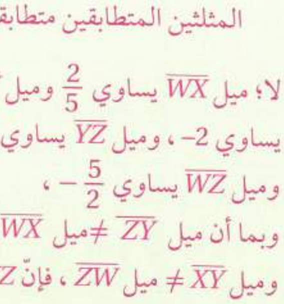
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{EC}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $ABDE$ مستطيل؛ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. (معطيات)
2) $ABDE$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)
3) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)
4) $\angle B$ و $\angle D$ قائمتان. (تعريف المستطيل)
5) $\angle B \cong \angle D$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)
6) $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ (SAS)
7) $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) لا؛ ميل $\overline{WX}$ يساوي $\frac{2}{5}$ وميل $\overline{XY}$ يساوي -2، وميل $\overline{YZ}$ يساوي $\frac{3}{5}$، وميل $\overline{WZ}$ يساوي $-\frac{5}{2}$، وبما أن ميل $\overline{ZY} \neq$ ميل $\overline{WX}$، وميل $\overline{XY} \neq$ ميل $\overline{ZW}$، فإنّ $WXYZ$ ليس متوازي أضلاع. لذلك $WXYZ$ ليس مستطيلًا.

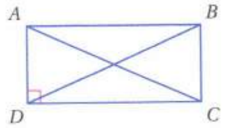


تنويع الواجبات المنزلية

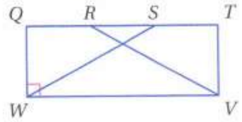
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	10-25، 40-51
ضمن المتوسط	11-31 فردي، 32، 33-39 فردي، 40-51
فوق المتوسط	26-48، (اختياري: 49-51)

مثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي: **20-25) انظر ملحق الإجابات**

20) المعطيات: $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



21) المعطيات: $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



مثال 4 **هندسة إحداثية:** مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. **انظر ملحق الإجابات**

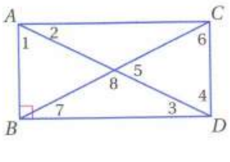
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

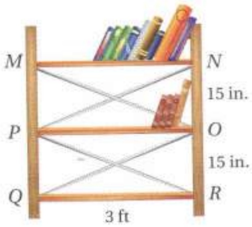
في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40$ ،
فأوجد كلًّا مما يأتي:



26) $m\angle 1$ $50°$ **27)** $m\angle 7$ $40°$ **28)** $m\angle 3$ $40°$

29) $m\angle 5$ $80°$ **30)** $m\angle 6$ $50°$ **31)** $m\angle 8$ $100°$

32) مكتبات: أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور. كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12 \text{ in} = 1 \text{ ft}$) **انظر الهامش**



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين: **33، 34) انظر ملحق الإجابات**

33) النظريّة 5.13 **34)** النظريّة 5.14

35) رياضة: صمم سلمان نموذج ملعب كرة قدم. وضّح كيف يمكنه أن يتحقّق من أنّ أبعاد الملعب قياسية، وأنه مستطيل باستعمال شريط القياس فقط. **انظر ملحق الإجابات**

الربط مع الحياة

حددت رابطة كرة القدم الدولية (IFAP) الأبعاد القياسية لملعب كرة القدم في البطولات الرسمية الدولية فكانت 105m طولا، و 68m عرضًا.

36) تمثيلات متعدّدة: سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

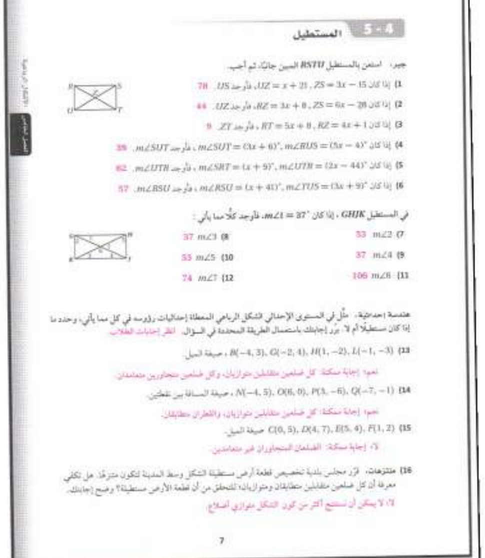
a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD$، $MNOP$، $WXYZ$. ثم ارسم قطري كلٍّ منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R. **انظر الهامش**

b) جدوليًّا: استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي.

متوازي الأضلاع	$ABCD$		$MNOP$		$WXYZ$	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية	$90°$	$90°$	$90°$	$90°$	$90°$	$90°$

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع. **انظر الهامش**

كتاب التمارين، ص (7)


5-4 المستطيل

جبر: استعن بالمستطيل $RSTU$ المبين جانبًا، ثم أجب.

1) إذا كان $ZS = 3x - 15$ ، $UZ = x + 21$ ، فأوجد US. 78
2) إذا كان $ZS = 6x - 28$ ، $RZ = 3x + 8$ ، فأوجد UZ. 44
3) إذا كان $RZ = 4x + 1$ ، $RT = 5x + 8$ ، فأوجد ZT. 9
4) إذا كان $m\angle RUS = (5x - 4)°$ ، $m\angle SUT = (3x + 6)°$ ، فأوجد $m\angle SUT$. 39
5) إذا كان $m\angle UTR = (2x - 44)°$ ، $m\angle SRT = (x + 9)°$ ، فأوجد $m\angle UTR$. 62
6) إذا كان $m\angle TUS = (3x + 9)°$ ، $m\angle RSU = (x + 41)°$ ، فأوجد $m\angle RSU$. 57

في المستطيل $GHJK$ ، إذا كان $m\angle 1 = 37°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $m\angle 2$ 53
8) $m\angle 3$ 37
9) $m\angle 4$ 37
10) $m\angle 5$ 53
11) $m\angle 6$ 106
12) $m\angle 7$ 74

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. انظر إجابات الطلاب.

13) $B(-4, 3), G(-2, 4), H(1, -2), L(-1, -3)$ ، صيغة الميل.
نعم؛ إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين متوازيان، وكل ضلعين متجاورين متعامدان.

14) $N(-4, 5), O(6, 0), P(3, -6), Q(-7, -1)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.
نعم؛ إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين متوازيان، والقطران متطابقان.

15) $C(0, 5), D(4, 7), E(5, 4), F(1, 2)$ صيغة الميل.
لا؛ إجابة ممكنة: الضلعان المتجاوران غير متعامدين.

16) منتزهات: قرّر مجلس بلدية تخصيص قطعة أرض مستطيلة الشكل وسط المدينة لتكون منتزهًا. هل تكفي معرفة أن كل ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان؛ للتحقق من أن قطعة الأرض مستطيلة؟ وضح إجابتك.
لا؛ لا يمكن أن نستنتج أكثر من كون الشكل متوازي أضلاع.

7

تنبيه لحل سؤال

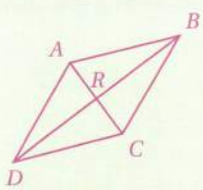
المنقلة والفرجار والمسطرة: يتطلب السؤال 36 استعمال الفرجار والمسطرة والمنقلة.

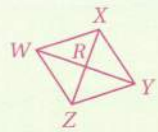
تمثيلات متعدّدة: في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

إجابات:

32) 3 ft و 3 in
إجابة ممكنة: حتى تكون الزوايا قوائم يجب أن تكون أطوال الدعائم الحديدية متساوية. وبما أن طول الرف معلوم والمسافة بين الرفوف معلومة، فيمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الدعامة الحديدية، وقد وجد أن طول الدعامة 3 ft و 3 in.

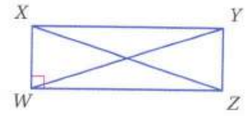
36a) إجابة ممكنة:





36c) إجابة ممكنة: إذا كانت الأضلاع الأربعة في متوازي الأضلاع متطابقة فإن قطريه متعامدان.

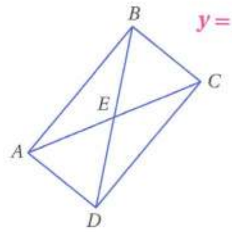
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4,\ XZ = b$، فأوجد YW. **5**

38) إذا كان $XZ = 2c\ ,\ ZY = 6,\ XY = 8$، فأوجد WY. **10**

مسائل مهارات التفكير العليا



39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$، $m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ,\ m\angle EBC = 60^\circ$، فأوجد قيمة كل من x, y. **$x = 6$، $y = -10$**

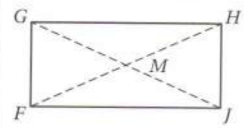
40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك. **انظر الهامش**

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة. **انظر ملحق الإجابات**

42) **اكتب:** وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات. **انظر الهامش**

تدريب على الاختبار المعياري

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y,\ GH = 11,\ GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلًا؟ **A**



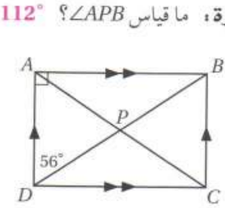
A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

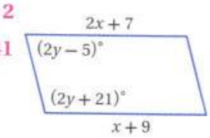
44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟ **112°**



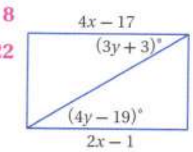
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع: (الدرس 3-5)

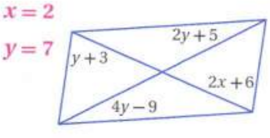
45) **$x = 2$، $y = 41$**



46) **$x = 8$، $y = 22$**



47) **$x = 2$، $y = 7$**



48) **طائرات:** تُستعمل للطيران متوسط المدى طائرة ذات محرّكين، طولها 78 m، والمسافة بين نهايتي جناحيها 90 m. إذا صُنع نموذج لهذه الطائرة المسافة بين نهايتي جناحيه 36 cm، فأوجد طول هذا النموذج. (الدرس 2-5) **31.2 cm**

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

49) $(4, 2), (2, -5)$ **$\sqrt{53}$**

50) $(0, 6), (-1, -4)$ **$\sqrt{101}$**

51) $(-4, 3), (3, -4)$ **$7\sqrt{2}$**

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب أن يوضّحوا طريقة كتابة برهان ذي عمودين لإثبات أن متوازي الأضلاع الذي قطراه متطابقان مستطيل.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: للسؤال 40 يجب أن يدرك الطلاب أنّ أي مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن أن يرتّبا ليشكلا متوازي أضلاع. ولأن زوايا المستطيل قائمة فإن أي مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقين يمكن أن يُرتّبا ليشكلا مستطيلًا.

إجابات:

40) شيماء؛ إجابة ممكنة: عندما يرتّب مثلثان متطابقان ليشكلا شكلاً رباعيًا فإنّ زاويتين من زاويا الشكل الرباعي ناتجتان من رأس منفرد لمثلث. ولكي يكون الشكل الرباعي مستطيلاً يجب أن تكون إحدى الزوايا في المثلثين المتطابقين قائمة.

42) إجابة ممكنة: كل المستطيلات تكون متوازيات أضلاع لأنه بناءً على تعريف المستطيل يكون كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. ومتوازي الأضلاع الذي تكون زواياه قوائم يكون مستطيلًا. لذا تكون بعض متوازيات الأضلاع مستطيلات، وأما بعضها الآخر الذي زواياه ليست قوائم فلا تكون مستطيلات.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس 1–5 إلى 4–5. وكتابة تخمين عن النتيجة التي يتم التوصل إليها من رسم الأقطار في معين أو مربّع. يبين الدرس 4–5 أنه إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً فإنّ القطرين متطابقان ولأن الدرس 4–5 يركز على طول القطر، فإنّ الخطوة التالية هي التركيز على الزوايا الناتجة عن تقاطع القطرين. ومن التخمينات الممكنة أن قطري المعين أو المربّع متعامدان.

5-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5

استعمال خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو / و مستطيلاً.

الدرس 5-5

تعرّف خصائص المعين والمربّع وتطبيقها.

تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً أو معينًا أو مربعًا.

ما بعد الدرس 5-5

تعرّف خصائص شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية وتطبيقها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- لماذا يمكن أن يصنّف كل من المعين والمربع أيضًا على أنه متوازي أضلاع متطابق الأضلاع؟ لأن الأضلاع الأربعة في كل منهما متطابقة والأضلاع المتقابلة متوازية.
- بأي طريقة يمكنك تصنيف المعين والمربّع؟ المعين متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة، والمربع معين زواياه قائمة.
- هل من الممكن أن يكون للمعين زاوية قائمة واحدة فقط؟ زاويتان قائمتان؟ وضح تبريرك. لا يمكن أن تكون للمعين زاوية قائمة واحدة فقط. لأن الأضلاع المتقابلة متطابقة، ولذلك فالزوايا المتقابلة متطابقة أيضًا، ولا يمكن أن يكون للمعين زاويتان قائمتان فقط، لأن مجموع قياسي هاتين الزاويتين °180. ولذلك سيكون مجموع قياسي الزاويتين المتبقيتين °180. وعلى ذلك، يمكن أن تكون زوايا المعين الأربع قائمة. عندئذ يكون مربّعًا، أو لا يمكن أن تكون أي من زواياه قائمة.

5-5 المعيّن والمربع
Rhombus and Square

لماذا؟

تُعبأ بعض أنواع الفواكه والخضراوات في أكياس مصنوعة من شباكٍ على هيئة معيّنات. وتستعمل شباكٌ مشابهةٌ في مرمى كرة القدم وحاجز كرة اليد. فالمعيّن والمربّع نوعان من متوازيات الأضلاع المتطابقة الأضلاع.

فيما سبق:

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

والآن:

- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

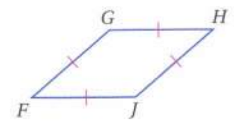
المفردات:

المعيّن
rhombus

المربّع
square

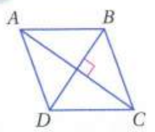
www.obeikaneducation.com

خصائص المعيّن والمربّع:



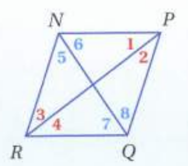
المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين:

نظريات — قطرا المعيّن (أضف إلى مطويتك)



5.15 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ قطريه متعامدان.

مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

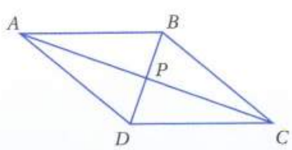


5.16 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.

مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$

سوف تبرهن النظرية 5.16 في السؤال 28

برهان — نظريّة 5.15



المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

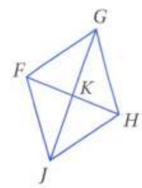
برهان حرّ:

بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ بحسب التعريف.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle APB \cong \triangle CPB$ بحسب SSS.
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle APB \cong \angle CPB$.
وكذلك $\angle APB$, $\angle CPB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (45)	• تنويع التعليم ص (49 ,46 ,45)	• تنويع التعليم ص (49 ,46)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (8)	• كتاب التمارين ص (8)	• كتاب التمارين ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

مثال 1 استعمال خصائص المعيّن



استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبين جانبًا.

a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2}\, m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ حسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) جبر: إذا كان $GH = x + 9$, $JH = 5x - 2$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

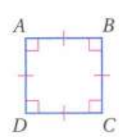
تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ. 12

1B) جبر: إذا كان $m\angle KFG = (9y - 5)°$, $m\angle JFK = (6y + 7)°$، فأوجد قيمة y. 4

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا.



المربع $ABCD$

إرشادات للدراسة

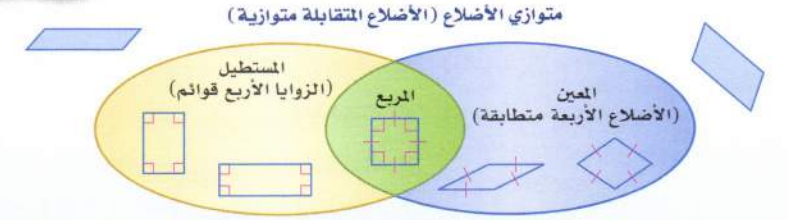
المربّع والمعيّن
كل مربّع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا.

ويلخص شكل فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع.

ملخص المفهوم — متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

متوازي الأضلاع (الأضلاع المتقابلة متوازية)



خصائص المعين والمربّع

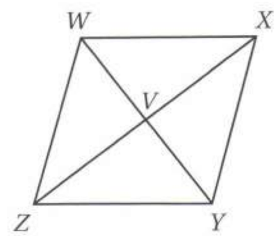
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص المعين جبريًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 يتقاطع قطرا المعين $WXYZ$ عند النقطة V. استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد كل مما يأتي:



a) إذا كان $m\angle WZX = 39.5°$، فأوجد $m\angle ZYX$.
$m\angle ZYX = 101°$

b) جبر: إذا كان $WX = 8x - 5$ و $WZ = 6x + 3$، فأوجد قيمة x. 4

إرشادات للمعلم الجديد

المربّع: بما أن المربع متوازي أضلاع ومعين، فإن جميع خصائص متوازي الأضلاع والمعين تنطبق على المربّع.

جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

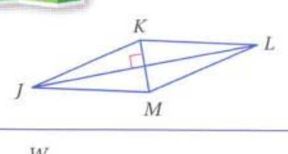
إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

تنبيه!

أخطاء شائعة
النظريات 5.17, 5.18, 5.19 صحيحة فقط إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

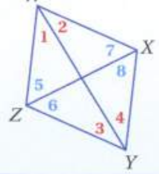
نظريات — الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

أضف إلى مطويتك



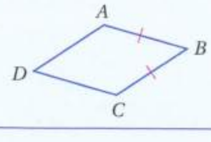
5.17 **إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن.** (عكس النظرية 5.15)

مثال: إذا كان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ ، فإنّ $\square JKLM$ معيّن.



5.18 **إذا نصّف قطر متوازي أضلاع كلًا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا.** (عكس النظرية 5.16)

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\angle 3 \cong \angle 4$ ،
أو $\angle 5 \cong \angle 6$ ، $\angle 7 \cong \angle 8$ ،
فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.



5.19 **إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه معيّن.**

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، فإنّ $\square ABCD$ معيّن.

5.20 **إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.**

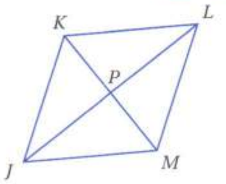
سوف تبرهن النظريات 5.17 إلى 5.20 في الأسئلة 32–29 على الترتيب

يمكنك استعمال خصائص المعيّن والمربع في البراهين.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة
بما أن للمعيّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.

مثال 2 استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين



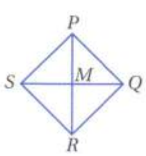
اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.
$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.

برهان حرّ:

بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$ ، لذا وبحسب النظرية 5.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.



تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا حرًّا. انظر الهامش.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$.
$\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$.
$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربّع

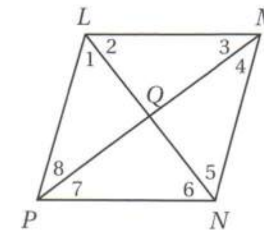
تبيّن **الأمثلة 4-2** كيفية استعمال خصائص المعين أو المربع في البراهين.

مثال إضافي

2 اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $LMNP$ متوازي أضلاع، $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 6 \cong \angle 2$

المطلوب: $LMNP$ معين.

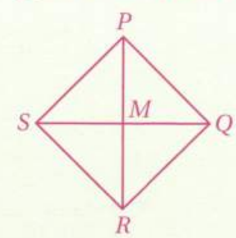


$\overline{LN}$ تنصّف $\angle L$ و $\angle N$؛ لذلك وحسب النظرية 5.18 يكون $LMNP$ معينًا.

إجابة (تحقق من فهمك):

2) **المعطيات:** $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$ ، $\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$.
$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.



برهان حرّ:

بما أنّ $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$ فإنّ $\overline{QS} \perp \overline{PR}$ و $\overline{MP} \cong \overline{MR}$ حسب التعريف. وبما أنّ $\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$ ، فإن $\overline{MS} \cong \overline{QM}$. وبما أن $\triangle RMS$ متطابق الضلعين فإن $\overline{MS} \cong \overline{MR}$ حسب التعريف. وبالتعويض تكون $\overline{MS} \cong \overline{MP}$. إذن وبحسب تعريف التطابق وخاصية التعدّي يكون $MS=MP=QM= MR$. ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن، $MS + MQ = SQ$ و $MP + MR = PR$. وبالتعويض يكون $MS + MS = SQ$ و $MS + MS = PR$ ، إذن $SQ = PR$. لذلك وحسب تعريف التطابق يكون $\overline{SQ} \cong \overline{PR}$. ولأن قطري $PQRS$ ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $PQRS$ متوازي أضلاع. ولأنّ القطرين متطابقان فإن $\square PQRS$ مستطيل. ولأنّ القطرين متعامدان فإنّ $\square PQRS$ معين. ولأنّ $\square PQRS$ مستطيل ومعين فإنّه مربّع.

تنبيه!

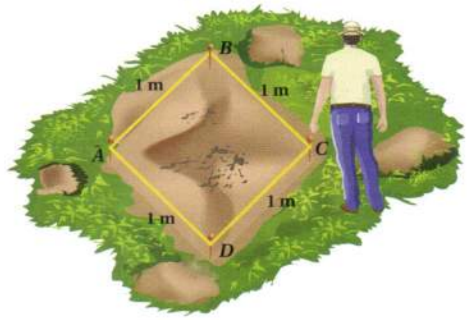
المعين: لا تطبق النظريات 5.17–5.19 إلا إذا كان الشكل متوازي أضلاع.

الربط مع الحياة

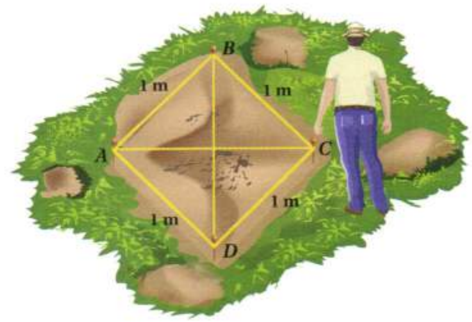
علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المعيّن والمربع

علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه 1 m؟



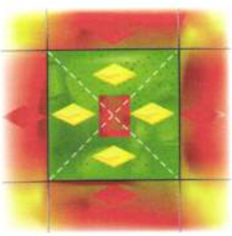
طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي 1 m. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $\square ABCD$ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 5.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا إذا قاس عالم الآثار طولي الحبلين اللذين يمثلان الوترين فوجدهما متساويين، فإن $\square ABCD$ يكون مربّعًا.

تحقق من فهمك

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضح إجابتك.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربع؟ وضح إجابتك.

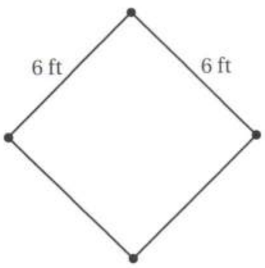
3A) لا؛ لا يمكن التوصل لهذا الاستنتاج إلا إذا علمت أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

3B) نعم؛ إذا كانت الزوايا الأربع متطابقة فسيكون قياس كل واحدة منها $360° \div 4$ أو $90°$ وعليه تكون الزوايا المتقابلة متطابقة وتكون القطعة الخضراء متوازي أضلاع. وإذا كان قياس كل زاوية $90°$ فإن للشكل الرباعي أربع زوايا قوائم، وعليه تكون القطعة الخضراء مستطيلًا، وإذا كان الضلعان المتتاليان متطابقين فستكون أيضًا مربعًا.

استعملت في الفصل 3 الهندسة الإحداثيّة لتصنيف المثلثات. ويمكن استعمال الهندسة الإحداثية لتصنيف الأشكال الرباعية أيضًا.

مثال إضافي

3 بستنة: يقيس هاني حدود حوض أزهار جديد. ويرغب في أن يكون مربّعًا. لذا وضع أوتاد الأركان بحيث يبعد بعضها عن بعض 6 ft. ما الذي يحتاج إلى معرفته أيضًا ليكون متأكّدًا من أن الحوض مربّعًا؟



بما أنّ الأضلاع المتقابلة متطابقة فإنّ الحوض متوازي أضلاع. ولأن الأضلاع المتجاورة متطابقة فإنّ الحوض معين.
ويحتاج هاني إلى معرفة ما إذا كان القطران متطابقين. فإذا كانا كذلك، فالحوض مستطيل. وحسب النظرية 5.20 فإن الحوض مربّع.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإنتاج تسجيل مرئي يصفون فيه خصائص المعين والمربّع. تأكد من أنهم ذكروا جميع خصائص هذين الشكلين بما في ذلك الخصائص المشتركة مع متوازي الأضلاع.

تنويع التعليم

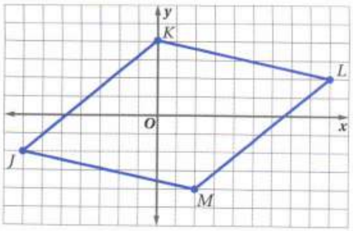
دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: قد لا يُدرك بعض الطلاب أن قطري المعين متعامدان، لذا اطلب إلى مجموعات من الطلبة أن يقصّوا أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة، وتأكد من أن مثلثات كل مجموعة تختلف عن مثلثات المجموعات الأخرى، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يضعوا المثلثات متجاورة بحيث تلتقي رؤوس الزوايا القائمة للمثلثات الأربعة لتشكل معينًا. وأخيرًا اطلب إلى كل مجموعة عرض نتيجتها على طلاب الصف.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

افهم: عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.



يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

خطط: إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

حل: أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $2\sqrt{17} \neq 4\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا.
وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM}$: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل $\overline{JL}$: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق:

$$JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$$

$$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$$

لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 5.20 .

ميل $\overline{JK}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{0-(-7)}$ أو $\frac{6}{7}$، وميل $\overline{KL}$ يساوي $\frac{2-4}{9-0}$ أو $-\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✓

إرشادات للدراسة

تمثيل الشكل بيانيًا
عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًا.

✓ تحقق من فهمك

4) حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

4) مربع ومعيّن ومستطيل ؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قائمة.

مثال إضافي

حدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ معينًا أو مستطيلاً أو مربّعًا حيث $A(-2, -1)$، $B(-1, 3)$، $C(3, 2)$، $D(2, -2)$. اكتب جميع ما ينطبق عليه. وفسر إجابتك.

$AC = \sqrt{34}$ ، و $BD = \sqrt{34}$ ، وميل $\overline{AC}$ يساوي $\frac{3}{5}$، وميل $\overline{BD}$ يساوي $-\frac{5}{3}$.
وبما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{BD}$ فإنّ القطرين متعامدان. وبما أن طول $\overline{AC}$ يساوي طول $\overline{BD}$ فإن $ABCD$ معين ومستطيل ومربّع.

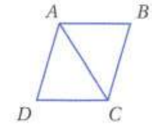
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يتخيلوا أنهم يعملون في محل لإطارات الصور والمناظر، وأن أحد الزبائن طلب إطارًا من أربع قطع خشبيّة متطابقة. اكتب وصفًا يستعمل للتأكد من كون الإطار مربعًا بالاعتماد على القطرين.
إجابة ممكنة: قس القطرين. إذا كان القطران ينصف كل منهما الآخر فإنّ الإطار متوازي أضلاع، وإذا كان للقطرين الطول نفسه فإنه يكون مستطيلاً، ثم قِس الزوايا المتكونة من تقاطع القطرين، فإذا كان القطران متعامدين فإنّ الإطار مربّع.

تأكـد

مثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.

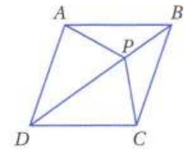


1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$. $57°$

2) إذا كان $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$، فأوجد CD. 11

المثالان 2, 3

3) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معينًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$. انظر الهامش.



4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة متطابقة. استعمل هذ المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة. انظر الهامش.

مثال 4 **هندسة إحداثية:** حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

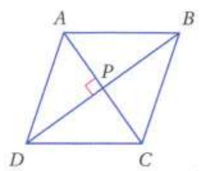
6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

5) مستطيل ومعيّن ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

6) لا شيء ; لأن قطريه غير متعامدين وغير متطابقين.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.



7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC. 14

8) إذا كان $m\angle BCD = 118°$، فأوجد $m\angle BAC$. $59°$

9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC. 28

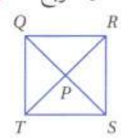
10) إذا كان $m\angle ABC = (2x - 7)°$ و $m\angle BCD = (2x + 3)°$، فأوجد $m\angle DAB$. $95°$

11) إذا كان $m\angle DPC = (3x - 15)°$، فأوجد قيمة x. $35°$

مثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

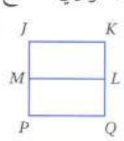
12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع. $\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90°$

المطلوب: $QRST$ مربّع. انظر ملحق الإجابات

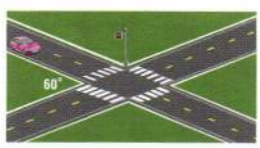


13) **المعطيات:** $JKQP$ مربّع. $\overline{ML}$ تنصّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.

المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع. انظر ملحق الإجابات



14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك. انظر الهامش .



مثال 3 15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضح تبريرك. انظر الهامش .

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6-1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

3) **المعطيات:** $ABCD$ معين فيه $\overline{BD}$ قطر.

المطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$

العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ معين فيه $\overline{DB}$ قطر (معطى)

2) $\angle ABP \cong \angle CBP$ (قطرا المعين ينصّفان زواياه)

3) $\overline{PB} \cong \overline{PB}$ (خاصيّة الانعكاس)

4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (تعريف المعين)

5) $\triangle APB \cong \triangle CPB$ (SAS)

6) $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

4) إجابة ممكنة: بما أن كل ضلع من أضلاع الأرضية طوله 8 بلاطات، وكل البلاطات متطابقة، فإنّ أطوال الأضلاع الأربعة للأرضية متساوية ولأننا نعلم أن الأشكال الرباعية التي تكوّن أركان الأرضية مربّعة، فإن قياس كل زاوية عند رؤوس الأرضية يساوي $90°$. لذلك فالأرضية مربّعة.

14) معين؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية المتكونة بين الشارعين $60°$، والزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان، لذلك فقياس إحدى زوايا الشكل الرباعي $29°$. وبما أنّ لممرّي المشاة الطول نفسه فإنّ أضلاع الشكل الرباعي متطابقة، لذلك فإنّها تشكل معينًا.

15) لا؛ إجابة ممكنة: بما أنّ الأضلاع الأربعة للشكل الرباعي متطابقة وقطريه متعامدان، فإن الشكل مربع أو معين. وللتحقق من أن الحقل مربع يحتاج المزارع إلى إثبات أن القطرين متطابقان.

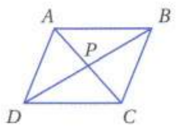
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون: دون المتوسط	40-53 ، 38 ، 37 ، 7-19
ضمن: ضمن المتوسط	7-33 فردي ، 35-38 ، 40-53
فوق: فوق المتوسط	20-50 ، (اختياري: 51-53)

مثال 4 **هندسة إحداثيّة :** حدد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

(16 $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$ **(17** $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$

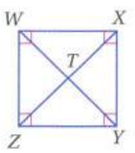
(18 $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$ **(19** $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$



في المعين **ABCD** ، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24°$ ، فأوجد كلًا مما يأتي :

(20 AP 9 **(21** CP 9

(22 $m\angle BDA$ 24° **(23** $m\angle ACB$ 66°



في المربع **WXYZ**، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

(24 ZX 6 **(25** XY $3\sqrt{2}$

(26 $m\angle WTZ$ 90° **(27** $m\angle WYX$ 45°

برهان : اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي : 32–28) انظر ملحق الإجابات

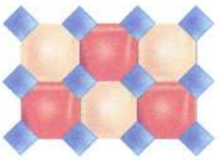
(28 النظريّة 5.16 **(29** النظريّة 5.17 **(30** النظريّة 5.18

(31 النظريّة 5.19 **(32** النظريّة 5.20

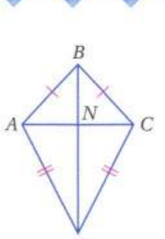
برهان : اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين : 34 ,33) انظر ملحق الإجابات

33) قطرا المربّع متعامدان.

34) تشكّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



35) **تصميم :** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضح تبريرك. انظر ملحق الإجابات



36) **تمثيلات متعدِّدة :** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.

a) هندسيًا : ارسم ثلاثة أشكال طائرة ورقية أطوال أضلاعها مختلفة وسمِّها $ABCD, PQRS, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N. انظر ملحق الإجابات

b) جدوليًا : استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس. وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$	0.8 cm	0.8 cm	0.9 cm	1.5 cm
$PQRS$	1.2 cm	1.2 cm	0.3 cm	0.9 cm
$WXYZ$	0.2 cm	0.2 cm	1.1 cm	0.4 cm

c) لفظيًا : اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

إجابة ممكنة: القطر الأطول في شكل الطائرة الورقية ينصّف القطر الآخر.

16) معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

17) معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

18) لا شيء؛ لأن قطريه غير متطابقين وغير متعامدين.

19) مربع ومستطيل ومعيّن؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم.

الربط مع الحياة

الفسيفساء صور تُشكل باستعمال أنماط من أحجار أو زجاج أو قرميد أو أي مواد أخرى. والفسيفساء في الصورة أعلاه فسيفساء إغريقيّة قديمة من الصخر البلوري (الكوارتز). استعمل الإغريق قطعًا صغيرة أو أشكالًا منتظمة من المواد منذ 200 سنة قبل الميلاد بدلًا من الصخر البلوري في أعمال الفسيفساء.

كتاب التمارين، ص (8)


5-5 المعيّن والمربع

في المعين $PRYZ$ ، إذا كان $RK = 5, RY = 13, m\angle YRZ = 67°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

1) KY 12

2) PK 12

3) $m\angle YKZ$ 90

4) $m\angle PZR$ 67

في المعين $MNPQ$ ، إذا كان $PQ = 3\sqrt{2}, AP = 3$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

5) AQ 3

6) $m\angle APQ$ 45

7) $m\angle MNP$ 90

8) PM 6

هندسة إحداثية، حدِّد ما إذا كان $\square BEFG$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضح إجابتك.

9) $B(-9, 1), E(2, 3), F(12, -2), G(1, -4)$

10) $B(1, 3), E(7, -3), F(1, -9), G(-5, -3)$

11) $B(-4, -5), E(1, -5), F(-2, -1), G(-7, -1)$

12) تبليط:

8

تنبيه لحل سؤال

المسطرة والفرجار : يتطلب السؤال 36 استعمال المسطرة والفرجار.

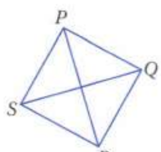
تمثيلات متعدِّدة : في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والأوصاف اللفظية لاستقصاء خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

48 الفصل 5 الأشكال الرباعية

كلاهما خطأ ؛ إجابة ممكنة :
نهما لا يعلمان أن أضلاع الشكل
عي متطابقة ، فلا يمكن استنتاج
شكل مربع أو معيّن.

إجابة ممكنة:
$(0, 0), (6, 0), (0, 6), (6$ ؛
ران متعامدان، لذا فإن أي أربع
تبعد البعد نفسه عن نقطة تقاطع
رين تشكّل رؤوس مربع .

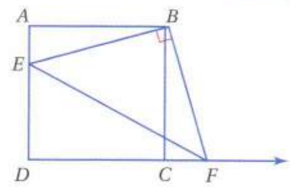
مسائل مهارات التفكير العليا



37) اكتشف الخطأ: في الشكل الرباعي $SRQP$ المبين جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$. قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن. هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

38) تبرير: حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأ؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.

إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا فإنّه مستطيل. انظر ملحق الإجابات



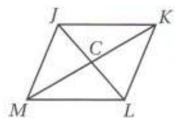
39) تحدّ: مساحة المربّع $ABCD$ تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$. 2

40) مسألة مفتوحة: أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

41) اكتب: قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية: متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع. انظر ملحق الإجابات

تدريب على الاختبار المعياري

42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$، فأوجد JC. **B**



A 4   **C** 8

B 6   **D** 10

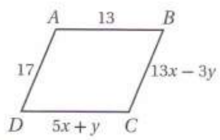
43) جبر: ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **H**

F $x = 3, y = 2$

G $x = \frac{3}{2}, y = -1$

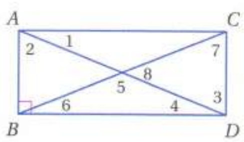
H $x = 2, y = 3$

J $x = 3, y = -1$



مراجعة تراكمية

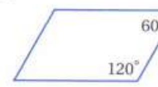
في المستطيل $ABDC$، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية : (الدرس 5-4)



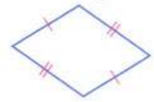
44) $m\angle 2$ $52°$ **45)** $m\angle 5$ $104°$ **46)** $m\angle 6$ $38°$

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك. (الدرس 5-3) 47–49) انظر الهامش.

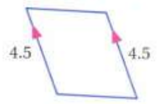
47)



48)



49)



50) قياسات: قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft. فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك. (الدرس 5-4) انظر الهامش.

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي :

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$ 2

52) $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ $\frac{3}{4}$

53) $\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$ $\frac{5}{4}$

4 التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يلاحظوا ملخص المفاهيم ويدرسوه، وأن يكتبوا استنتاجًا حول تشابه واختلاف بين المفهوم السابق للمستطيل والمفاهيم الحالية لكل من المعين والمربّع.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 4–5 و 5–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

47) لا؛ الشكل لا يحقق أيًّا من شروط متوازي الأضلاع.

48) نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

49) نعم؛ يوجد ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان.

50) لا؛ تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين لمثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. وبما أنّ $45 = 23 + 22$، فإنّ أطوال أضلاع حديقة منزل مروان لا يمكن أن تكون 22 ft، 23 ft، و45 ft.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: للسؤال 37، يجب أن يدرك الطلاب أنه مع أن قطري المربع متطابقان، إلا أنّ هذه الحقيقة وحدها غير كافية لإثبات أن الشكل الرباعي مربّع. فقطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقان وجميع المستطيلات أقطارها متطابقة حسب النظرية 5.14 .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا قصّة أطفال مبنيّة على الفكرة الآتية: المربّعات مجموعة خاصّة جدًّا لأن شروط قبول عضو في "مجموعة المربعات" شروط مشدّدة جدًا. وتتوسع مجموعة المربّعات بتسهيل شروط العضوية وذلك بتقليل عدد الشروط الضرورية لعضوية المجموعة.

5-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-6

استعمال خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

الدرس 5-6

تطبيق خصائص شبه المنحرف.

تطبيق خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

ما بعد الدرس 5-6

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما الخصائص التي تميز شبه المنحرف عن متوازي الأضلاع؟ لشبه المنحرف ضلعان فقط متوازيان.
- لماذا تكون منصات الوثب أكثر ثباتًا عندما تكون على شكل شبه منحرف مما لو كان على شكل مستطيل؟ إحدى القاعدتين أكثر اتساعًا من الأخرى؛ لذلك تكون إمكانية ميلها عندما تكون على شكل شبه منحرف أقل مما لو كانت على شكل مستطيل بالارتفاع نفسه.
- انظر إلى صناديق القفز الخمس المتداخلة في الشكل. ما التخمينات التي يمكنك وضعها حول زوايا أشكال شبه المنحرف الظاهرة في المنظر الجانبي لكل صندوق؟ الزوايا المتناظرة لأشباه المنحرفات الخمس ستكون مطابقة لزوايا القاعدة العليا للشكل أدناه. لذلك فأشباه المنحرفات المكونة لأطراف صندوق القفز ستكون متشابهة.

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة
Trapezoid and Kite

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

والآن:

- أُطبّق خصائص شبه المنحرف.
- أُطبّق خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

المفردات:

شبه المنحرف trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف bases

ساقا شبه المنحرف legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة base angles

شبه المنحرف المتطابق الساقين isosceles trapezoid

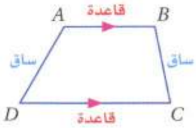
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة kite

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.



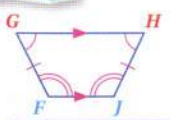
خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكونتان من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبين جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$ ، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

نظريات — شبه المنحرف متطابق الساقين

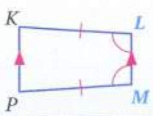
أضف إلى مطويتك

5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.



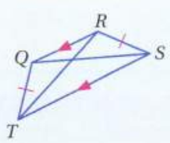
مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle G \cong \angle H$ ، $\angle F \cong \angle J$.

5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنه متطابق الساقين.



مثال: إذا كانت $\angle L \cong \angle M$ فإنّ شبه المنحرف $KLMP$ متطابق الساقين.

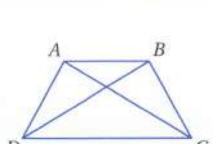
5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.



مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{QS} \cong \overline{RT}$. وكذلك إذا كان $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ فإنّ شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين.

سوف تبرهن النظريات 5.23 , 5.22 , 5.21 في الأسئلة 21 ,20 ,19 على الترتيب

برهان — الحالة الأولى من النظريّة 5.23



المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $AC \cong BD$

$ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين. — معطى

$\angle ADC \cong \angle BCD$ — زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان.

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ — تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين

$\overline{DC} \cong \overline{CD}$ — خاصية الانعكاس للتطابق

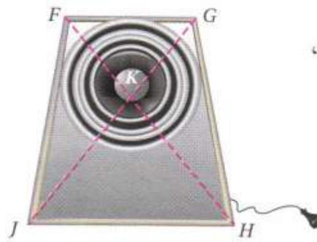
$\triangle ADC \cong \triangle BCD$ — SAS

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ — ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

مصادر الدرس 5-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (54)	• تنويع التعليم ص (52, 54, 56)	• تنويع التعليم ص (52, 56)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (9)	• كتاب التمارين ص (9)	• كتاب التمارين ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين



مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\,in, JG = 19\,in$ ، فأوجد كل مما يأتي :

a) $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle FJH$ و $\angle GHJ$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

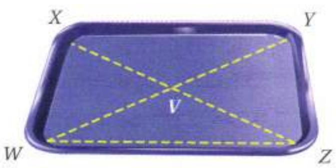
$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85° = 180°$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95°$	بطرح 85 من كلا الطرفين

b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11\text{ cm}$	بطرح 8 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك



1) مطاعم: لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعمٍ أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 45°, WV = 15\text{ cm}$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

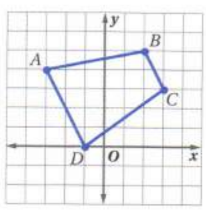
A) $m\angle XWZ$ $45°$ **B)** $m\angle WXY$ $135°$

C) XZ 25 cm **D)** XV 10 cm

يمكنك استعمال الهندسة الإحداثيّة لتحديد ما إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين أم لا .

مثال 2 شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$. بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.

إرشادات للدراسة

شبه المنحرف المتطابق الساقين
تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.

الربط مع الحياة

مكبّرات الصوت هي مضخّمات تُكثّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.

خصائص شبه المنحرف

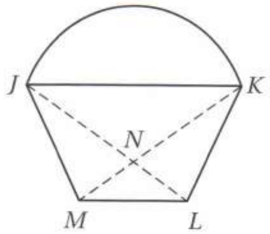
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية استعمال النظريات لإثبات أو معرفة أن شكلًا هندسيًّا ما هو شبه منحرف.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

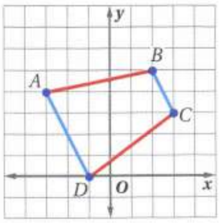
مثال إضافي

1 سلّة: كل جانب للسلّة المبيّنة أدناه شبه منحرف متطابق الساقين إذا كان $m\angle JML = 130°$ ، $KN = 6.7\text{ ft}$ و $MN = 3.6\text{ ft}$، فأوجد كل قياس مما يلي:



a) $m\angle MJK$ $50°$

b) JL 10.3 ft



الضلعان المتقابلان $\overline{BC}$ ، $\overline{AD}$:

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2} = -2$

بما أن ميلي $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$ متساويان، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{AB}$ ، $\overline{DC}$:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$: $\frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{DC}$ ، $\overline{AB}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.

تحقق من فهمك

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟ **شبه منحرف ليس متطابق الساقين**

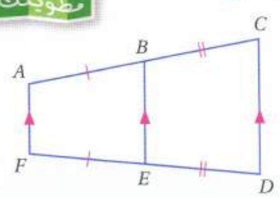
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

نظرية 5.24 نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

مثال: **إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف** $ACDF$ ، **فإنّ** $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$ ، $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.



سوف تبرهن النظريّة 5.24 في السؤال 25

قراءة الرياضيات

رمز التوازي تذكّر أنّ الرمز $\parallel$ يعني يوازي، والرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

قراءة الرياضيات

القطعة المتوسطة تسمى القطعة المتوسطة لشبه المنحرف أيضًا القطعة المنصفة.

مثال إضافي

2 رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هــي $A(5, 1)$ ، $B(-3, -1)$، $C(-2, 3)$ ، $D(2, 4)$. بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

الخطوة 1: ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{1}{4}$ ،
ميل $\overline{CD}$ يساوي $\frac{1}{4}$ ،
ميل $\overline{AD}$ يساوي -1 ،
ميل $\overline{BC}$ يساوي 4 ،
وبما أن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ متساويان، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. أي أن ضلعين فقط في الشكل متوازيان. لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

الخطوة 2: $BC = \sqrt{17}$ ، $AD = \sqrt{18}$ ، وبما أن الساقين ليسا متطابقين فإن شبه المنحرف ليس متطابق الساقين.

تنبيه!

هندسة إحداثية: عند استعمال صيغة الميل أو المسافة بين نقطتين؛ انتبه إلى إشارات الأعداد وتأكد أيضًا من استعمال قيم x و y بالترتيب الصحيح.

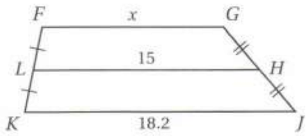
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: توجد عدّة كلمات تحمل أكثر من معنى في الرياضيات، فكلمة متوسط يمكن أن تطبّق في الهندسة أو الإحصاء، لذا اطلب إلى الطلاب مقارنة معاني "متوسط" عندما تطبق في المثلث وفي شبه المنحرف. واطلب إليهم أيضًا أن يكتبوا معنى كلمة متوسط لمجموعة من الأعداد؛ فالمتوسط (أو القطعة المتوسطة) لمثلث أو شبه منحرف تربط بين نقطة منتصف قطعة مستقيمة ونقطة أخرى على الشكل، إلا أن الفرق بينهما هو أن القطعة المتوسطة لمثلث أحد طرفيها رأس المثلث، أما بالنسبة إلى شبه المنحرف فإنها تصل بين منتصفي الساقين، أما المتوسط لمجموعة من الأعداد فهو مجموعها مقسومًا على عددها.

مثال 3 من الاختبار المعياري

إجابة شبكيّة: في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة المتوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



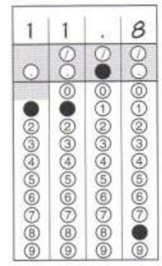
اقرأ سؤال الاختبار

أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$	نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$	بالتعويض
$30 = x + 18.2$	بضرب كلا الطرفين في 2
$11.8 = x$	بطرح 18.2 من كلا الطرفين

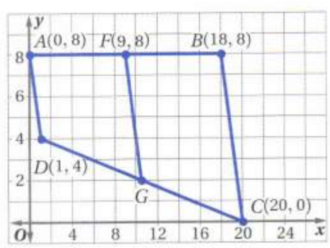
دوّن الإجابة في النموذج



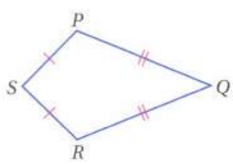
- يمكنك تدوين الإجابة العددية بوضع الرقم الأول في مربع الإجابة الأيسر، أو بوضع الرقم الأخير في مربع الإجابة الأيمن.
- لا تترك مربّعات إجابة فارغة في الوسط.
- ظلّل دائرة واحدة فقط لكل مربّع إجابة. وتأكد أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في مربع الإجابة. كما لا تظلّل دائرة تحت مربع إجابة خالٍ.

تحقق من فهمك

3) **إجابة شبكيّة:** في متوازي الأضلاع $ABCD$ أدناه، $\overline{FG}$ توازي $\overline{AD}$، ما الإحداثي x للنقطة G؟ **10.5**



خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.

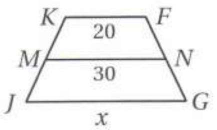


إرشادات للاختبار

الإجابات الشبكيّة في الاختبارات المعيارية، إذا كانت الإجابة عددًا نسبيًّا، فيمكنك تدوينها في نموذج الإجابة الشبكية بأكثر من طريقة. فمثلًا يمكن تدوين الإجابة $\frac{8}{5}$ على الصورة 8/5 أو 1.6، ولكن لا يمكن تدوينها على الصورة $1\frac{3}{5}$

مثال إضافي

3 مثال من اختبار معياري: في الشكل أدناه، $\overline{MN}$ هي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟ 40



إرشادات للمعلم الجديد

شبه المنحرف: إذا عرِّف شبه المنحرف على أنّه شكل رباعي فيه ضلعان على الأقل متوازيان، فإن متوازي الأضلاع يكون حسب هذا التعريف حالة خاصّة لشبه المنحرف.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: أنشئ جدولًا من 7 أعمدة، وعنونها كالآتي: شكل رباعي، متوازي أضلاع، مستطيل، معين، مربع، شكل طائرة ورقية، شبه منحرف. اعرض أمثلة لكل منها على السبورة، واختر طلابًا لسحب كل شكل إلى العمود الذي يحمل الاسم الأكثر تحديدًا، وساعد الطلاب على تحديد العمود الأنسب إذا اعتقدوا أنّ شكلًا ما يمكن وضعه في أكثر من عمود.

المحتوى الرياضي

تصنيف المعين: يحقق المعين خصائص شكل الطائرة الورقيّة الآتية:

1) فيه زوجان مختلفان من الأضلاع المتتالية متطابقة.
2) قطراه متعامدان.
3) أحد قطريه عمود منصّف للقطر الآخر.
4) أحد قطريه ينصف زوجًا من الزوايا المتقابلة.
5) فيه زاويتين متقابلتين متطابقتين.

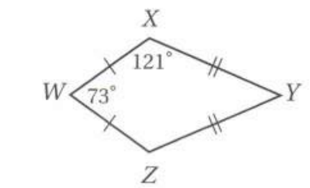
لذلك يمكن أن يصنف المعين على أنه شكل طائرة ورقيّة خاصّة.

خصائص شكل الطائرة الورقيّة

المثال 4 يبين كيفية استعمال النظريات والخصائص لإثبات أو تحديد أن شكلًا هندسيًّا ما هو شكل طائرة ورقيّة.

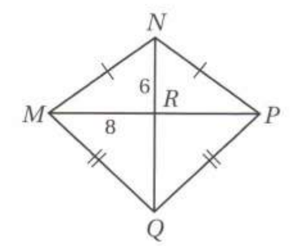
مثال إضافي

4 a) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة فأوجد $m\angle XYZ$.



$45°$

b) إذا كان $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة فأوجد NP.



10

المحتوى الرياضي

شكل الطائرة الورقيّة: توجد ثلاث خصائص إضافية لشكل الطائرة الورقيّة:

1) الزاويتان المحصورتان بين الأضلاع غير المتطابقة لشكل الطائرة الورقية متطابقتان دائمًا.
2) القطر الذي يصل رأسي الزاويتين غير المتطابقتين يكون دائمًا عمودًا منصّفًا للقطر الذي يصل رأسي الزاويتين المتطابقتين.
3) القطر الذي يصل رأسي الزاويتين غير المتطابقتين ينصّف كل منهما.

إرشادات للدراسة

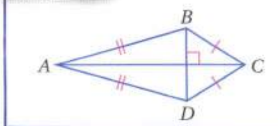
شكل الطائرة الورقيّة الزاويتان المتطابقتان في شكل الطائرة الورقية هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

نظريات — شكل الطائرة الورقيّة

أضف إلى مطويتك

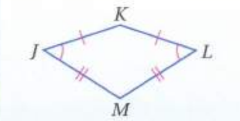
5.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.

مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة ، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$



5.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة.

مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle J \cong \angle L$ ، $\angle K \ncong \angle M$.

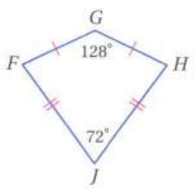


سوف تبرهن النظريتين 5.26 , 5.25 في السؤالين 23 ,22 على الترتيب

يمكنك استعمال النظريتين أعلاه ونظرية فيثاغورس ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقيّة.

مثال 4 استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

a) إذا كان $FGHJ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle F$.

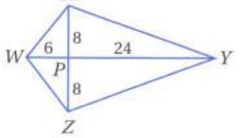


في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، وبما أن $\angle J \ncong \angle G$ ، فإنّ $\angle H \cong \angle F$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128 + m\angle F + 72 = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200 = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد ZY .



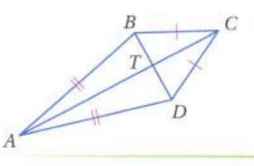
بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h. وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.

تحقق من فهمك



4A) إذا كان $m\angle BAD = 38°$ ، $m\angle BCD = 50°$ ، فأوجد $m\angle ADC$. $136°$

4B) إذا كان $BT = 5$ ، $TC = 8$ ، فأوجد CD. $\sqrt{89}$

تنويع التعليم

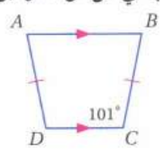
دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: يمكن أن يحدد الطلاب الأضلاع المتطابقة بالإضافة إلى الزوايا المتطابقة والزوايا غير المتطابقة لشكل الطائرة الورقيّة. اطلب إلى الطلاب طي قطعة ورق من المنتصف، واطلب إليهم قصها بشكل قطريٍّ بأي طول مبتدئين من أحد طرفي خط الطي، وتكرار العملية مبتدئين من الطرف الآخر لخط الطي حتى الوصول إلى نهاية القص الأول. ويمكن الآن أن يقارن الطلاب بين الزوايا والأضلاع المتطابقة وغير المتطابقة في الشكل الناتج. وأخيرًا اطلب إلى الطلاب قص أشكال طائرات ورقية ذات قياسات مختلفة لمعرفة صحة هذه الخصائص دائمًا.

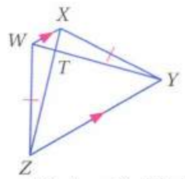
تأكـد

مثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$ 101°



2) WT، إذا كان: $ZX = 20, TY = 15$ 5

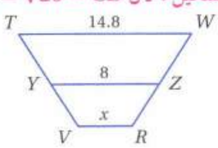


مثال 2 **هندسة إحداثيّة:** رؤوس الشكل الرباعي **ABCD** هي $A(-4,-1), B(-2,3), C(3,3), D(5,-1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ ؛ إذن $ABCD$ شبه منحرف .

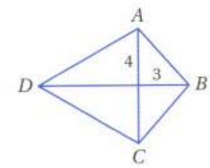
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضح إجابتك.
شبه منحرف متطابق الساقين ؛ لأن $AB = \sqrt{20} = CD$

مثال 3 **5)** **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x. 1.2

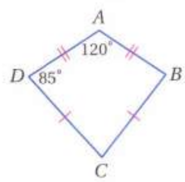


مثال 4 إذا كان **ABCD** على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB 5



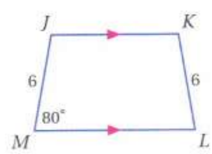
7) $m\angle C$ 70°



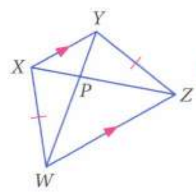
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$ 100°



9) PW، إذا كان: $XZ = 18, PY = 3$ 15



مثال 2 **هندسة إحداثيّة:** بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟ 13–10) انظر الهامش.

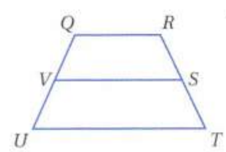
10) $A(-2,5), B(-3,1), C(6,1), D(3,5)$

11) $J(-4,-6), K(6,2), L(1,3), M(-4,-1)$

12) $Q(2,5), R(-2,1), S(-1,-6), T(9,4)$

13) $W(-5,-1), X(-2,2), Y(3,1), Z(5,-3)$

مثال 3 في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف **QRTU** .



14) إذا كان $QR = 12$, $UT = 22$ ، فأوجد VS. 17

15) إذا كان $VS = 9$, $UT = 12$ ، فأوجد QR. 6

16) إذا كان $RQ = 5$, $VS = 11$ ، فأوجد UT. 17

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–7 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزليّة للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

10) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}, \overline{AB} \nparallel \overline{CD}$؛ $ABCD$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}$, $CD = 5$.

11) $\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{KL} \nparallel \overline{JM}$؛ $JKLM$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $KL = \sqrt{26}$, $JM = 5$.

12) $\overline{QR} \parallel \overline{ST}, \overline{RS} \nparallel \overline{QT}$؛ $QRST$ شبه منحرف متطابق الساقين لأن $RS = \sqrt{50} = QT$.

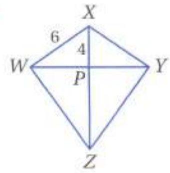
13) $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}, \overline{WX} \nparallel \overline{YZ}$؛ $WXYZ$ شبه منحرف ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $YZ = \sqrt{20}$, $WX = \sqrt{18}$.

تنويع الواجبات المنزلية

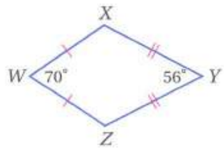
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-18 ، 47 ، 49-60
ضمن المتوسط	9-17 فردي ، 45–19 فردي ، 47 ، 49-60
فوق المتوسط	19-57 ، (اختياري: 58-60)

مثال 4 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

17) WP $2\sqrt{5}$



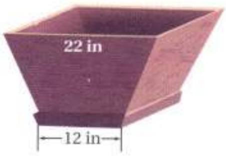
18) $m\angle X$ $117°$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية : 19–23) انظر ملحق الإجابات

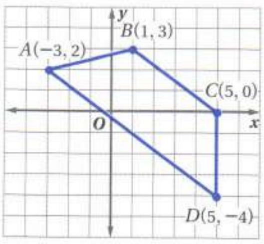
19) النظريّة 5.21 **20)** النظريّة 5.22 **21)** النظريّة 5.23

22) النظريّة 5.25 **23)** النظريّة 5.26



24) نباتات: اشترى مشاري أصيصًا زراعيًّا ليضعه في غرفته، ويريد أن يكون وجهه على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الصورة المجاورة. فإذا أراد أن يصنع رفًّا في الوسط لتستند إليه النباتات، فكم عرض هذا الرفّ؟ **17 in.**

25) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للنظريّة 5.24. انظر ملحق الإجابات



26) هندسة إحداثيّة: استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

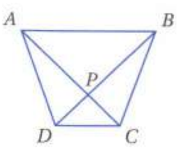
a) بين أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك. انظر الهامش

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك. انظر الهامش

c) أوجد طول القطعة المتوسطة. **7.5 وحدات**

الربط مع الحياة

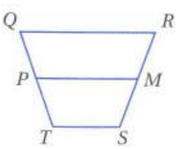
تمتاز الأصص الفخارية بالمسامية والتهوية وصرف المياه الزائدة، ما يسمح بنمو جيد للجذور، وهي من أفضل الأصص الزراعية.



جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف.

27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$ ، فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين. **15**

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)°$, $m\angle DAB = (2x + 33)°$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين. **11**



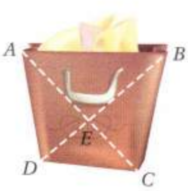
جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.

29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x. **2**

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x. **5**

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM. **20**

32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS. **8**

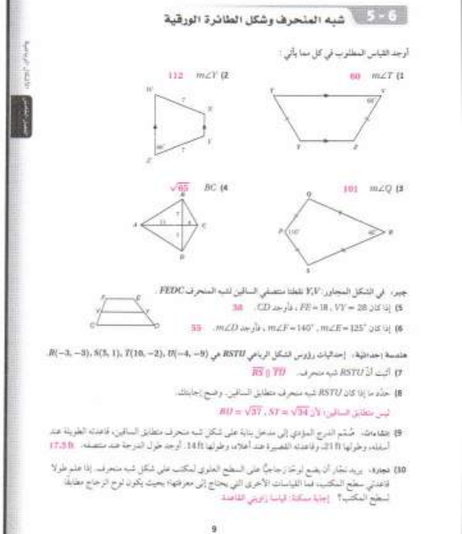


تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ **in**, $DB = 19$ **in** ، $m\angle ABE = 40°$, $m\angle EBC = 35°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

33) AE **10 in** **34)** AC **19 in**

35) $m\angle BCD$ **105°** **36)** $m\angle EDC$ **40°**

كتاب التمارين، ص (9)



5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

1) $m\angle T$ 60

2) $m\angle Y$ 112

3) $m\angle Q$ 101

4) BC $\sqrt{65}$

9

إجابات:

26a) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ إذن $ABCD$ شبه منحرف ولكنه غير متطابق الساقين لأن $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 4$.

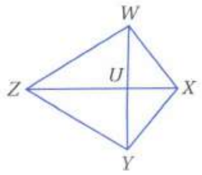
26b) لا، لأن هذا المستقيم لا يوازي قاعدتي شبه المنحرف، حيث إن ميل كل من القاعدتين $-\frac{3}{4}$، على حين أن ميل المستقيم $y = -x + 1$ يساوي -1 .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: تعلم الطلاب سابقًا بعض صيغ حساب المساحة. وبناءً على ذلك اطلب إليهم وصف كيف أن معرفة صيغة مساحة المستطيل كافية لاشتقاق صيغ مساحة المثلث والأشكال الرباعية الأخرى. ويمكنهم استعمال أمثلة لتوضيح تقسيم المضلعات، واستعمال طرائق أخرى لإيجاد المساحات المتناظرة والمساحات الكلية للمضلعات.

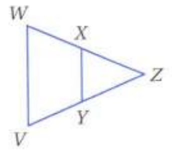
جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.



37) إذا كان $m\angle WXY = 120^\circ,\ m\angle WZY = (4x)^\circ$، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$. انظر الهامش

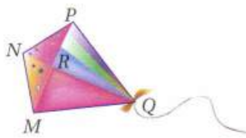
38) إذا كان $m\angle WXY = (13x + 24)^\circ,\ m\angle WZY = 35^\circ$، $m\angle ZWX = (13x + 14)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$. 105°

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



39) **المعطيات:** $\overline{XY}$، $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}, \angle W \cong \angle ZXY$ تنصّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.
المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين. انظر ملحق الإجابات

40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور. اكتب باستعمال خصائص الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$. انظر الهامش



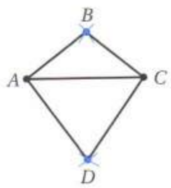
41) **أشكال فن:** ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف متطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها. انظر ملحق الإجابات

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مربع، أم معين، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضح إجابتك.

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

44) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة التناسب في شكل الطائرة الورقيّة.



a) **هندسيًّا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوّن الشكل الرباعي $ABCD$. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$. انظر الهامش

b) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	AB	0.8 cm	BC	0.8 cm	CD	1.6 cm	DA	1.6 cm
$PQRS$	PQ	1.4 cm	QR	1.4 cm	RS	1.8 cm	SP	1.8 cm
$WXYZ$	WX	0.4 cm	XY	0.4 cm	YZ	1.5 cm	ZW	1.5 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين:

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان. انظر ملحق الإجابات

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين. انظر ملحق الإجابات

42) متوازي أضلاع، لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة ولا يوجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

43) شكل رباعي ليس فيه أضلاع متوازية.

44c) إذا كان قطرا شكل رباعي متعامدين وليسا متطابقين وأحدهما فقط ينصّف الآخر، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقيّة.

تنبيه لحل سؤال

المسطرة: يتطلب السؤال 44 استعمال مسطرة.

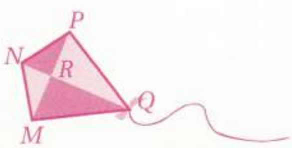
تمثيلات متعدّدة: في السؤال 44، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والأوصاف اللفظيّة لاستقصاء خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

إجابات:

40) إجابة ممكنة:

المعطيات: $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة

المطلوب: $\triangle MNR \cong \triangle PNR$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $MNPQ$ شكل طائرة ورقية. (معطى)

2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}, \overline{MQ} \cong \overline{PQ}$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)

3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$ (SSS)

5) $\angle MNR \cong \angle PNR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$ (خاصيّة الانعكاس)

7) $\triangle MNR \cong \triangle PNR$ (SAS)

37) $\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 5.26)؛ لذا

$m\angle ZYX = m\angle ZWX = 10x$

وعليه فإن: $m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

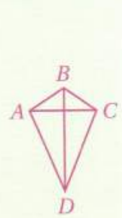
$10x + 120 + 10x + 4x = 360$

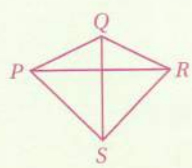
$24x + 120 = 360$

$x = 10$؛

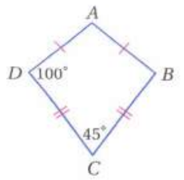
لذا $m\angle ZYX = 10x = 10(10) = 100^\circ$

44a) إجابة ممكنة:





مسائل مهارات التفكير العليا



47) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح إجابتك.

سعيد	عادل
$m\angle A = 45°$	$m\angle A = 115°$

47) عادل؛ $m\angle D = m\angle B$ ؛ لذا

$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$

$m\angle A + 100° + 45° + 100° = 360°$

أي أنّ: $m\angle A = 115°$

48) **تحدٍّ:** إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x - 8$ ، $y = x + 4$ ، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟ $y = x - 2$

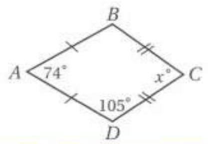
49) **تبرير:** هل العبارة "*المربع هو أيضًا شكل طائرة ورقيّة*" صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

50) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه المنحرف $ABCD$ وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ و $\overline{BD} \cong \overline{GJ}$. انظر ملحق الإجابات

51) **اكتب:** اذكر الخصائص التي يجب أن تتوفر في شكل رباعي كي يكون شبه منحرف أو شبه منحرف متطابق الساقين أو شكل طائرة ورقيّة. قارن بين خصائص هذه الأشكال الرباعيّة. انظر الهامش

تدريب على الاختبار المعياري

52) **إجابة شبكيّة:** إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟ $76°$

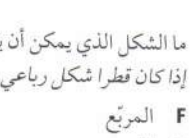


53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟ **J**
إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

F المربّع
G المعين
H متوازي الأضلاع
J شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-5)

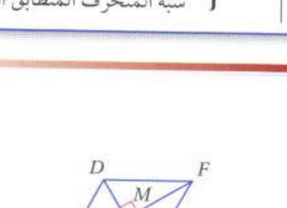


54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$. $31°$

55) إذا كان $MG = x + 6$ ، $DM = 4x - 3$ ، فأوجد DG . 18

56) إذا كان $HD = 15$ ، $HM = 12$ ، فأوجد MG . 9

57) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-3)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ،
$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$ انظر ملحق الإجابات

استعد للدرس اللاحق

اكتب عبارة تمثل ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$ 0

59) $(-x, 5x), (0, 6x)$ 1

60) $(y, x), (y, y)$ غير معرف

4 التقويم

هم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب
صف كل نوع من الأشكال الرباعيّة
تي درسوها في هذا الفصل وأن يكتبوا
قرة توضّح الفرق بين متوازي الأضلاع
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة،
أن يميّزوا أيضًا بين المستطيل والمعين
المربّع.

التقويم التكويني

حقق من فهم الطلاب للدرس 6–5
إعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 47، يجب أن يدرك الطلاب أنّ شكل الطائرة الورقيّة يحتوي زوجًا واحدًا فقط من الزوايا المتطابقة وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ فإنّ $\angle B \cong \angle D$ و $m\angle A = 115$ وبذلك تكون إجابة عادل هي الصحيحة.

إجابات:

49) غير صحيحة أبدًا، أضلاع المربع الأربعة متطابقة بينما لا يوجد ضلعان متقابلان في شكل الطائرة الورقية متطابقان.

51) يجب أن يكون للشكل الرباعي ضلعان فقط متقابلان متوازيان ليكون شبه منحرف، وإذا كان الساقان متطابقين يكون شبه المنحرف متطابق الساقين وإذا كان للشكل الرباعي زوجان فقط متتاليان متطابقان والأضلاع المتقابلة غير متطابقة يكون شكل الطائرة الورقية لكل من شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية 4 أضلاع، ولشبه المنحرف متطابق الساقين زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازنة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

زوايا المضلع (الدرس 5-1)

- يعطى مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدب بالصيغة $S = 180(n - 2)$، حيث n عدد الأضلاع .
- مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي °360.

خصائص متوازي الأضلاع : (الدرسان 5-2 و 5-3)

- كل ضلعين متقابلين متوازيان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- إذا كانت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ الزوايا الأخرى قوائم.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.

خصائص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف (الدروس 5-4 إلى 5-6)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وقطراه متطابقان وينصّف كل منهما الآخر. وزواياه الأربع قوائم.
- للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع. وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان والقطران متطابقان أيضًا.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسيّة

- **القطر** (ص 10)
- **متوازي الأضلاع** (ص 19)
- **المستطيل** (ص 36)
- **المعين** (ص 42)
- **المربّع** (ص 43)
- **شبه المنحرف** (ص 50)
- **قاعدتا شبه المنحرف** (ص 50)
- **ساقا شبه المنحرف** (ص 50)
- **زاويتا القاعدة** (ص 50)
- **شبه المنحرف المتطابق الساقين** (ص 50)
- **القطعة المتوسطة لشبه المنحرف** (ص 52)
- **شكل الطائرة الورقيّة** (ص 53)

اختبار المفردات:

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان. خطأ، شبه المنحرف متطابق الساقين
2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان. صحيحة
3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه. خطأ، القطر
4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين. صحيحة
5) قطرا المعين متعامدان. صحيحة
6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه. خطأ، القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع. صحيحة
8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع. خطأ، شبه المنحرف
9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل. صحيحة
10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية : يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 10-1 فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14) .

أحاجي المفردات:

تُعزّز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال تلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

5-1 زوايا المضلع (ص. 17-10)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدّبين الآتيين :

11) العشاري. **1440°**

12) ذو 15 ضلعًا. **2340°**

13) **زخرفة :** يمثل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًّا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. **720°**

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

14) $135°$ **8**

15) $166.15°$ **26**

مثال 1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدّب عدد أضلاعه 22 ضلعًا.

$m = (n-2)180$	بكتابة معادلة
$= (22-2)180$	بالتعويض
$= 20 \cdot 180$	بالطرح
$= 3600$	بالضرب

مثال 2

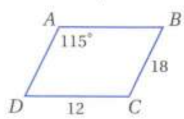
قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم **157.5**. أوجد عدد أضلاعه.

$157.5n = (n-2)180$	بكتابة المعادلة
$157.5n = 180n - 360$	خاصيّة التوزيع
$-22.5n = -360$	بالطرح
$n = 16$	بالقسمة

إذن عدد أضلاع المضلع 16 ضلعًا.

5-2 متوازي الأضلاع (ص. 26-19)

استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



16) $m\angle ADC$ **65°**

17) AD **18**

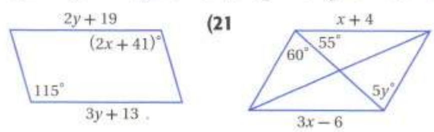
18) AB **12**

19) $m\angle BCD$ **115°**

20، 21) انظر الهامش.

جبر : أوجد قيمتي y , x في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

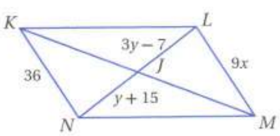
20) **21)**



22) **تصميم :** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟ **انظر الهامش.**

مثال 3

جبر : إذا كان **KLMN** متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي :



a) x

$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الأضلاع المتقابلة في $\square$ متطابقة
$KN = LM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	بالقسمة

b) y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا $\square$ ينصّف كل منهما الآخر
$NJ = JL$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	بالطرح
$y = 11$	بالقسمة

مراجعة الدروس

مراجعة : إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

20) $x = 5, y = 12$

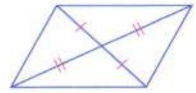
21) $x = 37, y = 6$

22) إجابة ممكنة: إذا كانت الأضلاع المتقابلة متساوية في الطول أو إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقًا ومتوازيًا، فإنّ الشكل متوازي أضلاع. ويمكن أن يكون الشكل متوازي أضلاع أيضًا إذا كانت الزوايا المتقابلة متطابقة أو إذا كان القطران ينصّف كل منهما الآخر.

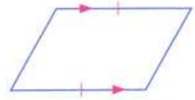
5-3 تمييز متوازي الأضلاع (ص. 34-27)

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك. 23، 24) انظر الهامش.

(23



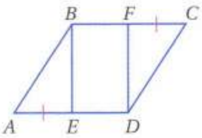
(24



25) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر الهامش.

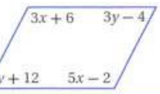
المعطيات: $\square ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.

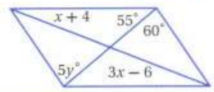


جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. 26، 27) انظر الهامش.

(26

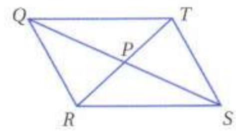


(27



مثال 4

إذا كان $TP = 4x + 2, QP = 6 - 2y, PS = 12 - 5y$، $PR = 6x - 4$، فأوجد قيمتي x, y بحيث يكون $QRST$ متوازي أضلاع.

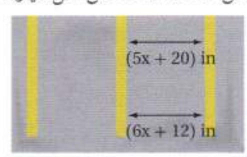


أوجد قيمة x بحيث تكون $\overline{TP} \cong \overline{PR}$ وقيمة y بحيث تكون $\overline{QP} \cong \overline{PS}$.

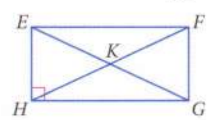
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	بالطرح
$x = 3$	بالقسمة
$QP = PS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6 - 2y = 12 - 5y$	بالتعويض
$3y = 6$	بالطرح
$y = 2$	بالقسمة

5-4 المستطيل (ص. 41-36)

28) **مواقف سيارات:** خطوط اصطفاف السيارات في الشكل أدناه متوازية. ما عرض المكان المخصص لكل سيارة؟ **60 in**



جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$. **33°**

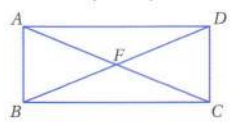
30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$. **77°**

31) إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG. **64 ft**

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$. **180°**

مثال 5

جبر: في المستطيل $ABCD$ أدناه، إذا كان $m\angle ADB = (4x+8)°$, $m\angle DBA = (6x+12)°$، فأوجد قيمة x.



بما أنّ $ABCD$ مستطيل، فإنّ $m\angle ABC = 90°$. وبما أن الأضلاع المتقابلة في المستطيل متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطرين متطابقة، فإنّ $\angle DBC \cong \angle ADB$،

ومن تعريف التطابق $m\angle DBC = m\angle ADB$.

$m\angle DBC + m\angle DBA = 90$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle ADB + m\angle DBA = 90$	بالتعويض
$4x + 8 + 6x + 12 = 90$	بالتعويض
$10x + 20 = 90$	بالجمع
$10x = 70$	بالطرح
$x = 7$	بالقسمة

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

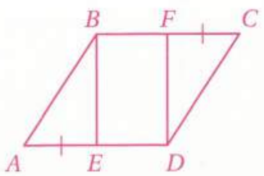
إجابات:

23) نعم، النظريّة 5.11

24) نعم، النظريّة 5.12

25) المعطيات: $\square ABCD, \overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: الشكل الرباعي $EBFD$ متوازي أضلاع.



1) $\square ABCD$، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (معطيات)

2) $AE = CF$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $BC = AD$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $BC = BF + CF$، $AD = AE + ED$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

6) $BF + CF = AE + ED$ (بالتعويض)

7) $BF + AE = AE + ED$ (بالتعويض)

8) $BF = ED$ (خاصيّة الطرح)

9) $\overline{BF} \cong \overline{ED}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

10) $\overline{BF} \parallel \overline{ED}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

11) الشكل الرباعي $EBFD$ متوازي أضلاع (إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متوازيًا ومتطابقًا فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع)

26) $x = 4, y = 8$

27) $x = 5, y = 12$

دليل التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ، ص(8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

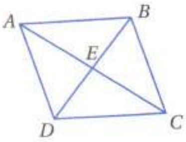
42a) إجابة ممكنة: ساقا كل شبه منحرف أجزاء من قطري المربّع. وقطرا المربّع ينصّفان الزوايا المتقابلة، لذلك فقياس كل زاوية قاعدة لشبه المنحرف يساوي °45. زوج واحد من الأضلاع متوازٍ وزاويتا كل قاعدة متطابقتان.

42b) $16 + 8\sqrt{2} \approx 27.3$ in

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

5-5 المعين والمربع (ص. 49-42)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$ ، $m\angle ABD = 55°$، فأوجد كلًا مما يأتي :



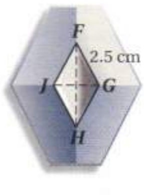
33) AE $3\sqrt{7}$

34) $m\angle BDA$ $55°$

35) CE $3\sqrt{7}$

36) $m\angle ACB$ $35°$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول FJ؟ 2.5 cm



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

38) مستطيل ومعين ومربع؛ أضلاعه متطابقة والأضلاع المتتالية متعامدة.

39) معين ؛ جميع أضلاعه متطابقة وقطراه متعامدان.

مثال 6

يتقاطع قطرا المعين $QRST$ عند النقطة P. استعمل المعطيات لإيجاد المطلوب في كل مما يأتي:

a) **جبر:** إذا كان $QT = x + 7$, $TS = 2x - 9$، فأوجد قيمة x.

$\overline{QT} \cong \overline{TS}$	تعريف المعين
$QT = TS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 7 = 2x - 9$	بالتعويض
$-x = -16$	بالطرح
$x = 16$	بالقسمة

b) إذا كان $m\angle QTS = 76°$، فأوجد $m\angle TSP$.

بما أنّ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle QTS$، فإنّ $m\angle PTS = \frac{1}{2} m\angle QTS$.

لذلك $m\angle PTS = \frac{1}{2}(76) = 38°$، وبما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ $m\angle TPS = 90°$.

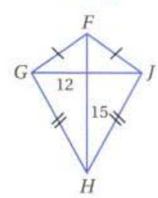
$m\angle PTS + m\angle TPS + m\angle TSP = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$38° + 90° + m\angle TSP = 180°$	بالتعويض
$128 + m\angle TSP = 180°$	بالجمع
$m\angle TSP = 52°$	بالطرح

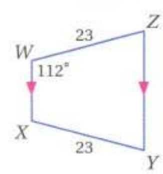
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة (ص. 58-50)

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

40) GH $3\sqrt{41}$

41) $m\angle Z$ $68°$





a, b) انظر الهامش.

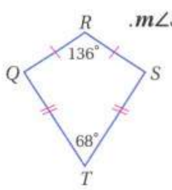
42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

مثال 7

إذا كان $QRST$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle S$.



بما أنّ $\angle Q \cong \angle S$، فإنّ $m\angle Q = m\angle S$. اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle S$.

$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle S + 136° + m\angle S + 68° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle S + 204° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle S = 156°$	بالطرح
$m\angle S = 78°$	بالقسمة

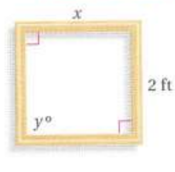
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) السداسي **720°** **2)** ذو 16 ضلعًا **2520°**

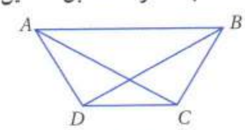
3) **فن:** تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنها ستمثّل مربّعًا.

a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟ **انظر الهامش**

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة. **$x = 2$ ft ؛ $y = 90$**



الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟ **$\angle D$**

5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟ **$\overline{DC}$**

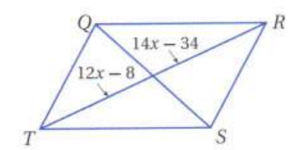
6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟ **$\overline{BD}$**

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

7) $900°$ **7** **8)** $1980°$ **13**

9) $2880°$ **18** **10)** $5400°$ **32**

11) **اختيار من متعدد:** إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟ **C**

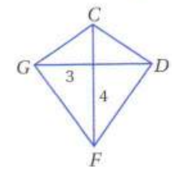


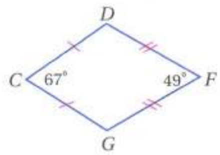
A 11 **C** 13

B 12 **D** 14

إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

12) GF **5** **13)** $m\angle D$ **122°**



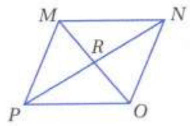


جبر: استعن بالمعين $MNOP$، للإجابة عن الأسئلة الآتية:

14) $m\angle MRN$ **90°**

15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN. **12**

16) إذا كان $m\angle PON = 124°$، فأوجد $m\angle POM$. **62°**



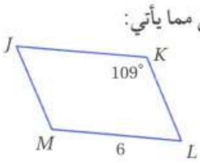
17) **إنشاءات:** تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتُركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلاً؟ وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

استعمل $\square JKLM$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

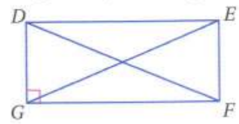
18) $m\angle JML$ **109°**

19) JK **6**

20) $m\angle KLM$ **71°**



جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



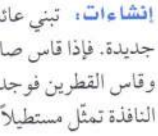
21) إذا كان $DF = 2(x + 5) - 7$, $EG = 3(x - 2)$، فأوجد EG. **21**

22) إذا كان $m\angle EDF = (5x - 3)°$, $m\angle DFG = (3x + 7)°$، فأوجد $m\angle EDF$. **22°**

23) إذا كان $DE = 14 + 2x$, $GF = 4(x - 3) + 6$، فأوجد GF. **34**

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك. **24، 25) انظر الهامش.**

24)



25)

الفصل 5 اختبار الفصل

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. تساعدك العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

إجابات

3a) إجابة ممكنة: يجب أن تقيس الزوايا عند الرؤوس لترى فيما إذا كان قياس كل منها 90°، أو يمكنها التحقق مما إذا كان القطران متطابقين ومتعامدين.

17) إجابة ممكنة: نعم، إذا كان مستطيلًا فإن القطرين متطابقان.

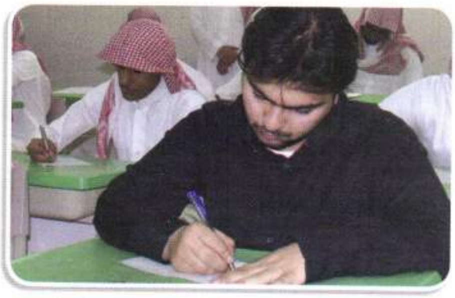
24) نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة.

25) لا؛ الأضلاع المتقابلة ليست متطابقة.

مخطط المعالجة

	المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	

تطبيق التعريفات والخصائص



يتطلب حل كثير من المسائل الهندسيّة في الاختبارات المعياريّة تطبيق التعريفات والخصائص. استعمل هذه الصفحة والتي تليها للتدرّب على تطبيق التعريفات والخصائص عند حل أسئلة الهندسة ذات الإجابات المطولة.

استراتيجيات تطبيق التعريفات والخصائص

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية.

- حدّد المطلوب في المسألة.
- ادرس الأشكال المعطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك**: ما خصائص هذا الشكل التي يمكنني تطبيقها لحل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

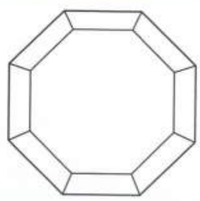
- حدّد التعريفات أو المفاهيم الهندسيّة التي يمكنك استعمالها لمساعدتك على إيجاد القيم المجهولة في المسألة.
- استعمل التعريفات وخصائص الأشكال لكتابة معادلة وحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.



يصنع خالد إطارًا خشبيًّا على شكل ثماني منتظم محيطه 288 cm.

a) ما طول كل لوح خشبي يشكّل ضلعًا للإطار؟

b) ما الزاوية التي سيُقطع بها كل لوح عند طرفيه حتى تتلاءم الألواح بعضها مع بعض وتشكل الإطار؟ وضح إجابتك.

الفصل 5 الإعداد للاختبارات المعياريّة

1 التركيز

الهدف: تعلم كيفية تطبيق التعريفات والخصائص الهندسيّة لحل المسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- كيف يمكن استعمال التعريفات والخصائص الهندسيّة لحل المسألة؟
- كيف تحدّد التعريفات والخصائص التي ستستعملها لحل المسألة؟
- ما المعلومات الأخرى التي ستجمعها عندما تبدأ حل المسألة؟

64 الفصل 5 الأشكال الرباعية

اقرأ المسألة بعناية، علمت أن الألواح ستشكل ثمانيًّا منتظمًا محيطه 288 cm. والمطلوب إيجاد طول كل لوح خشبي وقياس الزاوية التي ستقطع بها الألواح عند أطرافها حتى يتلاءم بعضها مع بعض تمامًا.

لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الألواح.

$288 \div 8 = 36$

إذن طول كل لوح يجب أن يكون 36 cm.

استعمل خاصيّة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع المحدَّب لإيجاد قياس زاوية داخليّة للثماني المنتظم.

أوجد أولًا المجموع S لقياسات الزوايا الداخليّة.

$$S = (n-2) \cdot 180$$
$$= (8-2) \cdot 180$$
$$= 1080$$

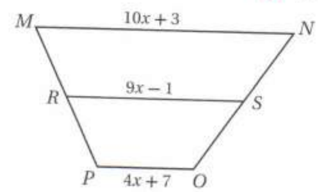
إذن قياس الزاوية الداخليّة للثُّماني المنتظم يساوي $1080 \div 8 = 135°$. وبما أنّه سيُستعمل لوحان لتشكيل كل رأس للإطار، فإن كل طرف للألواح سيُقطع بزاوية قياسها $135 \div 2 = 67.5°$.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب . ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$.

ما طول $\overline{RS}$؟ **D**



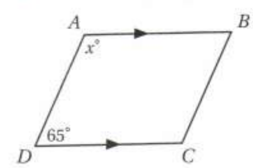
A 14 وحدة

B 19 وحدة

C 23 وحدة

D 26 وحدة

2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$، فأوجد قيمة الزاوية x . **J**



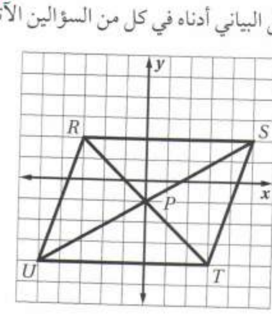
F 32.5

G 65

H 105

J 115

3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين: **(a, b** انظر الهامش



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟ **C**

A 45°

B 135°

C 360°

D 1080°

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

صُمِّم إطارٌ على شكل سداسي منتظم محيطه 354 cm.

a) ما طول ضلع الإطار؟ 59 cm

b) ما قياس الزاوية المتكونة عند كل ركن من أركان الإطار؟ 120°

3 التقويم

استعمل الأسئلة 4–1 لتقويم فهم الطلاب.

إجابات:

3a) إجابة ممكنة: نعم؛ بما أن $UP = \sqrt{34}$، $PS = \sqrt{34}$، $PT = 3\sqrt{2}$، $RP = 3\sqrt{2}$، فإن القطران ينصّف كل منهما الآخر.

3b) إجابة ممكنة: متوازي أضلاع؛ إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر فإنّ الشكل متوازي أضلاع.

تشخيص أخطاء الطلبة

لرصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة أو أخطاء مفاهيمية، مثل:

1) A اختار أول عبارة صحيحة.
B العبارة صحيحة.
C طبّق التعريف خطأ.
D صحيحة

2) F لم يختر المصطلح الأنسب.
G صحيحة
H استعمل التعريف استعمالاً خطأ.
J خمّن.

3) A أخطأ حسابيًا.
B أخطأ حسابيًا.
C أخطأ حسابيًا.
D صحيحة

4) F استعمل صيغة خطأ.
G صحيحة
H استعمل صيغة خطأ.
J استعمل صيغة خطأ.

5) A أوجد الفرق بين قياس الزاوية و 90.
B صحيحة
C خمّن.
D افترض أن الزوايا متطابقة.

6) F أخطأ حسابيًّا.
G صحيحة
H أخطأ حسابيًّا.
J أخطأ حسابيًّا.

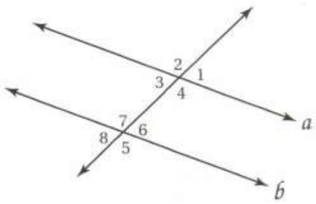
7) A فهم خاطئ للتعريف.
B فهم خاطئ للتعريف.
C صحيحة
D فهم خاطئ للتعريف.

الفصل 5 اختبار معياري
تراكمي، الفصول 1-5

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

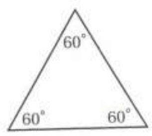
1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟ D



A $\angle 1 \cong \angle 3$ C $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ D $\angle 8 \cong \angle 2$

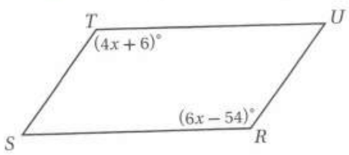
2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب. G



F حادّ الزاوية H منفرج الزاوية

G متطابق الزوايا J قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$. D



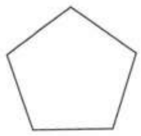
A 12 C 25

B 18 D 30

إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص متوازي الأضلاع لحل المسألة. كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

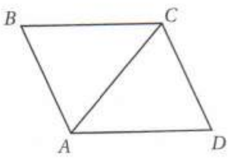
4) ما قياس الزوايا الداخليّة في الخُماسي المنتظم؟ G



F 96° H 120°

G 108° J 135°

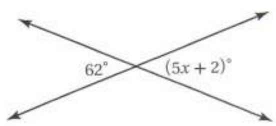
5) الشكل الرباعي $ABCD$ معينًا فيه $m\angle BCD = 120°$، أوجد $m\angle DAC$. B



A 30° C 90°

B 60° D 120°

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ G



F 10 H 14

G 12 J 15

7) أيّ العبارات الآتية صحيحة؟ C

A جميع المستطيلات مربّعات.

B جميع المعينات مربّعات.

C جميع المستطيلات متوازيات الأضلاع.

D جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة في الفصول 5–1 من خلال:

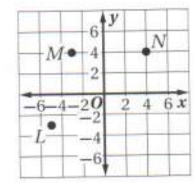
- اختبار معياري: تراكمي، الفصول 5– ص (67–66)
- الاختبار التراكمي: الفصول 5–1، ص (26–24)

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة.

8) تشكل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيٍّ من أركان الخيمة؟ $120°$

9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل. $(6, -3)$



10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.
إجابة ممكنة: يكون مربعًا أو معينًا .

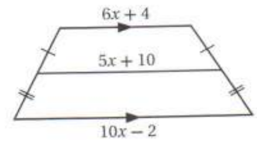
11) حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.

المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.
العدد 144 يقبل القسمة على 9.

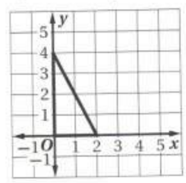
النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

إجابة ممكنة: النتيجة صحيحة ؛ قانون الفصل المنطقي .

12) **إجابة شبكية:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا. 3



13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟ $(1, 2)$

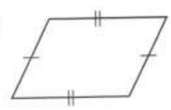


أسئلة ذات إجابات مطولة

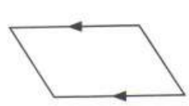
اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

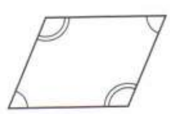
a) (a–c) انظر الهامش.



b)



c)



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	2–1	3–1	5–2	5–1	5–5	1–8	5–4	5–1	5–6	5–5	1–4	5–6	4–1	5–3

إجابات:

14a) نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

14b) لا؛ ضلعان متقابلان فقط متوازيان. عليك أن تبين أنّ:
1) الضلعين المتوازيين متطابقان أيضًا،
أو 2) الضلعين المتقابلين الآخرين متوازيان.

14c) نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 6: حدد الأسئلة صفحة 69 واجبًا منزليًّا لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 1-5 ، ص (17) :

45) $30, 90, 60$؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يكون مجموع قياسات الزوايا الداخليّة $720°$، وبما أن المضلع $QRSTVX$ منتظم فإنّ له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية $120°$، لذلك $m\angle XVT = m\angle XQR = 120$ وكذلك $XQ = QR$. وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون $m\angle QXR = m\angle QRX$. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمثلث $180°$، فإنّ $m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180°$، وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120 = 180°$، أي أن $2a = 60$ ومنها $a = 30$.

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$، وبالتعويض، $m\angle XRS + 30° = 120°$. وبالطرح يكون $m\angle XRS = 90°$.

إذن $b = 90°$، وحسب (SAS) يكون $\triangle XVT \cong \triangle XQR$ و $\triangle XTS \cong \triangle XRS$. وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون $m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$.

وبالتعويض $m\angle TXS + m\angle SXR + 30° + 30° = 120°$،

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60°$ وبما أنّ $m\angle TXS = m\angle SXR$

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، فإنّ $m\angle TXS = m\angle SXR = 30°$.

وفي $\triangle XTS$ ، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180°$،

وبالتعويض $c + 30° + 90° = 180°$ ، إذن $c = 60°$.

الدرس 2-5 ، ص (24) :

25) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\square GKLM$ (معطى)

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}, \overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

3) $\angle G$ و $\angle K$ متكاملتان، $\angle K$ و $\angle L$ متكاملتان، $\angle L$ و $\angle M$ متكاملتان $\angle M$ و $\angle G$ متكاملتان، (الزاويتان المتحالفتان متكاملتان)

26) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\square WXYZ$ (معطى)

2) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle ZWX \cong \angle XYZ$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ (SAS)

27) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\square PQRS$ (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{PR}$ (قطر $PQRS$) وسمّ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبيّن.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}, \overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

4) $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخليًّا)

5) $\overline{PR} \cong \overline{RP}$ (خاصية الانعكاس)

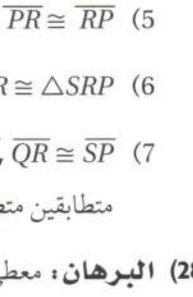
6) $\triangle QPR \cong \triangle SRP$ (ASA)

7) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) البرهان: معطى أن $ACDE$ متوازي أضلاع. بما أنّ الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{EA} \cong \overline{DC}$. ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$. ويكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ لأنّ الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة. إذن $\triangle EBA \cong \triangle CBD$ حسب ASA. و$\overline{EB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصّف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصّف $\overline{EC}$.

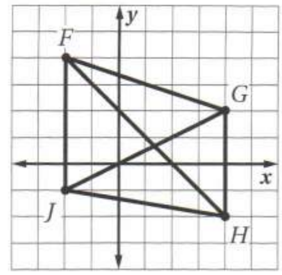
الدرس 3-5 ، ص (31-28) (تحقق من فهمك)

2)



بما أنّ $AD = BC$، فإنّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. ومعطى أن أضلاع الشريط متوازية، لذلك تكون $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. إذن، وحسب النظرية 5.12 يكون الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية حسب التعريف فإنّ $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

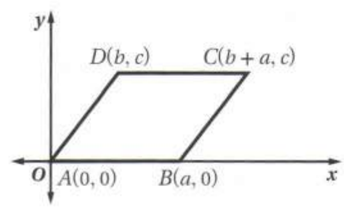
4B)



إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإنّه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين. نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{JG}$ هي $(1, 0.5)$. وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ ليس متوازي أضلاع.

5) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

$$DC = \sqrt{(b+a-b)^2 + (c-c)^2} = a$$

$$AD = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{(a-(b+a))^2 + (c-0)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

بما أنّ $AB = DC$ و $AD = BC$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

الدرس 3-5 ، ص (32-34):

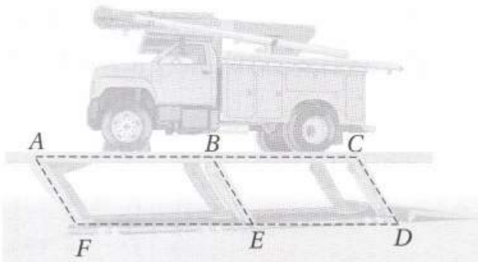
15) المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ و M نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ZMY مثلث متطابق الضلعين.

البرهان: بما أنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع، فإنّ $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$. وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإنّ $\overline{MX} \cong \overline{WM}$. ومعطى أنّ $\angle W \cong \angle X$، لذلك وحسب SAS فإنّ $\triangle ZWM \cong \triangle YXM$. ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{ZM} \cong \overline{YM}$. إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) المعطيات: $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $ACDF$ متوازي أضلاع.



البرهان:

العبارات (المبررات)

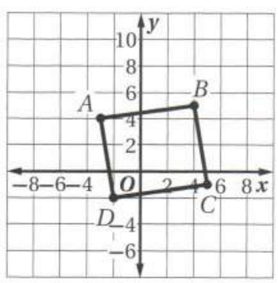
1) $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع (معطيات)

2) $\overline{AF} \cong \overline{BE}, \overline{BE} \cong \overline{CD}, \overline{AF} \parallel \overline{BE}, \overline{BE} \parallel \overline{CD}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

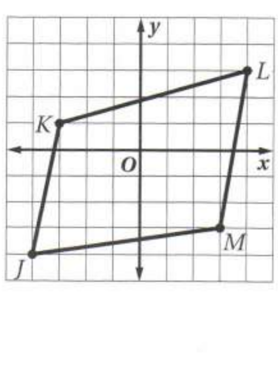
3) $\overline{AF} \cong \overline{CD}, \overline{AF} \parallel \overline{CD}$ (خاصية التعدّي)

4) $ACDF$ متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنّه متوازي أضلاع)

23) نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي -6 ، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

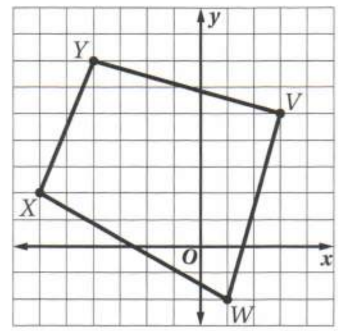


24) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين. والمسافة بين K و L تساوي $\sqrt{53}$. والمسافة بين L و M تساوي $\sqrt{37}$. والمسافة بين M و J تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J و K تساوي $\sqrt{26}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإنّ $JKLM$ ليس متوازي أضلاع.

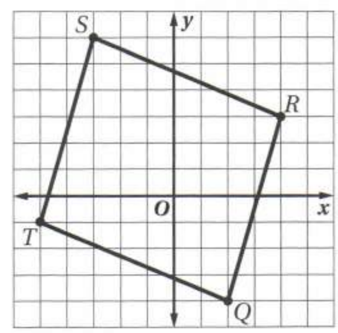


25) لا؛ يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين.

ميل $\overline{YV}$ يساوي $-\frac{2}{7}$، وميل $\overline{XW}$ يساوي $-\frac{4}{7}$، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{5}{2}$، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{7}{2}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$، فإنّ $VWXY$ ليس متوازي أضلاع.

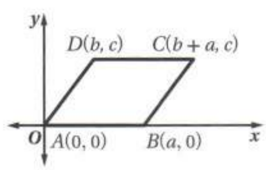


26) نعم؛ يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أنّ ميل $\overline{QR}$ يساوي ميل $\overline{ST}$ ويساوي $\frac{7}{2}$، فإن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$ ولأن $QR = ST = \sqrt{53}$ فإن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. إذن، $QRST$ متوازي أضلاع.



27) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$

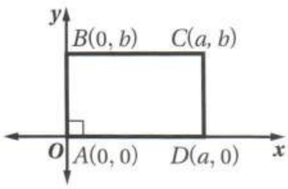
ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{c-c}{b+a-b} = 0$

لذلك $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

28) **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع.

$\angle A$ زاوية قائمة.



المطلوب: $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ قوائم.

البرهان:

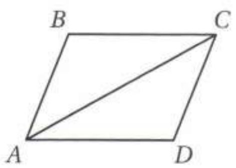
ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{b-b}{a-0} = 0$ ، ميل $\overline{CD}$: غير معرّف

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$ ، ميل $\overline{AB}$: غير معرّف

لذلك $\overline{BC} \perp \overline{CD}, \overline{CD} \perp \overline{AD}, \overline{AB} \perp \overline{BC}$.

إذن، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ قوائم.

29) **المعطيات:** $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$



المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

وبما أنّ مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي $180°$ فإنّ مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي $360°$. إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$ وبما أنّ $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$ فإنّ $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360°$

إذن $2(m\angle A) + 2(m\angle B) = 360°$ وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180°$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360°$ أو $m\angle A + m\angle D = 180°$ إذن، هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

30a) **المعطيات:** $\overline{AC} \cong \overline{CF}, \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}, \overline{DF} \cong \overline{DE}$

المطلوب: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

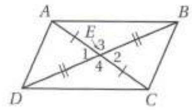
البرهان: نعلم أنّ $\overline{AC} \cong \overline{CF}, \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}, \overline{DF} \cong \overline{DE}$

إذن $AC = CF$ حسب تعريف التطابق، $AC = AB + BC$

و $CF = CD + DF$ حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض، يكون $AB + BC = CD + DF$ ، وباستعمال التعويض مرّة أخرى يكون $AB + BC = AB + DF$ وحسب خاصية الطرح $BC = DF$.

إذن $\overline{DF} \cong \overline{BC}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ حسب خاصيّة التعدّي. وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن $BCDE$ متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

31) **المعطيات:** $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$



المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطيات)

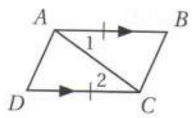
2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\triangle ABE \cong \triangle CDE, \triangle ADE \cong \triangle CBE$ (SAS)

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $ABCD$ متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنّه متوازي أضلاع)

32) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (معطيات)

2) ارسم $\overline{AC}$ (أيّ نقطتين يمر بهما مستقيم واحد)

3) $\angle 1 \cong \angle 2$ (إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة)

4) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصيّة الانعكاس)

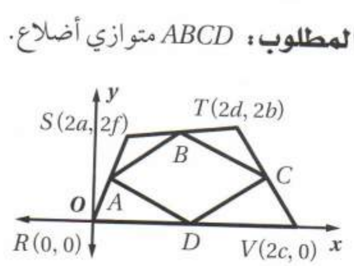
5) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SAS)

6) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

7) $ABCD$ متوازي أضلاع. (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع)

35) **المعطيات:** $RSTV$ شكل رباعي، والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TV}$, $\overline{VR}$ على الترتيب.

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي $RSTV$ في المستوى الإحداثي، وسمِّ الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2}, \frac{2f}{2}\right) = (a, f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2}, \frac{2f+2b}{2}\right) = (d+a, f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (d+c, b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2}, \frac{0}{2}\right) = (c, 0).$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ميل $\overline{AB}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(f+b) - f}{(d+a) - a} = \frac{b}{d}$$

ميل $\overline{DC}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - b}{c - (d+c)} = \frac{-b}{-d} = \frac{b}{d}$$

ولأنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإنّ القطعتين المستقيمتين متوازيتان. استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد AB, DC .

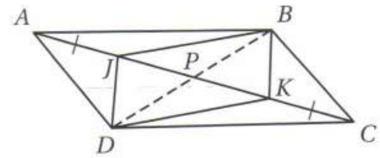
$$AB = \sqrt{(d+a-a)^2 + (f+b-f)^2} = \sqrt{d^2 + b^2}$$

$$DC = \sqrt{(d+c-c)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{d^2 + b^2}$$

إذن $AB = DC$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. لذلك $ABCD$ متوازي أضلاع لأنّه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنّه متوازي أضلاع.

40) **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.

المطلوب: $JBKD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم $\overline{DB}$. بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع، فإنّ القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصّف كل منهما الآخر حسب النظرية 5.7. سمِّ نقطة تقاطعهما P. ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ ، إذن $AP = PC$. وحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن $AP = AJ + JP$, $PC = PK + KC$. وبالتعويض $AJ + JP = PK + KC$ وبما أنّ $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$ ، فإنّ $AJ = KC$ حسب تعريف التطابق. وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$. ومن خاصيّة الطرح يكون $JP = PK$. إذن ومن تعريف التطابق تكون $\overline{JP} \cong \overline{PK}$ إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$. وبما أنّ $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصّف كل منهما الأخرى. وهما قطران للشكل الرباعي $JBKD$، فحسب النظرية 5.11 يكون الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.

41) إجابة ممكنة: يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا أمكنك بيان أنّ: كل ضلعين متقابلين متطابقان أو متوازيان، أو كل زاويتين متقابلتين متطابقتان، أو القطران ينصّف كل منهما الآخر، أو ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان.

اختبار منتصف الفصل، ص (35):

19) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $\square GFBA, \square HACD$. (معطيات)

2) $\angle F \cong \angle A, \angle A \cong \angle D$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدّي)

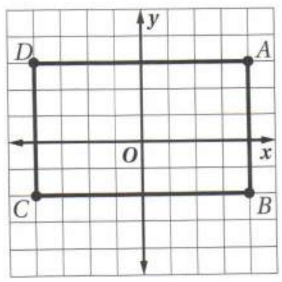
22) إجابة ممكنة: عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر، إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائمًا متوازي الأضلاع. لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازيًا لسطح الأرض.

24) نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين. المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B و C تساوي $\sqrt{10}$. والمسافة بين C و D تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

25) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيين، وبما أنّ ميل $\overline{QR} \neq$ ميل $\overline{TS}$، فإنّ $QRST$ ليس متوازي أضلاع.

الدرس 4-5 ، ص (40-39):

9) نعم؛ بما أن $AB = 5 = CD$, $BC = 8 = AD$. فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ $AC = \sqrt{89} = BD$، فإنّ القطرين متطابقان. لذلك فالشكل $ABCD$ مستطيل.



20) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ مستطيل. (معطى)

2) $ABCD$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)

5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (قطرا المستطيل متطابقان)

6) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SSS)

21) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $QTVW$ مستطيل؛ $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. (معطيات)

2) $QTVW$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{WQ} \cong \overline{VT}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle Q$ و $\angle T$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle Q \cong \angle T$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $QR = ST$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

7) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ (خاصيّة الانعكاس)

8) $RS = RS$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

9) $QR + RS = RS + ST$ (خاصيّة الإضافة)

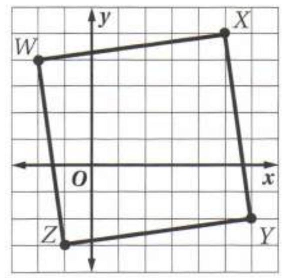
10) $QS = QR + RS, RT = RS + ST$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

11) $QS = RT$ (بالتعويض)

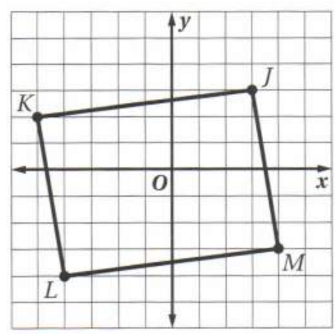
12) $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

13) $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$ (SAS)

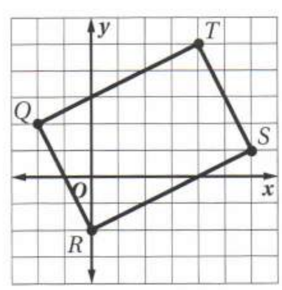
22) نعم؛ بما أنّ ميل $\overline{WX}$ يساوي ميل $\overline{YZ}$ ويساوي $\frac{1}{7}$، وميل $\overline{XY}$ يساوي ميل $\overline{ZW}$ ويساوي 7-. فإنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين يساوي 1-، فإنّ الأضلاع المتجاورة متعامدة وتشكل زوايا قائمة. لذلك فالشكل $WXYZ$ مستطيل.



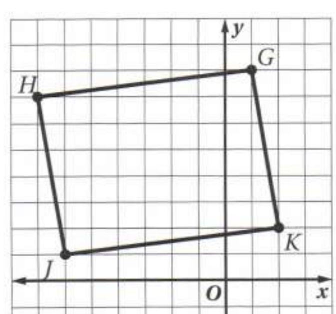
23) لا؛ بما أنّ $JK = \sqrt{65} = LM$, $KL = \sqrt{37} = MJ$، فإنّ $JKLM$ متوازي أضلاع، وبما أنّ $JL = \sqrt{98}$, $KM = \sqrt{106}$. فإنّ $KM \neq JL$، إذن فالقطران غير متطابقين. لذلك فالشكل $JKLM$ ليس مستطيلاً.



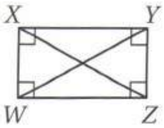
24) نعم؛ بما أنّ $QR = \sqrt{20} = ST$, $RS = \sqrt{45} = TQ$، فإنّ $QRST$ متوازي أضلاع. وبما أن $QS = \sqrt{65} = RT$، فإنّ القطرين متطابقان. إذن فالشكل $QRST$ مستطيل.



25) لا؛ بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي ميل $\overline{JK}$ ويساوي $\frac{1}{8}$ وميل $\overline{HJ}$ يساوي ميل $\overline{KG}$ ويساوي 6-، فإنّ الشكل $GHJK$ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين لا يساوي 1-، فإنّ الأضلاع المتجاورة ليست متعامدة. لذلك فالشكل $GHJK$ ليس مستطيلاً.



33) المعطيات: $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$.



المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

1) $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$. (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ الأضلاع المتقابلة للمستطيل متطابقة.

3) $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ (خاصيّة الانعكاس)

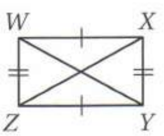
4) $\angle XWZ$ و $\angle YZW$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle XWZ \cong \angle YZW$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\triangle XWZ \cong \triangle YZW$ (SAS)

7) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

34) المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$



المطلوب: $WXYZ$ مستطيل.

البرهان:

1) $WXYZ$ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$, $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

3) $\triangle WZX \cong \triangle XYW$ (SSS)

4) $\angle ZWX \cong \angle YXW$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.)

5) $m\angle ZWX = m\angle YXW$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

6) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ متكاملتان. (الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة)

7) $m\angle ZWX + m\angle YXW = 180°$ (تعريف الزاويتين المتكاملتين)

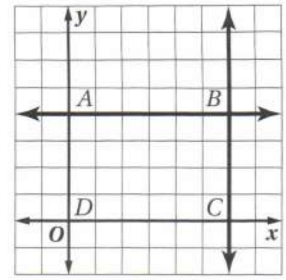
8) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ قائمتان. (إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنّ كلاً منهما قائمة)

9) $\angle WZY$ و $\angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قائمة)

10) $WXYZ$ مستطيل (تعريف المستطيل)

35) إجابة ممكنة: يجب أن يقيس قطري الملعب والأضلاع. فإذا كان القطران متطابقين وكل ضلعين متقابلين متطابقين فإنّ الملعب مستطيل الشكل.

41) إجابة ممكنة: $x = 0\ ,\ x = 6\ , y = 0,\ y = 4$

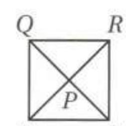


طول $\overline{AB}$ يساوي $6 - 0$ أو 6 وحدات. وطول $\overline{CD}$ يساوي $6 - 0$ أو 6 وحدات، ميل AB يساوي صفرًا، وميل DC يساوي صفرًا. وبما أنّ ضلعين للشكل الرباعي متوازيان ومتطابقان، فإنّه وبحسب النظرية 5.12، يكون متوازي أضلاع. لأنّ $\overline{AB}$ أفقي و $\overline{BC}$ رأسي فإنّ المستقيمين متعامدان وقياس الزاوية التي يشكلانها $90°$. وحسب النظرية 5.6، إذا كان لمتوازي أضلاع زاوية قائمة فإن زواياه الأربع قوائم. لذلك وحسب التعريف يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا.

الدرس 5-5 ، ص (49-47) :

12) المعطيات: $QRST$ متوازي أضلاع، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$ ؛ $m\angle QPR = 90°$

المطلوب: $QRST$ مربّع.



العبارات (المبررات)

1) $QRST$ متوازي أضلاع؛ $\overline{TR} \cong \overline{QS}$ ، $m\angle QPR = 90°$. (معطيات)

2) $QRST$ مستطيل (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل).

3) $\angle QPR$ قائمة. (تعريف الزاوية القائمة)

4) $\overline{QS} \perp \overline{TR}$ تعريف التعامد

5) $QRST$ معين (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنه معين)

6) $QRST$ مربّع. (النظرية 5.2؛ إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا فإنّه مربّع)

13) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $JKQP$ مربّع. $\overline{ML}$ تنصّف كلاً من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$. (معطيات)

2) $JKQP$ متوازي أضلاع. (جميع المربّعات متوازيات أضلاع)

3) $\overline{KL} \parallel \overline{JM}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

4) $\overline{KQ} \cong \overline{JP}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

5) $JP = KQ$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

6) $JM = MP, KL = LQ$ (تعريف المنصف)

7) $JP = JM + MP, KQ = KL + LQ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

8) $JP = 2JM, KQ = 2KL$ (بالتعويض)

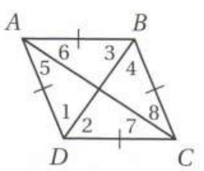
9) $2JM = 2KL$ (بالتعويض)

10) $JM = KL$ (خاصيّة القسمة)

11) $\overline{KL} \cong \overline{JM}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

12) $JKLM$ متوازي أضلاع. (إذا وجد ضلعان متقابلان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنّه متوازي أضلاع)

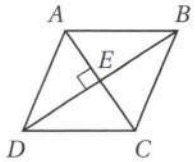
28) المعطيات: $ABCD$ معين.



المطلوب: إثبات أنّ كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ معين. وحسب تعريف المعين يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle ABC \cong \angle ADC$ و $\angle BAD \cong \angle BCD$. ولأنّ جميع أضلاع المعين متطابقة فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ وحسب SAS يكون $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ إذن $\angle 5 \cong \angle 6$ و $\angle 7 \cong \angle 8$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وكذلك $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ حسب SAS. ولذا $\angle 3 \cong \angle 4$ ، $\angle 1 \cong \angle 2$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. ومن تعريف منصّف الزاوية، فإن كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

29) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

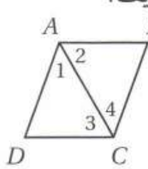


المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{AE} \cong \overline{EC}$. وكذلك $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ ؛ لأن تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس.

ونعلم أيضًا أنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. إذن $\angle AEB$ و $\angle BEC$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين. إذن $\angle AEB \cong \angle BEC$ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة، لذلك $\triangle AEB \cong \triangle CEB$ بحسب SAS.
إذن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وبما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ لأنّ تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي. وبما أنّ جميع أضلاع الشكل $ABCD$ متطابقة، فإنه معين حسب التعريف.

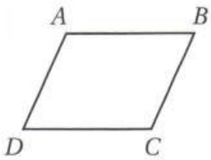
30) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، القطر $\overline{AC}$ ينصّف كلاً من $\angle DAB$ و $\angle BCD$.



المطلوب: $\square ABCD$ معين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
وحسب التعريف $\angle 2$ و $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للضلعين المتوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$. وبما أنّ الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان، فإنّ $\angle 3 \cong \angle 2$، ولأنّ تطابق الزوايا يحقق خاصية التماثل، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$ ونعلم أن $\overline{AC}$ تنصف كل من $\angle DAB$ و $\angle BCD$، إذن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ حسب التعريف. ومن خاصيّة التعدّي $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$ ولأن الأضلاع المقابلة للزوايا المتطابقة في مثلث تكون متطابقة، فإنّ $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. إذن ولأنّ ضلعين متجاورين في متوازي الأضلاع متطابقان فإنّ $ABCD$ معين.

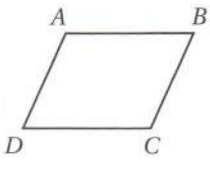
31) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: بما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. ونعلم أيضًا أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. وحسب خاصيّة التعدّي تكون $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. إذن $\overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{AD}$؛ لذلك $ABCD$ معين حسب التعريف.

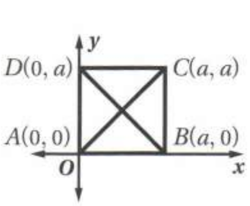
32) المعطيات: $ABCD$ مستطيل ومعين.



المطلوب: $ABCD$ مربّع.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ مستطيل ومعين.
إذن $ABCD$ متوازي أضلاع أيضًا لأن جميع المستطيلات والمعينات متوازيات أضلاع. وحسب تعريف المستطيل فإن $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ جميعها قوائم. وحسب تعريف المعين، جميع الأضلاع متطابقة، لذلك $ABCD$ مربع لأنّه متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة وزواياه الأربع قوائم.

33) المعطيات: $ABCD$ مربّع.



المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

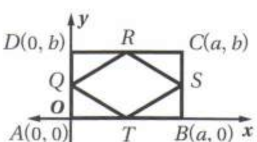
البرهان:

ميل $\overline{DB}$: $m = \dfrac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{AC}$: $m = \dfrac{0-a}{0-a} = 1$

بما أنّ ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{DB}$، فإنهما متعامدان.

34) المعطيات: $ABCD$ مستطيل.



Q, R, S, T منتصفات أضلاع المستطيل.

المطلوب: $QRST$ معين.

البرهان:

إحداثيا نقطة المنتصف Q هي:
$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$$
إحداثيا نقطة المنتصف R هي:
$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$$
إحداثيا نقطة المنتصف S هي:
$$\left(\frac{a+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{2a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(a, \frac{b}{2}\right)$$
إحداثيا نقطة المنتصف T هي:
$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$QR=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$RS=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ST=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$QT=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

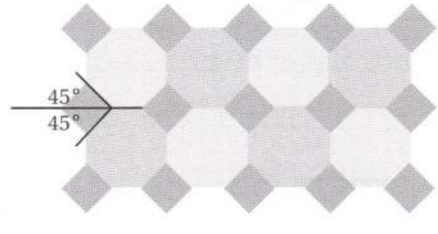
$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

بما أنّ $QR = RS = ST = QT$

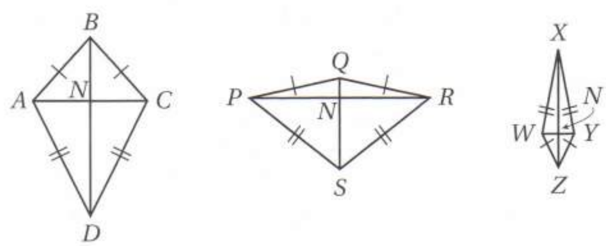
فإن $\overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{ST} \cong \overline{QT}$

إذن $QRST$ معين.

35) مربّعات؛ إجابة ممكنة: بما أن الثمانيات منتظمة فإن الأضلاع متطابقة، وتشترك الأشكال الرباعيّة مع الثمانيات في أضلاع، لذا فإن الأشكال الرباعيّة معينات أو مربّعات. وزوايا رؤوس الأشكال الرباعية تتكون من الزوايا الخارجية لأضلاع الثمانيات المجاورة للرؤوس. ومجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع يساوي $360°$ دائمًا، ولأن الثماني المنتظم له 8 زوايا خارجية متطابقة فإنّ قياس كل منها يساوي $45°$ وكما هو مبيّن في الشكل فإن قياس كل زاوية للأشكال الرباعية في النمط يساوي $45° + 45°$ أو $90°$ لذلك فالشكل الرباعي يكون مربّعًا.



36a) إجابة ممكنة:



38) صحيحة؛ بما أنّ المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قائمة، والمربّع مستطيل ومعين؛ فإنّ المربّع يكون مستطيلاً دائمًا.

العكس: إذا كان شكل رباعي مستطيلاً فإنّه مربّع. خطأ، إجابة ممكنة، المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم. وأضلاعه المتقابلة متطابقة، وليست جميع أضلاعه متطابقة بالضرورة. إذن فهو ليس مربّعًا بالضرورة.

المعكوس: إذا كان الشكل الرباعي ليس مربّعًا فإنّه ليس مستطيلاً. خطأ؛ إجابة ممكنة: الشكل الرباعي الذي زواياه الأربع قائمة و أضلاعه المتقابلة متطابقة ليس مربّعًا ولكنه مستطيل.

المعاكس الإيجابي: إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً، فإنّه ليس مربّعًا. صحيحة؛ إجابة ممكنة: إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً فإنّه ليس مربّعًا حسب التعريف.

41) إجابة ممكنة:

متوازي الأضلاع: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة. والزوايا المتقابلة متطابقة. وقطراه ينصف كل منهما الآخر وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.

المستطيل: للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وزواياه الأربع قائمة، وقطراه متطابقان.

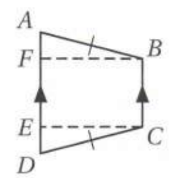
المعين: للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع، وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان وينصفان زوايا المعين.

المربع: للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع وخصائص المستطيل وخصائص المعين.

الدرس 6-5 ، ص (56-57) :

19) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

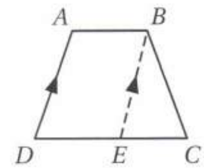
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$



المطلوب: $\angle A \cong \angle D, \angle ABC \cong \angle DCB$

البرهان: ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ بحيث يكون $\overline{BF} \perp \overline{AD}$ و $\overline{CE} \perp \overline{AD}$. وبما أنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، والمسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة فإنّ $\overline{BF} \cong \overline{CE}$. وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة، فإنّ $\angle BFA$ و $\angle CED$ قائمتان، إذن $\triangle BFA \cong \triangle CED$ بحسب حالة التطابق (HL). وبما أن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\angle A \cong \angle D$. وبما أنّ $\angle CBF$ و $\angle BCE$ قائمتان وجميع الزوايا القائمة متطابقة فإنّ $\angle CBF \cong \angle BCE$ و $\angle ABF \cong \angle DCE$. لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة. إذن $\angle ABC \cong \angle DCB$ وفق مسلمة جمع الزوايا.

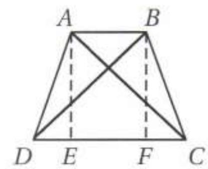
20) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف فيه $\angle D \cong \angle C$.



المطلوب: إثبات أن $ABCD$ متطابق الساقين.

البرهان: ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{EB}$ بحيث تكون $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ وبذلك تكون $\angle BEC \cong \angle D$ حسب مسلّمة الزوايا المتناظرة. ونعلم أنّ $\angle C \cong \angle D$، إذن وحسب خاصية التعدّي تكون $\angle BEC \cong \angle C$. إذن فالمثلث $\triangle EBC$ متطابق الضلعين، حيث $\overline{EB} \cong \overline{BC}$. ومن تعريف شبه المنحرف $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.
وبما أن كل ضلعين متقابلين للشكل $ABED$ متوازيان فإنّه متوازي أضلاع.
$\overline{AD} \cong \overline{EB}$، وحسب خاصية التعدّي، يكون $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. لذلك فشبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

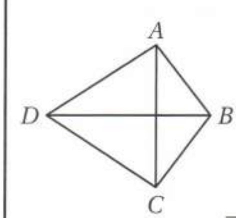
21) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف؛ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



المطلوب: إثبات أنّ شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

البرهان: نعلم أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. ارسم القطعتين المساعدتين $\overline{BF}$ و $\overline{AE}$ بحيث تكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$ و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$ وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة، فإنّ $\angle AEF$ و $\angle BFE$ قائمتان، لذلك $\triangle AEC$ و $\triangle BFD$ قائما الزاوية حسب التعريف. وبما أنّ $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ لأن المستقيمين اللذين يقعان في نفس المستوى والعموديين على مستقيم واحد يكونان متوازيين، فإن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. ومن ذلك يكون $\triangle AEC \cong \triangle BFD$ حسب حالة التطابق (HL) و $\angle ACD \cong \angle BDC$ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة. كذلك $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ حسب خاصيّة الانعكاس للتطابق. إذن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ حسب حالة التطابق (SAS). وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. لذلك شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

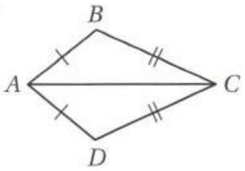
22) **المعطيات:** $ABCD$ شكل طائرة ورقية فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.



المطلوب: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

البرهان: تعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$
إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C. وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة. إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B و D عمود منصّف لـ $\overline{AC}$، لأنّه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمرّ في نقطتين مختلفتين. لذلك $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

23) **المعطيات:** $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة



المطلوب: $\angle B \cong \angle D$

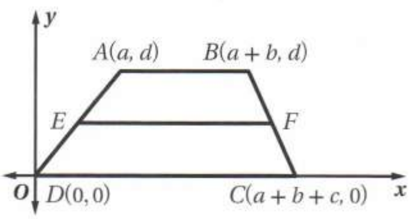
$\angle BAD \ncong \angle BCD$

البرهان:

نعلم أنّ $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ حسب تعريف شكل الطائرة الورقيّة.
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ حسب خاصيّة الانعكاس، لذلك $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ حسب حالة التطابق (SSS) إذن $\angle B \cong \angle D$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وإذا كان $\angle BAD \cong \angle BCD$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع حسب التعريف وهو ما لا يمكن أن يكون صحيحًا، لأنّنا نعلم أنّ $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة. لذلك $\angle BAD \ncong \angle BCD$.

25) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{EF}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}, \overline{EF} \parallel \overline{DC}, EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



البرهان:

حسب تعريف القطعة المتوسطة لشبه المنحرف فإن E هي نقطة منتصف $\overline{AD}$ و F نقطة منتصف $\overline{BC}$.

نقطة المنتصف E هي $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$ أو $\left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

ونقطة المنتصف F هي $\left(\frac{a+b+a+b+c}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$

أو $\left(\frac{2a+2b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{EF}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر. فإنّ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.

$$AB = \sqrt{[(a+b)-a]^2 + (d-d)^2} = \sqrt{b^2} = b$$

$$DC = \sqrt{[(a+b+c)-0]^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b+c)^2} = a+b+c$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{2a+2b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2} = \frac{a+2b+c}{2}$$

$$\frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}[b + (a+b+c)]$$

$$= \frac{1}{2}(a+2b+c)$$

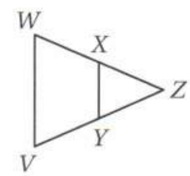
$$= \frac{a+2b+c}{2}$$

$$= EF$$

إذن $\frac{1}{2}(AB + DC) = EF$

39) **المعطيات:** $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كل من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$ ، $\angle W \cong \angle ZXY$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



العبارات (المبررات)

1) $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كلاً من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$. (معطيات)

2) $\frac{1}{2}WZ = \frac{1}{2}ZV$ (خاصيّة الضرب)

3) $WX = VY$ (تعريف نقطة المنتصف)

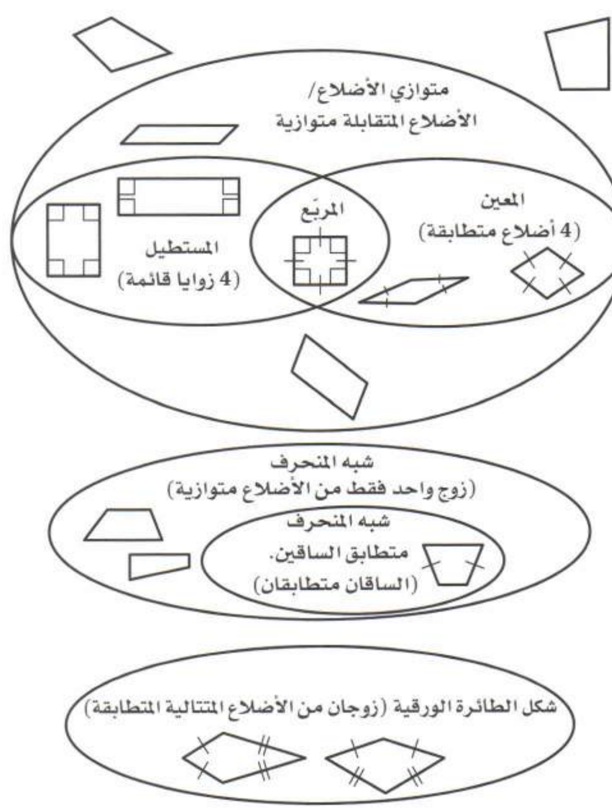
4) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\angle W \cong \angle ZXY$ (معطى)

6) $\overline{XY} \parallel \overline{WV}$ (إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان)

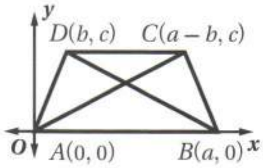
7) $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين. (تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين)

41)



45) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



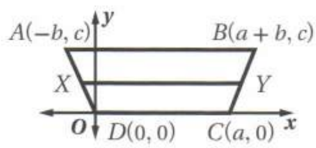
البرهان:

$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$
$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

إذن $BD = AC$ ومن ذلك $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}, \overline{XY} \parallel \overline{DC}$



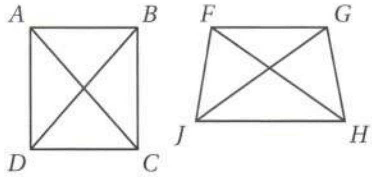
البرهان:

X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

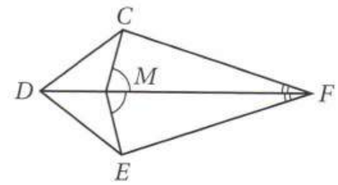
وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإنّ $\overline{XY} \parallel \overline{AB}, \overline{XY} \parallel \overline{DC}$ ،

50)



57) **المعطيات:** $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$ (معطيات)

2) $\overline{MF} \cong \overline{MF}, \overline{DM} \cong \overline{DM}$ (خاصيّة الانعكاس)

3) $\triangle CMF \cong \triangle EMF$ (ASA)

4) $\overline{CM} \cong \overline{EM}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle DMC, \angle CMF$ متكاملتان $\angle DME, \angle EMF$ متكاملتان.
(نظرية الزوايا المتكاملة)

6) $\angle DMC \cong \angle DME$ (مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة)

7) $\triangle DMC \cong \triangle DME$ (SAS)

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (69)

	الدرس 6-1 حصتان	الدرس 6-2 حصتان
العنوان	المضلعات المتشابهة	المثلثات المتشابهة
الأهداف	• استعمال التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة . • حل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة .	• تحديد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريتي التشابه SAS , SSS . • استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل.
المفردات	المضلعات المتشابهة معامل التشابه نسبة التشابه	
التمثيلات المتعددة	ص (76)	ص (85)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	آلة التصوير الرقمية، ص (71)	السبورة التفاعلية، ص (80)
تنويع التعليم	ص (71 , 77)	ص (81 , 85)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (87)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التشابه

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(9) حصص	(4) حصص	(13) حصة

الدرس 6-3 حصتان	الدرس 6-4 حصتان	توسع 6-4 حصة واحدة
المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة	**عناصر المثلثات المتشابهة**	**معمل الهندسة : الكسريات**
• استعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث. • استعمال الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.	• تعرُّف علاقات التناسب بين منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة واستعمالها. • استعمال نظرية منصف زاوية المثلث.	• رسم شجرة كسريّة.
القطعة المنصفة لمثلث		
ص (95)		
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق	
السبورة التفاعلية، ص (89)	مدونة، ص (99)	
ص (91, 92, 96)	ص (99, 102)	

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة، ص (108-106)
- اختبار الفصل، ص (109)

الفصل 6

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 6**	
	التهيئة للفصل 6 ، ص (69)	مخطط المعالجة، ص (69)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص(30, 31) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 5-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(87) اختبار منتصف الفصل، ص(32) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 5-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(108-106) اختبار الفصل، ص(109) اختبار معياري تراكمي، ص(113-110) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 5-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 6**	
	اختبار الفصل، النماذج 2B ,2A ,1 ، ص(39-34) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(41-40) اختبار المفردات ، ص(33) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(42) الاختبار التراكمي ، الفصول (6-1) ، ص(45-43) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

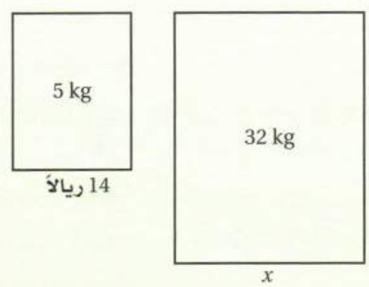
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلبة استعمال الانترنت لاستقصاء النسبة الذهبيّة. واطلب إليهم إحضار تفسيرات حول معناها ولماذا سُمّيت بهذا الاسم. واسألهم أن يعيّنوا مبانٍ وأعمالاً فنيّة تحوي مستطيلات بنسبة ذهبيّة. ويمكنهم أن يعملوا ملصقًا أو عرضًا متعدد الوسائط لاكتشافاتهم.

المتعلمون البصريون / المكانيون أعط كل طالب بطاقة مرسوم عليها مضلع، وبطاقة أخرى عليها صورة مكبرة أو مصغرة لذلك المضلع. اطلب إليهم أن يحسبوا معامل التناسب بين محيطات ومساحات المضلعات.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب أن يشرحوا إجابة السؤال الآتي باستعمال الكلمات والأمثلة. "إذا علمت ثمن 5 kg من سلعة ما ، فكيف يمكنك استعمال التناسب لإيجاد ثمن 32 kg من تلك السلعة؟"



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة استعمال برمجية للرسم البياني أو ورقة رسم بيانيّ لرسم مخطط لأرضية مكتبة المدرسة. واطلب إليهم قياس محيط المكان ومحيط كل شيء داخله، وأن يعيّنوا القياس ويكتبوه على رسوماتهم.

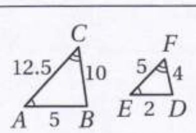
يتناول هذا الفصل استعمالات النسبة الذهبيّة خاصّة في الهندسة والرسم. تحدّ الطلاب في الحصول على معلومات أكثر حول النسبة الذهبية، وحثّهم على تطوير وسائل لاختبار المستطيلات التي تحقق أبعادها النسبة الذهبيّة.

القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

شجّع الطلبة على كتابة ملاحظاتهم العملية عن العمليات في أثناء دراستهم للمفاهيم والخوارزميات الجديدة. فالملاحظات العملية تساعد الطلبة على حل مسائل باتباع خطوات حل المسألة وذلك بكتابة الخطوات في العمود الأيمن وحل المسألة، في العمود الأيسر، فتصف ملاحظاتهم حول العمليات في الجدول المجاور كيفية تحديد ما إذا كان شكلان متشابهين أم لا. وهذا ما سوف يدرسه الطلبة في الدرس 1-6.

العمليّة	مثال
حدد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. **الخطوة 1:** عين الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة . **الخطوة 2:** حدّد ما إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة أم لا. **الخطوة 3:** حدّد ما إذا كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة أم لا. **الخطوة 4:** إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة أو كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة فإن الشكلين متشابهان.	 الزوايا المتناظرة $\angle A$ و $\angle E$ ، $\angle C$ و $\angle F$ ، $\angle B$ و $\angle D$ $\angle A \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$ (معطيات) $\angle B \cong \angle D$ (مجموع زوايا المثلث $180°$) والأضلاع المتناظرة $\overline{AC}$ و $\overline{EF}$ ، $\overline{AB}$ و $\overline{ED}$ ، $\overline{BC}$ و $\overline{DF}$ $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2},\ \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2},\ \frac{12.5}{5} = 2\frac{1}{2}$ المثلثان متشابهان أي أن: $\triangle ABC \sim \triangle EDF$

الفصل 6

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 6

- حلّ مسائل من واقع الحياة تشمل تلك التي تتضمن علاقات تناسب.
- وصف تأثير تغيّر الأبعاد تناسبيًا.
- استعمال الرموز لتمثيل القيم غير المعروفة والمتغيّرات.
- البحث عن الأنماط وتمثيل التعميمات جبريّاً.

الفصل 6

- استعمال النسب لحل مسائل تتضمن أشكالاً متشابهة.
- وضع تخمينات حول خصائص وصفات المضلّعات وعناصرها بناءً على الاستقصاء والنماذج الحسيّة. واختبار هذه التخمينات.

مابعد الفصل 6

- تمثيل الأنماط باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة.
- استعمال خصائص الدوالّ لتحليل المسائل وحلّها والتوصل إلى تنبؤات .

ملخص الدروس

6-1 المضلّعات المتشابهة

يكون الشكلان متشابهين إذا كان لهما الشكل نفسه ، إلا أنهما قد يختلفان في الأبعاد. ويكون المضلعان متشابهين إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. وترتيب الرؤوس مهم لأنّه يحدّد الزوايا والأضلاع المتناظرة .

عبارة التشابه	الزوايا المتطابقة	الأضلاع المتناظرة
$ABCD \sim EFGH$	$\angle A \cong \angle E$ $\angle B \cong \angle F$ $\angle C \cong \angle G$ $\angle D \cong \angle H$	$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$

وتُسمّى النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلّعين متشابهين معامل التشابه. واستعمال معاملات التشابه ينتج أشكالاً متشابهة.

6-2 المثلثات المتشابهة

يكون المثلثان متشابهين، إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. ومع ذلك، فإنه يمكن إثبات تشابه مثلثين دون معرفة قياس كل زاوية وكل ضلع. حيث تنصّ مسلّمة التشابه بزاويتين (AA) على أنه إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر. فإن المثلثين متشابهان.

وكذلك إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإنّ المثلثين متشابهان (نظرية التشابه SSS).

وإذا كان طولا ضلعين لمثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان في المثلثين متطابقتين ، فإن المثلثين متشابهان (نظرية التشابه SAS) .

وتشابه المثلثات يحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدّي. ويمكن استعمال خصائص المثلثات المتشابهة لحلّ مسائل من واقع الحياة باستعمال القياس غير المباشر.

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

تنص نظريّة التناسب في المثلث على أنّه إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.

وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا. أي أنه إذا قطع مستقيم ضلعين لمثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة أطوالها المتناظرة متناسبة ، فإنّه يوازي الضلع الثالث. ويمكن أن تُوَسّع هاتان النظريتان لثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر. فإذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قاطعين، فإن المستقيمات المتوازية تقطّع القاطعين تناسبيًّا. و إذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا متطابقة من قاطع فإنها تقطع قطعًا متطابقة من أيّ قاطع آخر.

وإحدى الحالات الخاصّة لمستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث هي القطعة المنصّفة. فالقطعة المنصفة هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصفي ضلعي المثلث. والقطعة المنصّفة توازي أحد أضلاع المثلث وطولها يساوي نصف طوله.

6-4 عناصر المثلثات المتشابهة

النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين هي نفسها النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة. وهي النسبة نفسها أيضًا بين ارتفاعات المثلثين المتشابهين. فإذا كان المثلثان متشابهين فإنّ ارتفاعاتهما المتناظرة متناسبة مع أطوال الأضلاع المتناظرة. وفي الحقيقة، تسري هذه العلاقة على منصفات الزوايا والقطع المتوسطة أيضًا.

وتوجد علاقة أيضًا بين منصف زاوية مثلث والضلع المقابل لتلك الزاوية. فمنصّف إحدى زوايا مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين النسبة بين طوليهما كالنسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

الفصل 6 التشابه Similarity

فيما سبق:
درستُ النسبة والتناسب وتطبيقاتهما الحياتية.

والآن:
- أتعرّف المضلعات المتشابهة، وأستعمل النسبة والتناسب لحل المسائل.

لماذا؟
تصميم: يتم تصميم بعض المجسمات والمباني لتوافق أشياء مشهورة بحيث يكون هناك تناسب بين الأطوال في تلك المجسمات ونظيراتها في الشكل الأصلي.

المطويات منظم أفكار

التشابه: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 6 مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

1. اطوِ كلًا من الأوراق الثلاث من المنتصف.
2. قُصّ الأوراق على طول خط الطيّ.
3. قُصّ الجانب الأيسر لكل ورقة؛ لعمل شرائط فهرسة، ثم ثبّت الحافة اليمنى؛ بحيث تشكل الأوراق دفترًا.
4. اكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، وأرقام الدروس على الأشرطة، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

مشروع الفصل

مسار الارتداد:
يستعمل الطلبة ما تعلموه حول المثلثات المتشابهة لتحديد مسار ارتداد كرة السلة عندما تدفع إلى جدار بزاوية ما.

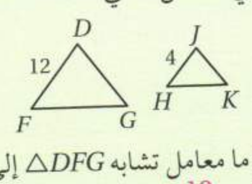
يشترك كل طالب مع زميل له في الصف للقيام بهذه التجربة. ويحتاجان من أجل القيام بذلك إلى كرة سلة أو أي نوع من الكرات المشابهة، وعصًا طولها 1 m وكوب من الورق وشريط لاصق وقلم تخطيط.

- عيّن على حائطٍ مستوٍ نقطة قريبة من الأرض بقطعة شريط لاصق (النقطة A). قِسْ 4 m أفقيًا على الجدار من A وثبّت قطعة شريط لاصق ثانية (النقطة B). ثمّ قِسْ أفقيًا من B مسافة مترين وثبّت قطعة شريط لاصق على الحائط (النقطة C).
- قس من النقطة A، مسافة 5 m بالاتجاه العمودي على الحائط وضع قطعة شريط لاصق على أرضية الغرفة واكتب عليها "البداية".
- كيف يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتشابهة لتحديد الموقع الذي تضع عنده كوبًا ورقيًا بالاتجاه العمودي على الحائط عند النقطة C بحيث عندما تُدفع الكرة من نقطة البداية إلى النقطة B، سوف ترتد عن الحائط وتصطدم بالكوب؟
- ماذا يحدث عندما تغير بُعد نقطة البداية عن الجدار؟
- سجّل نتائجك، واعمل رسمًا دقيقًا لتجربتك واعرضه أمام الطلبة.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي.

التعريف: معامل التشابه هو النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين.

مثال: في الشكل الآتي، $\triangle DFG \sim \triangle JHK$



سؤال: ما معامل تشابه $\triangle DFG$ إلى $\triangle JHK$؟ $\frac{12}{4}$ أو 3

ما معامل تشابه $\triangle JHK$ إلى $\triangle DFG$؟ $\frac{4}{12}$ أو $\frac{1}{3}$

المطويات منظم أفكار

غرضها يدون الطلبة ملاحظاتهم حول كل درس من دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضّح.

ويستعمل الطلبة مطوياتهم لكتابة ملاحظات وحل مسائل. وأثناء قراءة كل درس في هذا الفصل، واطلب إليهم أن يُسجلوا أسئلتهم. وشجعهم على إيجاد إجابات لأسئلتهم كلما تعلموا أكثر حول التشابه. والتساؤل الذاتي يساعد الطلبة على التركيز في أثناء الدراسة.

وقت استعمالها شجّع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28, 29). يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(تستعمل مع الدروس 1–6 إلى 3–6)

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{3x}{8}=\frac{6}{x}$ **4 أو -4**

2) $\frac{7}{3}=\frac{x-4}{6}$ **18**

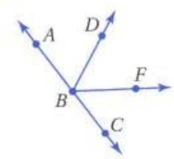
3) $\frac{x+9}{2}=\frac{3x-1}{8}$ **-37**

4) $\frac{3}{2x}=\frac{3x}{8}$ **2 أو -2**

5) **تعليم:** نسبة عدد الطلاب إلى عدد المعلمين في مدرسة هي 17 إلى 1. إذا كان عدد طلاب المدرسة 1088 طالبًا، فما عدد المعلمين؟ **64**

(تستعمل مع الدرس 3–6)

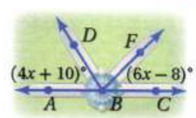
جبر: في الشكل أدناه، $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيمين متعاكسان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$. (الدرس 5-1)



6) إذا كان $m\angle ABD=(x+14)°$، $m\angle ABF=(3x-8)°$، فأوجد $m\angle ABD$. **50°**

7) إذا كان $m\angle ABF=(10x-1)°$، $m\angle FBC=(2x+25)°$، فأوجد $m\angle DBF$. **64.5°**

8) **حدائق:** يخطط مهندس لإضافة ممرات تصل إلى نافورة كما هو مبيّن أدناه. إذا كان $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{BC}$ نصفي مستقيمين متعاكسين و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$، فأوجد $m\angle FBC$. **64°**



مراجعة سريعة

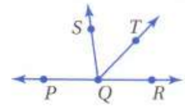
مثال 1

حل المعادلة $\frac{4x-3}{5}=\frac{2x+11}{3}$.

$\frac{4x-3}{5}=\frac{2x+11}{3}$	المعادلة الأصلية
$3(4x-3)=5(2x+11)$	خاصية الضرب التبادلي
$12x-9=10x+55$	خاصيّة التوزيع
$2x=64$	خاصية الطرح للمساواة
$x=32$	بالتبسيط

مثال 2

في الشكل أدناه، $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR}$ نصفا مستقيمين متعاكسان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$. إذا كان $m\angle SQR=(6x+8)°$، $m\angle TQR=(4x-14)°$، فأوجد $m\angle SQT$.



بما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQR=2(m\angle TQR)$	تعريف منصّف الزاوية
$6x+8=2(4x-14)$	بالتعويض
$6x+8=8x-28$	خاصيّة التوزيع
$-2x=-36$	خاصية الطرح للمساواة
$x=18$	بالتبسيط

وبما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQT=m\angle TQR$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle SQT=4x-14$	بالتعويض
$m\angle SQT=58°$	$x=18$

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فعد إلى"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فعد إلى

- تدريبات المهارات، الفصل (1)، ص (43)
- www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فعد إلى

- تدريبات إعادة التعليم، الفصل (1)، ص (41)
- www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

استعمال التناسب لحل المسائل .

الدرس 6-1

استعمال التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة.

حل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

ما بعد الدرس 6-1

استعمال أنماط عدديّة للتوصل إلى تعميمات حول النسب في الأشكال المتشابهة.

6-1 المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

فيما سبق:

درستُ استعمال التناسب لحل المسائل.

والآن:

- أستعمل التناسب لتَحديد المضلعات المتشابهة.
- أحل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

المفردات:

المضلعات المتشابهة
similar polygons

معامل التشابه
scale factor

نسبة التشابه
similarity ratio

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

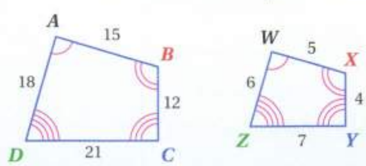
يزيّن بعض الأشخاص شاشات حواسيبهم باستعمال صور شخصية لهم، وذلك بوضع صورة بحجمها الأصلي في وسط الشاشة، أو بتكبيرها لتملأ الشاشة، إلا أن الطريقة الثانية تُظهر الصورة مشوّهة؛ لأن الصورة الأصلية والصورة الجديدة لا تكونان متشابهتين هندسيًّا.

تحديد المضلعات المتشابهة **المضلعات المتشابهة** لها الشكل نفسه، ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها.

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة (أضف إلى مطويتك)

يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: في الشكل أدناه، $ABCD$ يشابه $WXYZ$.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X, \angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z$

التناسب:

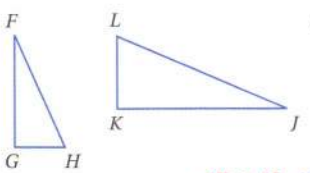
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$$

الرموز: $ABCD \sim WXYZ$

وكما هو الحال في عبارة التطابق، فإن ترتيب الرؤوس في عبارة التشابه مثل $ABCD \sim WXYZ$ مهم جدًّا؛ لأنّه يحدّد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

مثال 1 — استعمال عبارة التشابه

إذا كان $\triangle FGH \sim \triangle JKL$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



استعمل عبارة التشابه.

$\triangle FGH \sim \triangle JKL$

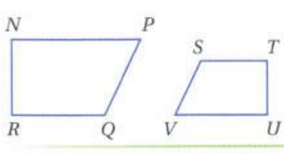
الزوايا المتطابقة: $\angle F \cong \angle J, \angle G \cong \angle K, \angle H \cong \angle L$

التناسب: $\frac{FG}{JK} = \frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$

تحقق من فهمك

انظر الهامش

1) إذا كان $NPQR \sim UVST$. فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



2 التدريس

أسئلة التعزيز

أطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- في أيّ اتجاه وُسِّعت الصورة؟ أفقيًّا
- لماذا تشوّه الصورة عندما يتم تكبيرها لتملأ الشاشة؟ على العكس من الصورة، عرض الشاشة أكبر من طولها.
- ما الطرق الأخرى التي يمكن أن تستعمل الصورة بها لتملأ الشاشة دون أن تتشوّه؟ إجابة ممكنة: يمكن استعمال نسخ متعدّدة للصورة وترتيبها لتملأ الشاشة.

إجابة (تحقق من فهمك):

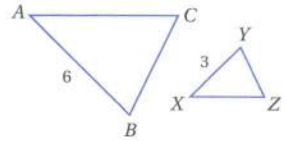
1) الزوايا المتطابقة:
$\angle N \cong \angle U, \angle P \cong \angle V,$
$\angle Q \cong \angle S, \angle R \cong \angle T$

التناسب: $\frac{NP}{UV} = \frac{PQ}{VS} = \frac{QR}{ST} = \frac{RN}{TU}$

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (71)	• تنويع التعليم ص (71, 77)	• تنويع التعليم ص (71, 77)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (10)	• كتاب التمارين ص (10)	• كتاب التمارين ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

تُسمّى النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين **معامل التشابه**. ويعتمد معامل التشابه على ترتيب المقارنة.



ففي الشكل المجاور $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

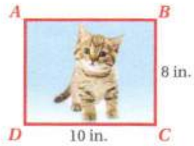
ومعامل تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle XYZ$ يساوي $\frac{6}{3}$ أو 2 .

ومعامل تشابه $\triangle XYZ$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$.

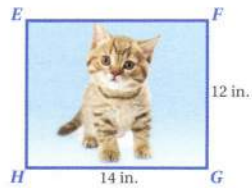
يسمى معامل التشابه أحيانًا بين مضلعين متشابهين **نسبة التشابه**

مثال 2 من واقع الحياة — تحديد المضلعات المتشابهة

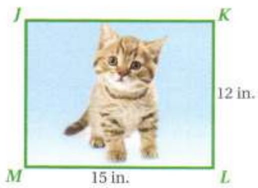
صور: يريد كمال أن يستعمل الصورة المستطيلة الشكل المجاورة كخلفيّة لشاشة الحاسوب، ولكنه يحتاج لتغيير أبعادها، حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الصورتين المستطيلتين الآتيتين مشابهة لها أم لا؟ وإذا كانت كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.



(a



(b



a) **الخطوة 1:** قارن الزوايا المتناظرة.

بما أن جميع زوايا المستطيل قوائم، والزوايا القوائم متطابقة. فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

الخطوة 2: قارن الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{HG} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \qquad \frac{BC}{FG} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{7} \neq \frac{2}{3}$$

بما أن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، فإنّ $ABCD \nsim EFGH$

إذن فالصورتان غير متشابهتين.

b) **الخطوة 1:** بما أنّ $ABCD$ ، $JKLM$ مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

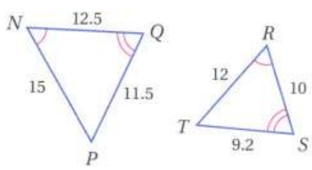
الخطوة 2: قارن الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{ML} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad \frac{BC}{KL} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن $ABCD \sim JKLM$. إذن فالصورتان متشابهتان ومعامل التشابه $\frac{2}{3}$.

تحقق من فهمك

2) حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.



قراءة الرياضيات

الرمزان $\nsim$ و $\sim$
يُقرأ الرمز $\sim$ يشابه، ويقرأ الرمز $\nsim$ لايشابه، أو ليس مشابهًا لـ.

2) نعم؛ $\triangle NQP \sim \triangle RST$ ، لأن $\angle N \cong \angle R, \angle Q \cong \angle S,$ $\angle P \cong \angle T$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ و $\frac{NQ}{RS} = \frac{QP}{ST} = \frac{PN}{TR}$. ومعامل التشابه $\frac{5}{4}$.

تحديد المضلعات المتشابهة

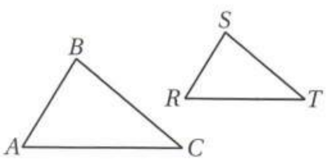
المثالان 1 , 2 يبيّنان كيفية استعمال المفاهيم الأساسيّة لتحديد الأشكال المتشابهة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle RST$ فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



الزوايا المتطابقة:
$\angle A \cong \angle R, \angle B \cong \angle S, \angle C \cong \angle T$

التناسب: $\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT}$

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقميّة: اطلب إلى الطلاب التقاط صورة وطبع عدّة نسخ مختلفة القياسات منها ($3\,in \times 5\,in$, $4\,in \times 6\,in$, $6\,in \times 9\,in$, $8\,in \times 10\,in$). واطلب إليهم قياس الصور واستعمال التناسب لتحديد أي من هذه الصور تكون مستطيلات متشابهة. وأن يحضروا صورهم إلى الصف، ويبينوا أن الصور المتشابهة وغير المتشابهة قد تبدو مختلفة.

تنويع التعليم

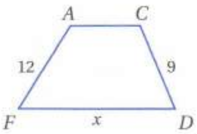
دون ضمن فوق

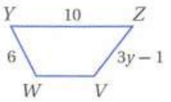
المتعلمون البصريون / المكانيّون: بيّن للطلاب كيف يحافظون على الاتساق عند تحليل الأشكال للتحقّق من التشابه. فمثلاً، قد يختارون أن يقارنوا الجانب الأيمن في كلا الشكلين أولًا. واعرض عليهم طرقًا لتنظيم عملهم بحيث يكتبون الرؤوس المتناظرة بالترتيب الصحيح.

استعمال الأشكال المتشابهة: يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القياسات المجهولة

في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.





a) أوجد قيمة x .

استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$ تناسب التشابه

$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$ $CD = 9, WY = 6, DF = x, YZ = 10$

$9(10) = 6(x)$ خاصيّة الضرب التبادلي

$90 = 6x$ بالضرب

$15 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 6

b) أوجد قيمة y .

$\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$ تناسب التشابه

$\frac{9}{6} = \frac{12}{3y-1}$ $CD = 9, WY = 6, FA = 12, ZV = 3y - 1$

$9(3y-1) = 6(12)$ خاصية الضرب التبادلي

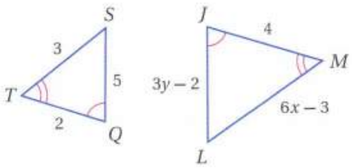
$27y - 9 = 72$ بالضرب

$27y = 81$ بإضافة 9 لكلا الطرفين

$y = 3$ بقسمة كلا الطرفين على 27

✓ تحقق من فهمك

إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي:



3A) x 1.5

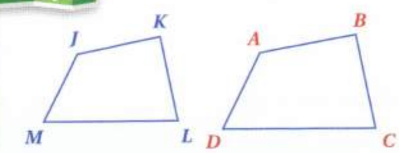
3B) y 4

النسبة بين أي طولين متناظرين في المضلعين المتشابهين تساوي معامل التشابه بينهما. ويؤدي هذا إلى النظرية الآتية حول محيطي المضلعين المتشابهين.

نظرية 6.1 محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



مثال: إذا كان $ABCD \sim JKLM$ ، فإنّ

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

سوف تبرهن النظريّة 6.1 للمثلثات في السؤال 34

إرشادات للدراسة

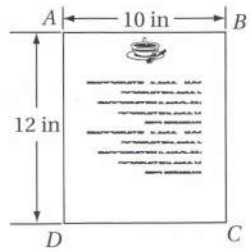
التشابه والتطابق
إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين كل ضلعين متناظرين هي 1:1 .

إرشادات للدراسة

تحديد المثلثات المتشابهة
عندما تُعطى زوجين من الزوايا المتناظرة المتطابقة في مثلثين، فتذكر أنّه يمكنك استعمال نظرية الزاوية الثالثة لإثبات أن الزاويتين الباقيتين المتناظرتين متطابقتان أيضًا.

مثال إضافي

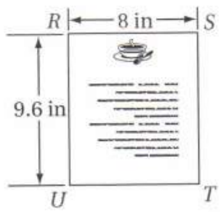
لائحة طعام: يُعدّ ماجد لائحة طعام جديدة للمطعم الذي يعمل فيه. حدّد ما إذا كانت كل من لائحتي الطعام a, b مشابهة للائحة الطعام الأصليّة. وإذا كانتا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.



a)

لا؛ لأن $\frac{AB}{FG} \neq \frac{BC}{GK}$.

b)

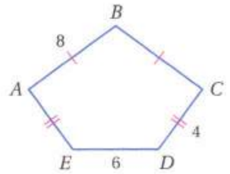


نعم؛ لأن $\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{5}{4}$
إذن $ABCD \sim RSTU$
ومعامل التشابه هو $\frac{5}{4}$

إرشادات للمعلم الجديد

الألوان المختلفة عند تحديد العناصر المتناظرة، استعمل ألواناً مختلفة لكتابة دوائر حول حروف الزوايا المتناظرة .

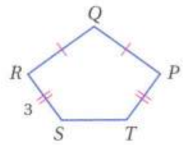
مثال 4 استعمال معامل التشابه لإيجاد المحيط



إذا كان $ABCDE \sim PQRST$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ ومحيط كل مضلّع.

معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ يساوي $\frac{CD}{RS}$ أو $\frac{4}{3}$.

وبما أنّ $\overline{BC} \cong \overline{AB}, \overline{AE} \cong \overline{CD}$ ،
فإنّ محيط $ABCDE$ يساوي $4 + 6 + 4 + 8 + 8$ أو 30 .



استعمل محيط $ABCDE$ ، ومعامل التشابه لكتابة تناسب.
افترض أن محيط $PQRST$ يساوي x .

$\frac{4}{3} = \frac{ABCDE \text{ محيط}}{PQRST \text{ محيط}}$ النظرية 6.1

$\frac{4}{3} = \frac{30}{x}$ بالتعويض

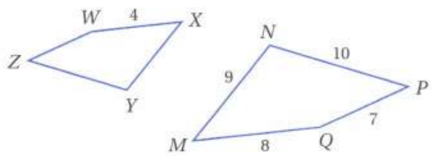
$(3)(30) = 4x$ خاصية الضرب التبادلي

$22.5 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 4

إذن محيط $PQRST$ يساوي 22.5 .

تحقق من فهمك

4) إذا كان $MNPQ \sim XYZW$ ، فأوجد معامل تشابه $MNPQ$ إلى $XYZW$ ، ومحيط كل مضلع.



تنبيه !

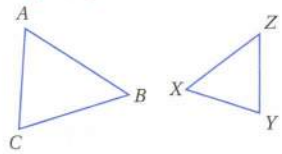
المحيط تذكّر أن المحيط هو المسافة حول الشكل. وعندما تُريد إيجاد محيط مضلع، احرص على أن تجد مجموع أطوال جميع أضلاعه، وقد تستعمل قوانين هندسيّة لإيجاد أطوال الأضلاع غير المعطاة.

4) معامل التشابه = 2 ، محيط $MNPQ$ يساوي 34 ، محيط $XYZW$ يساوي 17

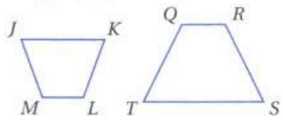
تأكد

مثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة في كل مما يأتي:

1) $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$ انظر الهامش

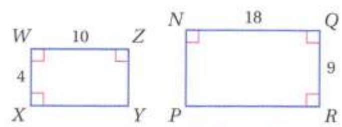


2) $JKLM \sim TSRQ$ انظر الهامش



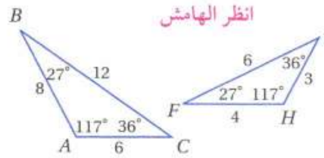
مثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

3)



لا؛ لأن $\frac{NQ}{WZ} \neq \frac{QR}{WX}$

4) انظر الهامش



المحتوى الرياضي

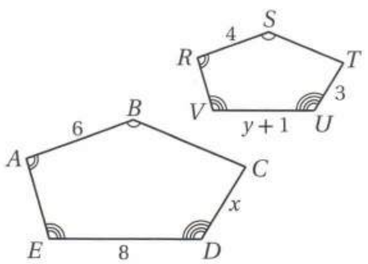
المعرفة السابقة : تعلّم الطلاب في الفصل 3 أن كلًّا من الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة. وفي هذا الدرس أكّد لهم على أنّه إذا كان الشكلان متطابقين ، فإن معامل التشابه بينهما 1.

استعمال الأشكال المتشابهة

المثالان 4 ,3 يبيّنان كيفية استعمال معاملات التشابه لإيجاد الكميات المجهولة.

مثالان إضافيان

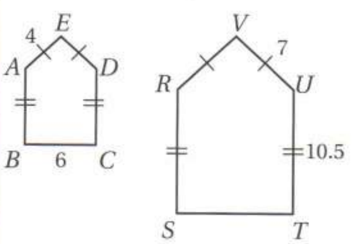
3 المضلعان الآتيان متشابهان.



a) أوجد قيمة x. $x = \frac{9}{2}$

b) أوجد قيمة y. $y = \frac{13}{3}$

4 إذا كان $ABCDE \sim RSTUV$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $RSTUV$ ومحيط كل مضلع.



معامل التشابه: $\frac{4}{7}$ ؛ ومحيط $ABCDE$ يساوي 26 ؛ ومحيط $RSTUV$ يساوي 45.5

إجابات:

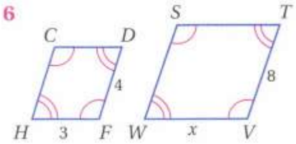
1) $\angle A \cong \angle Z, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle X; \frac{AC}{ZX} = \frac{BC}{YX} = \frac{AB}{ZY}$

2) $\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle S; \angle L \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q; \frac{JM}{TQ} = \frac{ML}{QR} = \frac{KL}{SR} = \frac{JK}{TS}$

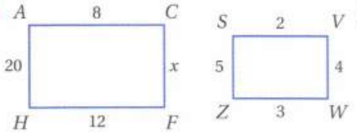
4) نعم، $\triangle ABC \sim \triangle HFJ$ ؛ لأنّ $\angle A \cong \angle H, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle J, \frac{AB}{HF} = \frac{BC}{FJ} = \frac{CA}{JH}$ ؛ ومعامل التشابه: 2.

مثال 3 في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

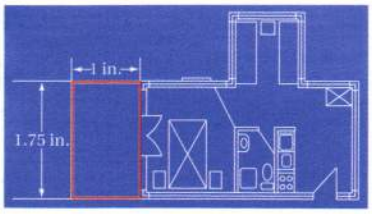
5) 6



6) 16



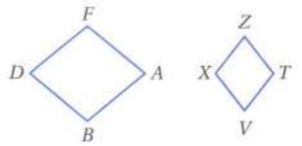
مثال 4 **7)** **تصميم:** في مخطط الشقّة المجاور، عرض الشّرفة 1 in وطولها 1.75 in. إذا كان طول الشّرفة الحقيقي 15 ft، فما محيطها؟ **47 ft تقريبًا**



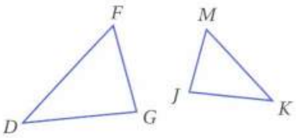
تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كل مما يأتي:

8) $ABDF \sim VXZT$ انظر الهامش

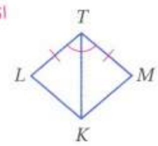


9) $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$ انظر الهامش

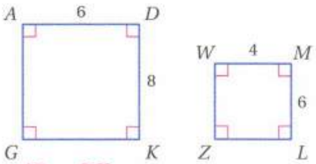


مثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كل مما يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

10) انظر الهامش



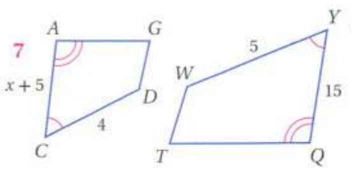
11)



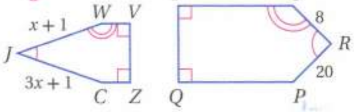
لا؛ لأن $\frac{AD}{WM} \neq \frac{DK}{ML}$

مثال 3 في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

12) 7



13) 3



مثال 4 **14)** طول المستطيل $ABCD$ يساوي 20 m، وعرضه 8 m. وطول المستطيل $QRST$ المشابه له يساوي 40 m. أوجد معامل تشابه المستطيل $ABCD$ إلى المستطيل $QRST$، ومحيط كل منهما. انظر الهامش

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–7 للتأكد من فهم الطلبة.

استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

8) $\angle A \cong \angle V, \angle B \cong \angle X, \angle D \cong \angle Z, \angle F \cong \angle T;$ $\frac{AB}{VX} = \frac{BD}{XZ} = \frac{DF}{ZT} = \frac{FA}{TV}$

9) $\angle D \cong \angle K, \angle F \cong \angle M, \angle G \cong \angle J;$ $\frac{DF}{KM} = \frac{FG}{MJ} = \frac{GD}{JK}$

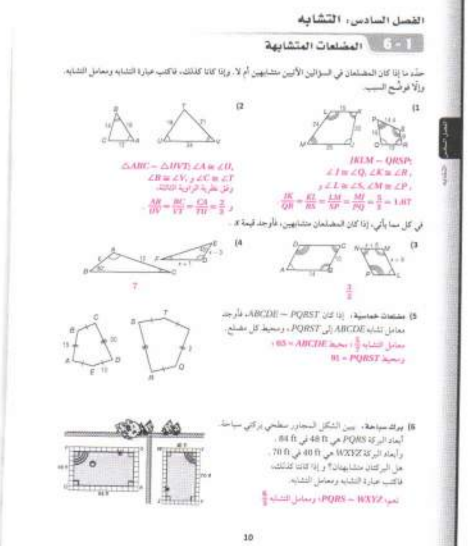
10) نعم، $\triangle LTK \sim \triangle MTK$؛ لأن $\triangle LTK \cong \triangle MTK$؛ ومعامل التشابه 1.

14) 1:2؛ محيط $ABCD$ يساوي 56 m، ومحيط $QRST$ يساوي 112 m.

تنويع الواجبات المنزلية

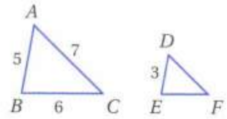
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-16، 39-55
ضمن المتوسط	9-17 فردي، 19-22، 23-33 فردي، 34-36، 39-55
فوق المتوسط	17-53، (اختياري 54-55)

كتاب التمارين، ص (10)

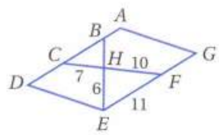


أوجد محيط المثلث المحدد في كلٍّ مما يأتي:

15) $\triangle DEF$ ، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. **10.8**



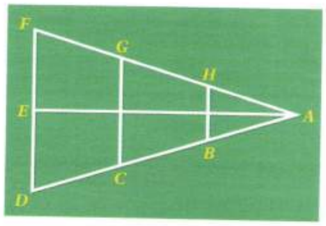
16) $\triangle CBH$ ، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$ ، $ADEG$ متوازي أضلاع. **18.9**



17) إذا كان معامل التشابه بين مستطيلين متشابهين 2:4 ، ومحيط المستطيل الكبير 80 m ، فأوجد محيط المستطيل الصغير. **40 m**

18) إذا كان معامل التشابه بين مربّعين متشابهين 3:2، ومحيط المربع الصغير 50 ft ، فأوجد محيط المربع الكبير. **75 ft**

مثلثات متشابهة: في الشكل المجاور، ثلاثة مثلثات متشابهة فيها: $\angle AHB \cong \angle AGC \cong \angle AFD$.
أوجد الأضلاع التي تناظر الضلع المُعطى أو الزوايا التي تطابق الزاوية المُعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية.



19) $\overline{AB}$ **$\overline{AC}, \overline{AD}$**

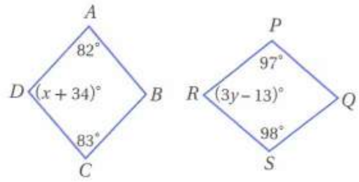
20) $\overline{FD}$ **$\overline{HB}, \overline{GC}$**

21) $\angle ACG$ **$\angle ABH, \angle ADF$**

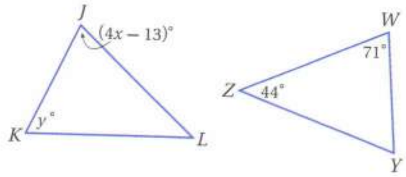
22) $\angle A$ **$\angle A$ موجودة في المثلثات الثلاثة**

أوجد قيمة كل متغيّر فيما يأتي:

23) $ABCD \sim QSRP$ **$x = 63, y = 32$**



24) $\triangle JKL \sim \triangle WYZ$ **$x = 21, y = 65$**



25) **عرض الشرائح:** إذا كانت أبعاد صورة على شريحة 13 in في $9\frac{1}{4}$ in ، ومعامل تشابه صور الشريحة إلى الصور المعروضة بواسطة جهاز العرض 1:4 ؛ فما أبعاد الصورة المعروضة؟ **37 in في 52 in**

الربط مع الحياة

يرى بعض التربويين أن نسبة 75% إلى 90% من معارف الشخص يتم الحصول عليها عن طريق الوسائل البصرية، ومن هنا جاءَت أهمية استعمال جهاز عرض الشرائح في العملية التعليمية.

هندسة إحداثية: حدد ما إذا كان المستطيلان $ABCD, WXYZ$ المعطاة إحداثيات رؤوسهما في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا ؟ وضّح إجابتك.

انظر الهامش

26) $A(-1, 5), B(7, 5), C(7, -1), D(-1, -1); W(-2, 10), X(14, 10), Y(14, -2), Z(-2, -2)$

27) $A(5, 5), B(0, 0), C(5, -5), D(10, 0); W(1, 6), X(-3, 2), Y(2, -3), Z(6, 1)$ لا؛ لأن $\frac{BC}{XY} \neq \frac{AB}{WX}$

إجابات:

26) $ABCD \sim WXYZ$ ؛ لأن
$\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X,$
$\angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z,$
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{1}{2}$$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كل مما يأتي متشابهين دائمًا أو أحيانًا أو غير متشابهين أبدًا ؟ وضح إجابتك. **(33–28)** انظر ملحق الإجابات

28) مثلثان منفرجا الزاوية

29) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

30) مثلثان قائما الزاوية

31) مثلثان متطابقا الضلعين

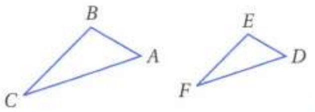
32) مثلث مختلف الأضلاع، ومثلث متطابق الضلعين

33) مثلثان متطابقا الأضلاع

34) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.1 (في حالة المثلثات)

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

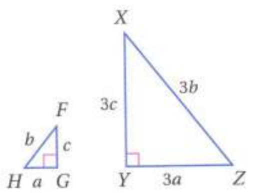
المطلوب: إثبات أن $\frac{\triangle ABC \text{ محيط}}{\triangle DEF \text{ محيط}} = \frac{m}{n}$ انظر ملحق الإجابات



35) **تغيير الأبعاد:** في الشكل المجاور، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$

a) بيّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أضلاعهما المتناظرة. $\frac{a}{3a} = \frac{b}{3b} = \frac{c}{3c} = \frac{a+b+c}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$

b) إذا أضيف لطول كل ضلع 6 وحدات. فهل المثلثان الجديدان متشابهان؟ لا؛ لم تعد الأضلاع متناسبة.



36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تكتشف في هذه المسألة تشابه المربّعات.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مربّعات مختلفة الأبعاد، وسمها $ABCD$, $PQRS$, $WXYZ$. وقس طول ضلع كل مربّع وسّجل الأطوال على المربعات. انظر ملحق الإجابات

b) **جدوليًا:** احسب النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لكل زوج مربعات فيما يأتي ودوّنها في جدول: $ABCD$, $PQRS$; $PQRS$, $WXYZ$; $WXYZ$, $ABCD$. هل كل مربعين من المربعات متشابهان؟ انظر ملحق الإجابات

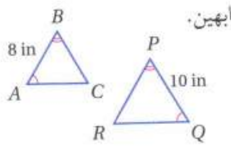
c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول تشابه جميع المربّعات. إجابة ممكنة: جميع المربعات متشابهة

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل
للتحقق من معامل التشابه أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين آخرين.

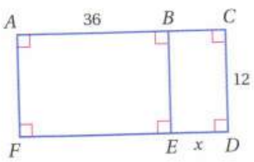
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** حسب كل من سعود وناصر معامل التشابه لمثلثين متشابهين. أيهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك. انظر الهامش



سعود	ناصر
$\frac{AB}{QP} = \frac{8}{10}$ $= \frac{4}{5}$	$\frac{QP}{AB} = \frac{10}{8}$ $= \frac{5}{4}$

38) **تحدٍ:** ما قيمة (قيم) x التي تجعل $BEFA \sim EDCB$ ؟ 4



39) **إجابة مفتوحة:** أوجد مثالًا مضادًا للعبارة الآتية: انظر الهامش

"جميع المستطيلات متشابهة"

تنبيه لحل سؤال

مسطرة: يتطلب السؤال 36 استعمال مسطرة.

تمثيلات متعدّدة: يستعمل الطلبة في السؤال 36 الرسوم الهندسيّة وجدولاً ووصفًا لفظيًا لاستقصاء تشابه المربعات.

إجابات:

37) كلاهما إجابته صحيحة، معامل تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle QPR$ يساوي $\frac{4}{5}$، ومعامل تشابه $\triangle QPR$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{5}{4}$.

39) إجابة ممكنة:

40) **تبرير:** ارسم مضلعين خماسيين منتظمين أطوال أضلاعهما مختلفة. هل المضلعان متشابهان؟ وهل كل مضلعين منتظمين ومتساويي عدد الأضلاع متشابهان؟ وضح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

41) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المضلعات المتطابقة والمضلعات المتشابهة. **انظر الهامش**

تدريب على الاختبار المعياري

42) **جبر** إذا كان المتوسط الحسابي للأعداد $4x, 3x, 12$ يساوي 18 ، فما قيمة x ؟ **A**

A 6 **C** 4
B 5 **D** 3

43) مستطيلان متشابهان. إذا كان معامل التشابه بينهما 3:5، ومحيط المستطيل الكبير 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير؟ **B**

A 29 m **C** 49 m
B 39 m **D** 59 m

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب مما يأتي: (مهارة سابقة)

44) $\frac{c-2}{c+3} = \frac{5}{4}$ $\mathbf{-23}$

45) $\frac{2}{4y+5} = \frac{-4}{y}$ $\mathbf{-\frac{10}{9}}$

46) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$ $\mathbf{\frac{-11}{14}}$

47) **هندسة إحداثية** أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square JKLM$ الذي رؤوسه $J(2, 5), K(6, 6), L(4, 0), M(0, -1)$. (الدرس 2-5) **(3, 2.5)**

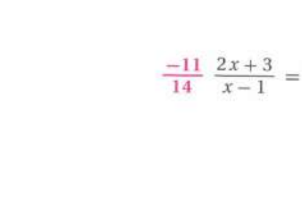
اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (الدرس 4-4)

48) إذا كان $3x > 12$ ، فإن $x > 4$. $\mathbf{x \leq 4}$

49) $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$ $\mathbf{\overline{PQ} \ncong \overline{ST}}$

50) منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين هو أيضًا ارتفاع للمثلث. **منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين ليس ارتفاعًا للمثلث.**

في الشكل المجاور، أوجد قياس كل من الزوايا الآتية. (الدرس 2-3)



51) $m\angle 1$ $\mathbf{128°}$

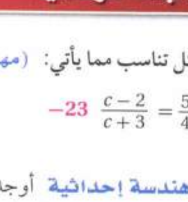
52) $m\angle 2$ $\mathbf{52°}$

53) $m\angle 3$ $\mathbf{68°}$

استعد للدرس اللاحق

جبر أوجد قيمة x وطول كل ضلع في كلٍّ من المثلثين الآتيين: (الدرس 1-3)

54)



$\mathbf{x = 5, JK = JL = KL = 12}$

55)

$\mathbf{x = 3, BC = 10, CD = 10, BD = 5}$

4 التقويم

تعلّم لاحق: اسأل الطلبة أن يتوقعوا كيف يمكن أن يساعدهم الدرس الحالي حول المضلّعات المتشابهة في فهم الدرس الآتي حول المثلثات المتشابهة. وما أوجه التشابه فيهما؟ وما أوجه الاختلاف؟

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلبة للدرس 1–6 ، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

إجابات:

41) إجابة ممكنة: يكون المضلعان متطابقين إذا كان لهما الأبعاد نفسها والشكل نفسه. وفي المضلعين المتطابقين تكون الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متطابقة. وعندما يكون المضلعان متشابهين فإن زواياهما المتناظرة متطابقة وأضلاعهما المتناظرة متناسبة. والمضلعات المتطابقة تكون متشابهة أيضًا؛ لأن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة والأضلاع المتناظرة تكون متناسبة.
ولا يكون المضلعان المتشابهان متطابقين إلاّ إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة تساوي 1.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة استعمال برمجية معالج النصوص (word) ، وأن يجربوا المضلعات المختلفة التي تقدمها البرمجية. واطلب إليهم أن يختاروا شكلًا ما ، وأن يكوّنوا شكلًا مشابهًا له. وذلك بأن ينسخوا الشكل الأصلي ثم يغيّروا مقياس الشكل مما ينتج عنه شكل آخر مشابه. وإحدى طرق التحقق من التشابه وضع الشكلين على بعضهما بحيث ينطبق رأسان من رؤوسهما فالزوايا المتناظرة يجب أن تكون متطابقة.

6-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2

استعمال نظريات التطابق AAS, SSS, SAS لإثبات تطابق مثلثين.

الدرس 6-2

تحديد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلّمة التشابه AA ونظريتي التشابه SAS , SSS.

استعمال تشابه المثلثات لحل المسائل.

ما بعد الدرس 6-2

تبرير علاقات تشابه المثلثات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

أطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما العلاقة بين زوايا المثلثين المتشابهين؟ الزوايا متطابقة.
- هل المثلث الجديد الذي رسمه جميل يطابق المثلث الأصلي؟ لا، لأن أطوال الأضلاع ليست متساوية.
- نسخ جميل زاويتين من المثلث الأصلي. هل الزاوية الثالثة هي نفسها في كلا المثلثين؟ لماذا؟ نعم؛ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$.

6-2 المثلثات المتشابهة
Similar Triangles

فيما سبق:

درستُ استعمال المسلمتين SSS, SAS والنظرية AAS لإثبات تطابق مثلثين.

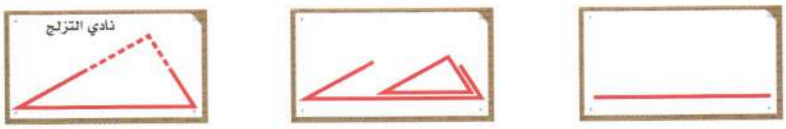
والآن:

- أحدّد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريتي التشابه SSS, SAS.
- استعمل المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

أراد جميل أن يرسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلج على ملصق كبير. فبدأ أولًا برسم قطعة مستقيمة أسفل الملصق. ثم استعمل نسخة من المثلث الأصلي لينسخ زاويتي القاعدة، ثم مدّ الضلعين غير المشتركين للزاويتين.



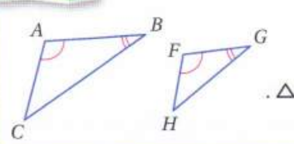
تحديد المثلثات المتشابهة: تعلمت في الفصل الثالث اختبارات تحديد ما إذا كان مثلثان متطابقين أم لا. ولتشابه المثلثات اختبارات أيضًا. ويبيّن المثال السابق أنه إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن المثلثين متشابهان.

مسلمة 6.1 التشابه بزاويتين (AA)

أضف إلى مطويتك

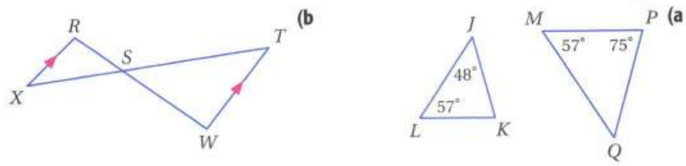
إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle G$ ، فإن $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.



مثال 1 استعمال مسلمة التشابه AA

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.



a) بما أنّ $m\angle L = m\angle M$، فإن $\angle L \cong \angle M$. ومن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون $57 + 48 + m\angle K = 180$ ؛ إذن $m\angle K = 75$. وبما أنّ $m\angle P = 75$ ، فإنّ $\angle K \cong \angle P$ ؛ إذن $\triangle LJK \sim \triangle MQP$ وفق المسلمة AA.

b) $\angle RSX \cong \angle WST$ وفق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس. ولأن $\overline{RX} \parallel \overline{TW}$ فإنّ $\angle R \cong \angle W$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا؛ إذن $\triangle RSX \sim \triangle WST$ وفق المسلمة AA.

تحقق من فهمك

لا ، لا يوجد زاويتان في أحد المثلثين مطابقتان لزاويتين في المثلث الآخر

نعم؛ $\angle L \cong \angle L$, $\angle LJK \cong \angle LPQ$ ، إذن $\triangle KLJ \sim \triangle QLP$

مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (80, 85)	• تنويع التعليم ص (80, 85)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (11)	• كتاب التمارين ص (11)	• كتاب التمارين ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

إرشادات للدراسة

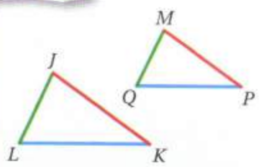
رسم الأشكال
قد يساعدك إعادة رسم المثلثين المتشابهين بحيث تظهر الأضلاع المتناظرة بالاتجاه نفسه.

يمكنك استعمال مسلمة التشابه AA لإثبات النظريتين الآتيتين:

نظريتان

أضف إلى مطويتك

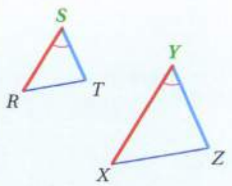
6.2 التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)



إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان $\frac{JK}{MP} = \frac{KL}{PQ} = \frac{LJ}{QM}$ ، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.

6.3 التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)



إذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين، فإنّ المثلثين متشابهان.

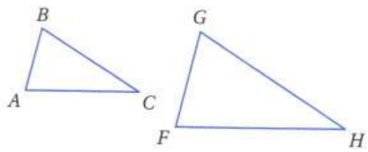
مثال: إذا كان $\frac{RS}{XY} = \frac{ST}{YZ}, \angle S \cong \angle Y$ ، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

سوف تبرهن النظرية 6.3 في السؤال 17

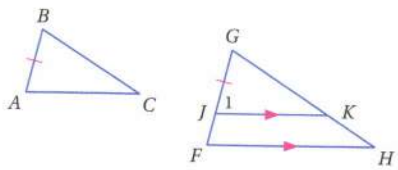
برهان النظرية 6.2

المعطيات: $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$



برهان حرّ:



عيّن النقطة J على $\overline{FG}$ بحيث يكون $JG = AB$.
ارسم $\overline{JK}$ بحيث يكون $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$.
سمِّ $\angle GJK$ بالرمز $\angle 1$.

بما أنّ $\angle G \cong \angle G$ وفق خاصية الانعكاس،
و $\angle F \cong \angle 1$ وفق مسلمة الزوايا المتناظرة،
فإنّ $\triangle GJK \sim \triangle GFH$ وفق مسلمة التشابه AA .

ومن تعريف المضلعات المتشابهة يكون $\frac{JG}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}$. وبالتعويض ينتج أن:
$\frac{AB}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}$.

وبما أن $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$ ، فإنه يمكننا استنتاج أنّ $\frac{GK}{GH} = \frac{BC}{GH}, \frac{JK}{FH} = \frac{AC}{FH}$. وهذا يعني أن $GK = BC, JK = AC$ ، لذلك $\overline{GK} \cong \overline{BC}, \overline{JK} \cong \overline{AC}$.

ومن مسلّمة التطابق SSS يكون $\triangle ABC \cong \triangle JGK$.

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\angle 1 \cong \angle A, \angle B \cong \angle G$. وبما أن $\angle 1 \cong \angle F$ فإن $\angle A \cong \angle F$ وفق خاصية التعدّي؛ إذن ومن مسلمة التشابه AA يكون $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

تحديد المثلثات المتشابهة

الأمثلة 3-1 تبيّن كيفيّة استعمال النظريات والمسلّمات لإثبات تشابه مثلثين.

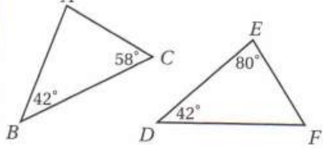
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقّق من فهمك" بعد كلّ مثال للتحقّق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

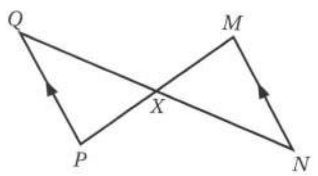
1 حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.

a)



حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون $m\angle A = 80°$. وبما أن $\angle A \cong \angle E , \angle B \cong \angle D$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ حسب مسلمة التشابه AA.

b)



$\angle QXP \cong \angle NXM$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس، وبما أن $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ فإن $\angle Q \cong \angle N$. إذن $\triangle QXP \sim \triangle NXM$ حسب مسلّمة التشابه AA .

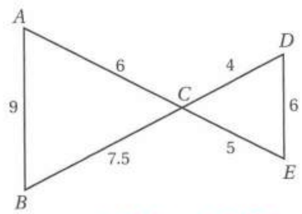
المحتوى الرياضي

مقارنة: بيّن للطلبة أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلّمات تطابق المثلثات ونظرياته في الفصل 3 ومسلمة التشابه ونظرياته في هذا الفصل. وأكّد على أنّه يكفي أن يكون زوجان من الزوايا المتناظرة في المثلثين متطابقين ليكون المثلثان متشابهين، الاّ أن أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاث يجب أن تكون متناسبة.

مثالان إضافيان

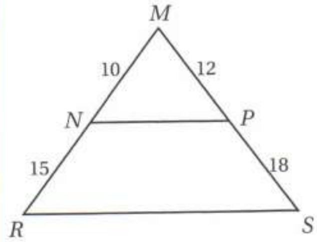
حدّد ما إذا كان المثلثان في الشكلين أدناه متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

(a



$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ حسب نظرية التشابه SSS .

(b



$\triangle MNP \sim \triangle MRS$ حسب نظرية التشابه SAS.

في $\triangle RST$, $\triangle XYZ$ إذا كان: $\frac{RS}{XY} = \frac{2}{3}$ ، فأيّ مما يأتي كافٍ لإثبات أن المثلثين متشابهان؟ B

A $\frac{RT}{XZ} = \frac{ST}{YZ}$ **C** $\angle R \cong \angle S$

B $\frac{RS}{XY} = \frac{RT}{XZ} = \frac{ST}{YZ}$ **D** $\frac{RS}{RT} = \frac{XY}{XZ}$

تنبيه!

الزوايا المتطابقة: لا يمكن استعمال نظريّة التشابه SAS إلاّ إذا كانت الزاوية محصورة بين الضلعين المتناظرين لكل مثلث منهما.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعليّة: استعمل السبورة التفاعلية، وارسم مثلثين متشابهين وغير متطابقين، واستعملهما؛ لتبين للطلاب تطابق زاويتين في أحدهما مع زاويتين في المثلث الآخر. (المسلمة AA)، وبيِّن لهم أن ذلك يكفي؛ لإثبات أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد أطوال أضلاع كلٍّ من المثلثين، وبيِّن لهم أنها متناسبة.

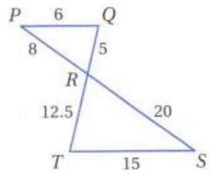
إرشادات للدراسة

الأضلاع المتناظرة لتحديد الأضلاع المتناظرة لمثلثين، ابدأ بمقارنة أطول ضلعين ثم الضلعين التاليين لهما طولاً وأخيرًا أقصر ضلعين.

مثال 2 استعمال نظريتي التشابه SSS , SAS

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. و وضّح إجابتك.

(a

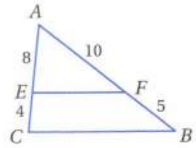


$\frac{PR}{SR} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, $\frac{PQ}{ST} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{QR}{TR} = \frac{5}{12.5} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$ ؛

إذن $\triangle PQR \sim \triangle STR$ وفق نظرية التشابه SSS .

(b



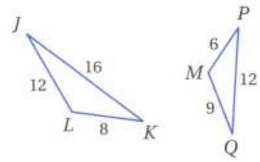
من خاصية الانعكاس $\angle A \cong \angle A$.

$\frac{AF}{AB} = \frac{10}{10+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

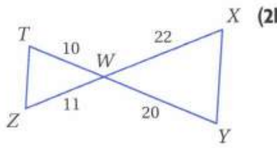
بما أن طولي الضلعين اللذين يحصران $\angle A$ في $\triangle AEF$ متناسبان مع طولي الضلعين المناظرين لهما في $\triangle ACB$ ، فإن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ وفق نظرية التشابه SAS .

تحقق من فهمك

(2A



(2B



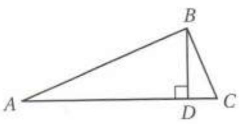
2A) نعم؛ $\triangle JLK \sim \triangle QMP$ وفق نظرية التشابه SSS حيث إن $\frac{JL}{QM} = \frac{LK}{MP} = \frac{JK}{QP} = \frac{4}{3}$

2B) نعم؛ $\triangle TWZ \sim \triangle YWX$ وفق نظرية التشابه SAS حيث إن $\angle W \cong \angle W$, $\frac{TW}{YW} = \frac{WZ}{WX} = \frac{1}{2}$

يمكنك أن تُقرّر أي الشروط كافية لإثبات تشابه مثلثين.

مثال 3 من الاختبار المعياري

في الشكل المجاور، $\angle ADB$ زاوية قائمة. أيّ المعطيات الآتية غير كافٍ لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle BDC$؟



A $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ **C** $\angle ABD \cong \angle C$

B $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$ **D** $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{BC}$

إرشادات للاختبار

تحديد اللا أمثلة تتطلب أسئلة الاختبار منك أحيانًا أن تجد اللامثال كما في السؤال المجاور. ويتعين عليك أن تختبر البدائل واحدًا تلو الآخر إلى أن تجد اللامثال. وإذا رغبت في أن تتحقق من إجابتك تأكد أن البدائل الأخرى صحيحة.

اقرأ سؤال الاختبار

تعلمْ في هذا السؤال أنّ $\angle ADB$ قائمة، ومطلوب منك أن تحدد المعلومة الإضافية التي لا تعد كافية لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle BDC$.

حُل سؤال الاختبار

بما أنّ $\angle ADB$ قائمة، فإنّ $\angle CDB$ قائمة أيضًا. ولأنّ جميع الزوايا القائمة متطابقة فإن $\angle ADB \cong \angle CDB$.

اختبر كلًّا من بدائل الإجابة حتى تجد واحدًا منها لا يقدّم شرطًا إضافيًّا كافيًا لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle BDC$.

البديل A: إذا كان $\angle ADB \cong \angle CDB$, $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ ، فإنّ $\triangle ADB \sim \triangle CDB$ وفق نظرية التشابه SAS .

البديل B: إذا كان $\angle ADB \cong \angle CDB$, $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$ ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ لأنّ الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ ليست $\angle ADB$؛ إذن فإجابة السؤال هي B .

80 الفصل 6 التشابه

✓ **تحقق من فهمك**

3) في $\triangle FGH$ ، $\triangle JKL$ ، إذا كانت $\angle J = \angle F$ ، فأيُّ المعطيات الآتية كافية لإثبات تشابه هذين المثلثين؟ **B**

A $\frac{KL}{GH} = \frac{JL}{FH}$ **B** $\frac{JL}{JK} = \frac{FH}{FG}$ **C** $\frac{JK}{FG} = \frac{KL}{GH}$ **D** $\frac{JL}{JK} = \frac{GH}{FG}$

استعمال المثلثات المتشابهة : تشابه المثلثات مثل تطابق المثلثات يحقق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي.

نظرية 6.4 خصائص التشابه

أضف إلى مطويتك

خاصيّة الانعكاس للتشابه : $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

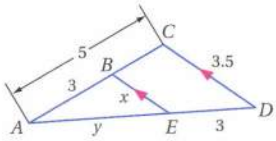
خاصيّة التماثل للتشابه : إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، فإنَّ $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتشابه : إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \triangle DEF \sim \triangle XYZ$
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

سوف تبرهن النظرية **6.4** في السؤال **18**

مثال 4 أجزاء المثلثات المتشابهة

أوجد قيمة BE, AD في الشكل المجاور.



بما أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\angle ABE \cong \angle BCD, \angle AEB \cong \angle EDC$ لأنّها زوايا متناظرة. ومن مسلمة التشابه AA يكون $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$ $AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$

$3.5 \cdot 3 = 5 \cdot x$ خاصية الضرب التبادلي

$2.1 = x$

وعليه فإن، BE يساوي 2.1

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$ $AC = 5, AB = 3, AD = y + 3, AE = y$

$5 \cdot y = 3(y + 3)$ خاصية الضرب التبادلي

$5y = 3y + 9$ خاصية التوزيع

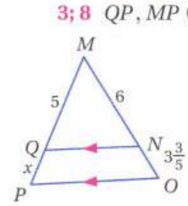
$2y = 9$ بطرح $3y$ من كلا الطرفين

$y = 4.5$ بقسمة كلا الطرفين على 2

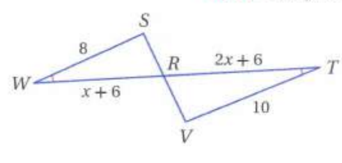
وعليه فإن، $AD = y + 3 = 7.5$

✓ **تحقق من فهمك** أوجد كل طولٍ فيما يأتي.

4A) QP, MP **3; 8**



4B) WR, RT **8; 10**



إرشادات للدراسة

التناسبات

يمكن كتابة تناسبات أخرى صحيحة في المثال **4** ، هذا أحدها: $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BE}$.

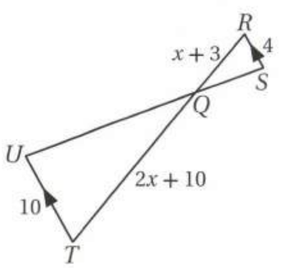
استعمال المثلثات المتشابهة

المثالان 5 , 4 يبيّنان كيفيّة استعمال خصائص المثلثات المتشابهة لإيجاد أطوا غير معلومة.

مثال إضافي

4 **جبر:** إذا كان $\overline{RS} \parallel \overline{UT}$ ، $RS = 4, RQ = x + 3,$ $QT = 2x + 10, UT = 10$. فأوجد RQ , QT.

$RQ = 8; QT = 20$



تنويع التعليم

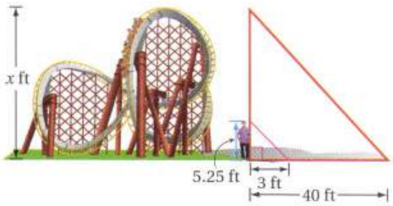
ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون: اطلب إلى كل طالب أن يختار شريكًا له وأن يعملا معًا لإيجاد ارتفاع مبنى المدرسة بقياس الظل واستعمال المثلثات المتشابهة.

مثال 5 من واقع الحياة — القياس غير المباشر

أفعوانية: يريد تركي أن يقدّر ارتفاع الأفعوانية في مدينة الألعاب، فلاحظ أنه عندما كان طول ظله 3 ft كان طول ظل الأفعوانية 40 ft . إذا كان طول تركي 5 ft و 3 in ، فكم قدمًا ارتفاع الأفعوانية؟

افهم: ارسم مخططًا توضيحيًا. 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft.



خطط: في مسائل الظل، افترض أنّ الزاويتين المتكونتين من شعاعي الشمس وأيّ جسمين رأسيين تكونان متطابقتين، وأن المثلث المتشكل من الجسم والأرض وشعاع الشمس المار بقمة الجسم قائم الزاوية. وبما أن هناك زوجين من الزوايا المتطابقة فإنّ المثلثين القائمي الزاوية متشابهان وفق مسلمة التشابه AA؛ إذن يمكن كتابة التناسب الآتي:

$$\frac{\text{طول ظل تركي}}{\text{طول ظل الأفعوانية}} = \frac{\text{طول تركي}}{\text{ارتفاع الأفعوانية}}$$

حل: افترض أن ارتفاع الأفعوانية يساوي x وعوض القيم المعلومة.

$\frac{5.25}{x} = \frac{3}{40}$	بالتعويض
$3 \cdot x = 40(5.25)$	خاصّية الضرب التبادلي
$3x = 210$	بالتبسيط
$x = 70$	بقسمة الطرفين على 3

إذن ارتفاع الأفعوانية يساوي 70 ft .

تحقق: طول ظل الأفعوانية يساوي 13.3 مرة تقريبًا من طول ظل تركي. تحقق لترى ما إذا كان ارتفاع الأفعوانية يساوي 13.3 مرّة من طول تركي $\frac{70\text{ ft}}{5.25\text{ ft}} \approx 13.3$ ✔

تحقق من فهمك

5) **بنايات:** يقف منصور بجوار بناية، وعندما كان طول ظلّه 9 ft، كان طول ظل البناية 322.5 ft . إذا كان طول منصور 6 ft، فكم قدمًا ارتفاع البناية؟ **215 ft**

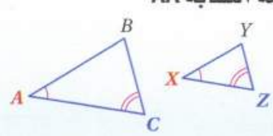
إرشادات لحل المسألة

حدّد الإجابات المعقولة
عندما تحل مسألة، تحقق من معقوليّة إجابتك. في هذا المثال، طول ظل تركي أكبر بقليل من نصف طوله. وكذلك طول ظل الأفعوانية أكبر من نصف ارتفاعها بقليل. ولذا فإن الإجابة معقولة.

ملخص المفهوم — تشابه المثلثات

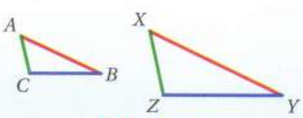
أضف إلى مطويتك

مسلمة التشابه AA



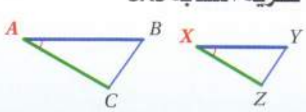
إذا كانت $\angle A \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Z$
فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

نظرية التشابه SSS



إذا كانت $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$
فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

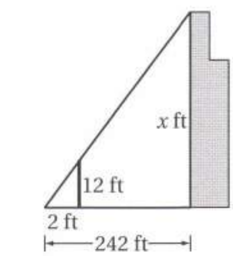
نظرية التشابه SAS



إذا كانت $\frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX}$, $\angle A \cong \angle X$
فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

مثال إضافي

أبراج: أراد حمود أن يجد ارتفاع برج. فقاس طول ظل عمود إنارة ارتفاعه 12 ft عند الساعة الواحدة بعد الظهر فكان 2 ft ، وفي اللحظة نفسها، كان طول ظلّ البرج 242 ft. فما ارتفاع البرج؟ 1452 ft

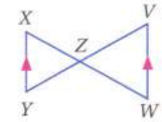


(ليس مرسومًا وفق مقياس رسم)

تأكد

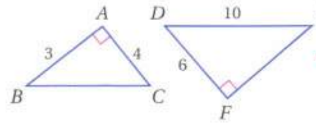
المثالان 1, 2 حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

(1



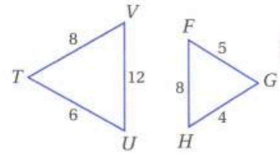
نعم؛ $\triangle YXZ \sim \triangle VWZ$ وفق مسلمة التشابه AA

(2



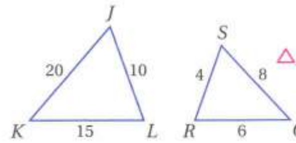
نعم؛ $\triangle BAC \sim \triangle DFE$ وفق نظرية التشابه SAS

(3



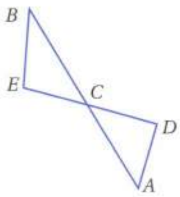
لا؛ الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة

(4



نعم؛ $\triangle JLK \sim \triangle SRQ$ وفق نظرية التشابه SSS

مثال 3 (5 **اختيار من متعدد:** في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ تقطع $\overline{DE}$ عند النقطة C.
أيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أن $\triangle ADC \sim \triangle BEC$؟ **C**



A $\angle DAC$, $\angle ECB$ متطابقتان.

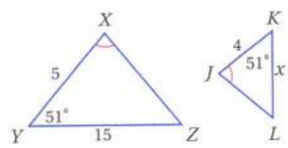
B $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ متطابقتان.

C $\overline{AD}$, $\overline{EB}$ متوازيتان.

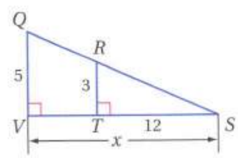
D $\angle CBE$ زاوية قائمة.

مثال 4 **جبر:** عيّن المثلثين المتشابهين، وأوجد الطول المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

(6 KL **$\triangle XYZ \sim \triangle JKL$; 12**



(7 VS **$\triangle QVS \sim \triangle RTS$; 20**

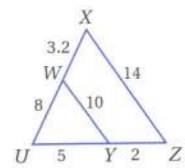


مثال 5 (8 **اتصالات:** طول ظلّ برج اتصالات في لحظة معينة 100 ft . وبجواره لوحة تحذيرية مثبتة على عمود طول ظله في اللحظة ذاتها 3 ft و 4 in . إذا كان ارتفاع عمود اللوحة 4 ft و 6 in ، فما ارتفاع البرج؟ **135 ft**

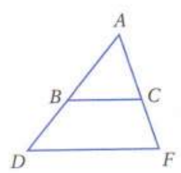
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وإلّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ ووضّح إجابتك. **9–11) انظر الهامش**

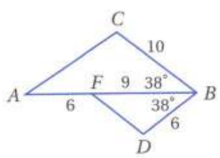
(9



(10



(11



3 التدريب

التقويم التكوينيّ

استعمل الأسئلة 1–8 للتحقق من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم .

إجابات:

9) نعم؛ $\triangle XUZ \sim \triangle WUY$ وفق نظرية التشابه SSS

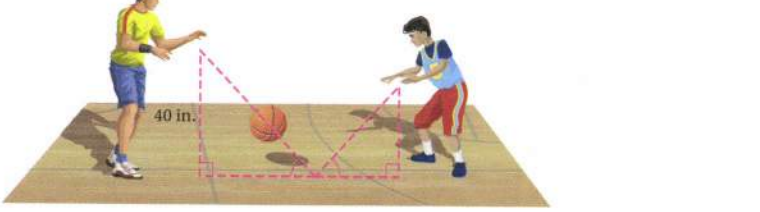
10) لا؛ يجب أن تكون $\overline{BC}$, $\overline{DF}$ متوازي[ين] حتى يكون $\triangle DAF \sim \triangle BAC$ حس[ب] مسلمة التشابه AA .

11) نعم؛ $\triangle CBA \sim \triangle DBF$ وفق نظرية التشابه SAS .

تنويع الواجبات المنزلية

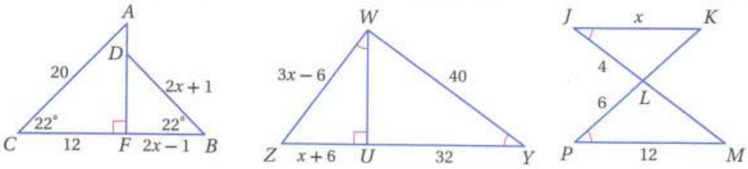
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-13 ، 16 ، 21 ، 27 ، 29-44
ضمن المتوسط	9-15 فردي ، 12 ، 16-19 ، 23-27 ، 29-44
فوق المتوسط	17-40 ، (41-44 اختياري)

12) **رياضة** رمى عبد الله الكرة لترتد نحو أحمد، فارتطمت بسطح الأرض على بُعد $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما، وكانت الزاويتان الناتجتان عن مسار الكرة وسطح الأرض متطابقتين. إذا رمى عبدالله الكرة من ارتفاع 40 in عن سطح الأرض، فعلى أيّ ارتفاع سيلتقطها أحمد؟ **20 in**



مثال 4 **جبر:** عيِّن المثلثين المتشابهين. ثمّ أوجد الطول المطلوب في كل مما يأتي:

13) JK 14) WZ, UZ 15) DB, CB



13) $\triangle JLK \sim \triangle PLM; 8$

14) $\triangle WUZ \sim \triangle YUW; 30, 18$

15) $\triangle DFB \sim \triangle AFC; 5, 15$

مثال 5 16) **رياضة:** يقف أيمن بجوار مرمى كرة السلّة. إذا كان طول أيمن 5 ft و 11 in وطول ظلّه 2 ft، وكان طول ظل مرمى كرة السلّة 4 ft و 4 in فما ارتفاع المرمى تقريبًا؟ **12.8 ft تقريبًا**

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

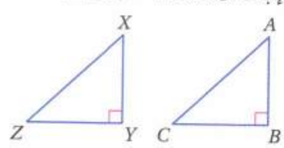
17) النظريّة 6.3 انظر الهامش

18) النظريّة 6.4 انظر ملحق الإجابات

19) **المعطيات:** $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ قائما الزاوية

$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$ انظر ملحق الإجابات

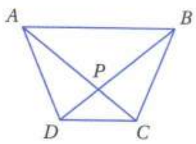
المطلوب: إثبات أنّ $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$



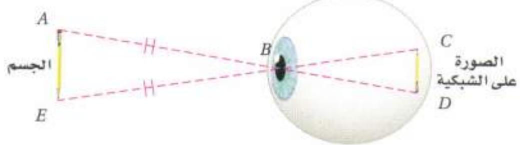
20) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف.

المطلوب: إثبات أن $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$

انظر ملحق الإجابات



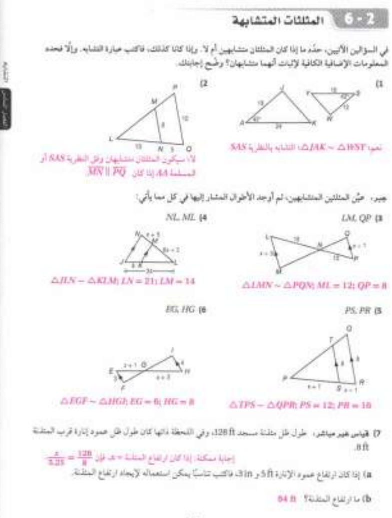
21) **رؤية:** عندما نظر إلى جسم فإن صورته تُسْقَطُ على الشبكيّة عبر البؤبؤ. وتكون المسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الجسم وأسفله متساويتين، والمسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الصورة وأسفلها على الشبكية متساويتين أيضًا. هل المثلثان المتكوّنان بين الجسم والبؤبؤ وبين البؤبؤ والصورة متشابهان؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش



الربط مع الحياة

يحدث قصر النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء أمام الشبكية، ويحدث طول النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء خلف الشبكية.

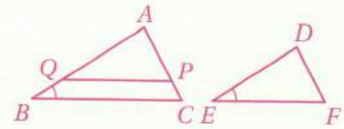
كتاب التمارين، ص (11)



إجابات:

المعطيات: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$، $\angle B \cong \angle E$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$، $\angle B \cong \angle E$ (معطيات)

2) $\overline{QP} \parallel \overline{BC}, \overline{QP} \cong \overline{EF}$ (بالرسم)

3) $\angle APQ \cong \angle C, \angle AQP \cong \angle B$ (مسلّمة الزوايا المتناظرة)

4) $\angle AQP \cong \angle E$ (خاصية التعدّي)

5) $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ (مسلّمة التشابه AA)

6) $\frac{AB}{AQ} = \frac{BC}{QP}$ (تعريف المثلثات المتشابهة)

7) $AB \cdot QP = AQ \cdot BC$; $AB \cdot EF = DE \cdot BC$ (الضرب التبادلي)

8) $QP = EF$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

9) $AB \cdot EF = AQ \cdot BC$ (بالتعويض)

10) $AQ \cdot BC = DE \cdot BC$ (بالتعويض)

11) $AQ = DE$ (خاصيّة القسمة)

12) $\overline{AQ} \cong \overline{DE}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

13) $\triangle AQP \cong \triangle DEF$ (SAS)

14) $\angle APQ \cong \angle F$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

15) $\angle C \cong \angle F$ (خاصيّة التعدّي)

16) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (مسلمة التشابه AA)

21) نعم؛ إجابة ممكنة: $\overline{AB} \cong \overline{EB}$, $\overline{CB} \cong \overline{DB}$,

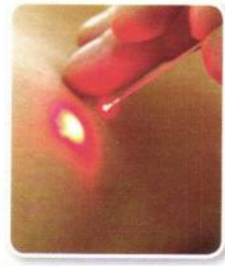
إذن $\frac{AB}{CB} = \frac{EB}{DB}$ و $\angle ABE \cong \angle CBD$ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان لذلك؛ $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ وفق نظرية التشابه SAS.

هندسة إحداثية: إحداثيات رؤوس المثلثين $\triangle XYZ, \triangle WYV$ هي $X(-1, -9), Y(5, 3), Z(-1, 6), W(1, -5), V(1, 5)$.

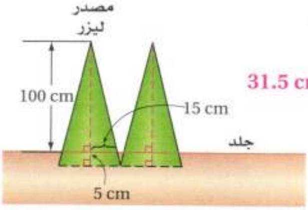
22) مثّل المثلثين بيانيًا، وأثبت أنّ $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$. انظر ملحق الإجابات

23) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. $\frac{3}{2}$

24) **قياس:** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. وطول كل ضلع في $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر في $\triangle ABC$، ومساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\ in^2$، فما مساحة $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين مساحتي $\triangle ABC$، $\triangle JKL$، ومعامل التشابه بينهما؟ $10\ in^2$؛ النسبة بين المساحتين تساوي مربع معامل التشابه.

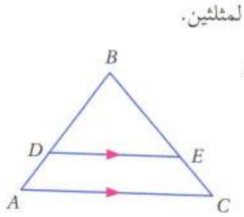

الربط مع الحياة
تستعمل في بعض العلاجات الطبيّة أشعة الليزر التي تلامس الجلد وتخترقه مكوّنة مثلثات متشابهة.

25) **علاج:** استعمل معلومات الربط بالحياة والشكل المجاور لإيجاد المسافة التي يجب أن تفصل بين مصدري أشعة الليزر حتى تكون المنطقتان المعالجتان بكلٍ من المصدرين غير متداخلتين. 31.5 cm



26) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة الأجزاء المتناسبة لمثلثين.

a) **هندسيًا:** ارسم $\triangle ABC$ وارسم $\overline{DE}$ بحيث تكون موازيةً لـ $\overline{AC}$ كما في الشكل المجاور. انظر الهامش



b) **جدوليًا:** قس الأطوال AD, DB, CE, EB وسجلها في جدول. وأوجد النسبتين $\frac{AD}{DB}$، $\frac{CE}{EB}$ وسجّلهما في الجدول نفسه. انظر الهامش

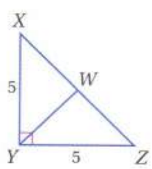
c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين. إجابة ممكنة: القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين أطوالها متناسبة.

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر الهامش

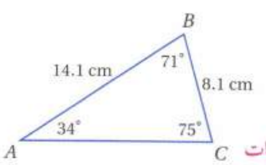
27) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلمة التشابه AA ونظرية التشابه SSS ونظرية التشابه SAS.

28) **تحدٍّ:** إذا كانت $\overline{YW}$ ارتفاعًا لـ $\triangle XYZ$، فأوجد YW. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$



29) **تبرير:** قياسات زوايا مثلثين متشابهين هي: $45°, 85°, 50°$. وأطوال أضلاع أحدهما $3, 4, 5.2$ وحدات وأطوال أضلاع المثلث الآخر $x, x - 1.5, x + 1.8$ وحدة، أوجد قيمة x. 6

30) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا مشابهًا لـ $\triangle ABC$ المجاور، ووضح كيف تعرف أنّهما متشابهان. انظر ملحق الإجابات



31) **اكتب:** اشرح طريقة يمكنك استعمالها لرسم مثلث يشابه مثلثًا معلومًا وأطوال أضلاعه مثلا أطوال أضلاع المثلث المعلوم. انظر ملحق الإجابات

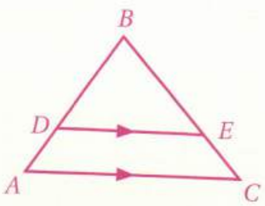
تنبيه لحل سؤال

المسطرة والمنقلة: يتطلب السؤال 26 استعمال مسطرة ومنقلة.

تمثيلات متعدّدة: يستعمل الطلبة في السؤال 26، رسومًا هندسيّة وجدولًا ووصفًا لفظيًا لاستقصاء عناصر المثلث المتناسبة.

إجابات:

26a) إجابة ممكنة:



26b) إجابة ممكنة:

الأطوال		النسب	
AD	0.9 cm	$\frac{AD}{DB}$	$\frac{1}{2}$
DB	1.8 cm		
CE	1.1 cm	$\frac{CE}{EB}$	$\frac{1}{2}$
EB	2.2 cm		

27) إجابة ممكنة: مسلمة التشابه AA ونظرية التشابه SSS ونظرية التشابه SAS كلّها اختبارات يمكن استعمالها لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وتستعمل مسلمة التشابه AA عندما يكون معلومًا أن زوجين من زوايا المثلثين متطابقان وتستعمل نظرية التشابه SSS عندما تكون أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين معلومة. وتستعمل نظرية التشابه SAS عندما يكون معلوماً أن طولي ضلعين في أحد المثلثين متناسبان مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاوية المحصورة بينهما متطابقة في كلا المثلثين.

تنويع التعليم

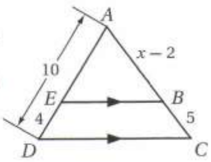
ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة رسم مثلث قائم الزاوية في مستوى إحداثي وتسمية كل رأس بزوج مرتّب. ثم اطلب إليهم رسم مثلث آخر قائم الزاوية أكبر من الأول ومتناسبًا معه. ثم اطلب إليهم كتابة برهان حرٍّ لبيان أن المثلثين متشابهان.

إجابة ممكنة: بما أن طولي ضلعين في المثلث متناسبان مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر والزاويتين المحصورتين متطابقتان، فالمثلثان متشابهان.

تدريب على الاختبار المعياري

32) **إجابة مطوّلة:** في الشكل أدناه $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$.



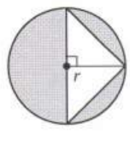
a) اكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد قيمة x.

b) أوجد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

a) $\frac{6}{x-2} = \frac{10}{x+3}$

b) 9.5; 7.5

33) **جبر:** أيّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟ D



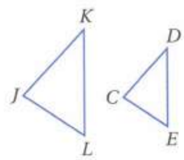
A πr^2　　C $\pi r^2 + r$

B $\pi r^2 + r^2$　　D $\pi r^2 - r^2$

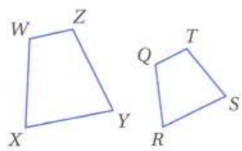
مراجعة تراكمية

اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كل مما يأتي: (الدرس 6-1) 34–36) انظر الهامش

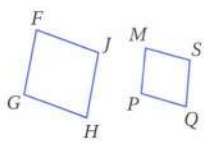
34) $\triangle JKL \sim \triangle CDE$



35) $WXYZ \sim QRST$



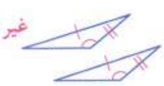
36) $FGHJ \sim MPQS$



37) **تانجرام:** تتكون مجموعة التانجرام في الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلث قائم الزاوية متوسط المقاس، وشكل رباعي. كيف يمكنك أن تحدد نوع الشكل الرباعي؟ وضّح إجابتك. (الدرس 5-3) انظر الهامش.

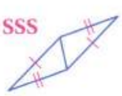
حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات تطابق المثلثين في كل مما يأتي، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق. (الدرس 4-3)

38) غير ممكن



39) غير ممكن

40) SSS



استعد للدرس اللاحق

حل كل تناسب مما يأتي:

41) $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$ 12

42) $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$ 4.4

43) $\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$ 52.3

44) $\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$ 2.75

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة أن يوضّحوا طريقة استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد ارتفاع شجرة طويلة. واطلب إليهم أن يسلّموا أوراقهم عند خروجك من غرفة الصف.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرس 2–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات:

34) $\angle L \cong \angle E, \angle K \cong \angle D, \angle J \cong \angle C;$

$$\frac{KL}{DE} = \frac{JK}{CD} = \frac{JL}{CE}$$

35) $\angle X \cong \angle R, \angle W \cong \angle Q,$

$\angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T;$

$$\frac{WX}{QR} = \frac{ZY}{TS} = \frac{WZ}{QT} = \frac{XY}{RS}$$

36) $\angle G \cong \angle P, \angle F \cong \angle M,$

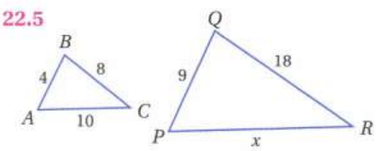
$\angle J \cong \angle S, \angle H \cong \angle Q;$

$$\frac{JH}{SQ} = \frac{GH}{PQ} = \frac{GF}{PM} = \frac{FJ}{MS}$$

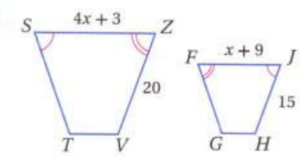
37) إجابة ممكنة: إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقين ومتوازيين. فإنّ الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع.

إذا كان المضلعان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين. فأوجد قيمة x. (الدرس 1-6)

1) 22.5



2) 3.4



3) اختيار من متعدد: إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km، فما المسافة الحقيقية بينهما؟
(الدرس 1-6) **C**

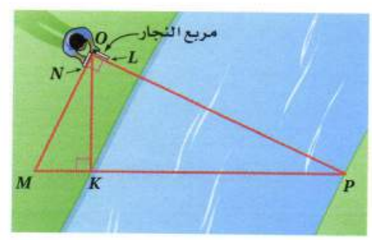
A 1211 km

B 964 km

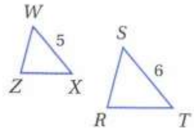
C 1176 km

D 1031 km

4) قياس: يستعمل عبدالله مربع النجارين لحساب عرض نهر كما في الشكل أدناه. إذا كان $OK = 4.5\,ft$, $MK = 1.5\,ft$، فأوجد المسافة KP عبر النهر. (الدرس 1-6) **13.5 ft**

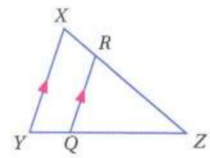


5) إذا كان $\triangle WZX \sim \triangle SRT$، $ST = 6$, $WX = 5$، فأوجد محيط $\triangle WZX$ إذا كان محيط $\triangle SRT$ يساوي 18 وحدة. (الدرس 2-6) **15 وحدة**

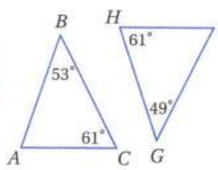


حدّد، ما إذا كان المثلثان في السؤالين 6, 7 متشابهين أم لا. وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. وإلاّ فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، وضح إجابتك. (الدرس 2-6)

6) نعم؛ $\triangle YXZ \sim \triangle QRZ$ بحسب مسلمة التشابه AA

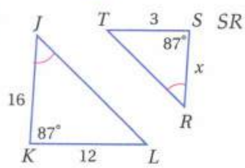


7) لا؛ الزوايا غير متطابقة. لذلك فالمثلثان غير متشابهين.

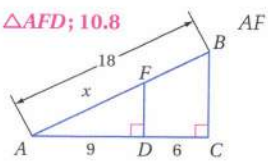


جبر عيّن المثلثين المتشابهين. ثمّ أوجد الطول المطلوب في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-6)

8) SR $\triangle JKL \sim \triangle RST; 4$



9) AF $\triangle ABC \sim \triangle AFD; 10.8$



الفصل 6 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (32)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدرسين 6-1, 6-2.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا: أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا: أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر: المصادر الآتية:	فاختر: أحد المصدرين الآتيين:
مراجعة الدرسين 2-6 ,1-6 .	تدريبات إعادة التعليم، ص (11 ,6).
تدريبات المهارات ، ص (13 ,8).	www.obeikaneducation.com
www.obeikaneducation.com	

6-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.

الدرس 6-3

استعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث وفي المستقيمات المتوازية.

ما بعد الدرس 6-3

تبرير علاقات تشابه المثلثات، مثّل نسب المثلث قائم الزاوية. باستعمال طرق مختلفة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- صف المسافة بين مستقيمين متوازيين. متساوية دائمًا
- لماذا تظهر المسافة بين الحافّة العليا والحافّة السفلى للخزائن وكأنها تصغر؟ إجابة ممكنة : يقترب المستقيمان في الصورة من بعضهما.
- هل المستقيمان المكوّنان من الحافّة العُليا والحافّة السفلى للخزائن في الصورة متوازيان؟ نعم

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة
Parallel Lines and Proportional Parts

فيما سبق:

درستُ استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.

والآن:

- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.

المفردات:

القطعة المنصفة لمثلث
midsegment of a triangle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل رسّامو الصور المتحركة طرائق عدّة لإضفاء خداع بصري على أعمالهم. كما يستعملون في الرسومات الثلاثية الأبعاد حقيقة كون الأجسام البعيدة تبدو أصغر من الأجسام القريبة إلى المشاهد. ولتحقيق هذا الخداع يستعمل الرسّامون نظرية التناسب في المثلث.

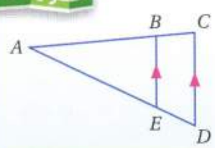
الأجزاء المتناسبة في المثلث: عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، فإنّه يمكن إثبات أن المثلثين الناتجين متشابهان، وذلك باستعمال مسلمة التشابه AA. وبما أن المثلثين متشابهان فإنّ أطوال أضلاعهما متناسبة.

نظريّة 6.5 نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنّه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.

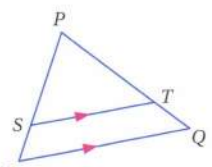
مثال: إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.



سوف تبرهن النظريّة 6.5 في السؤال 21

مثال 1 إيجاد طول ضلع

في $\triangle PQR$ ، إذا كان $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}, PT = 7.5, TQ = 3, SR = 2.5$ ، فأوجد PS .



استعمل نظريّة التناسب في المثلث.

$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$	نظرية التناسب في المثلث
$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$	بالتعويض
$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$	خاصية الضرب التبادلي
$3PS = 18.75$	بالضرب
$PS = 6.25$	بقسمة كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

1) في الشكل أعلاه، إذا كان $PT = 15$, $SR = 5$, $PS = 12.5$ ، فأوجد TQ . 6

مصادر الدرس 6-3

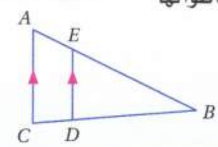
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (92)	• تنويع التعليم ص (96 ,92 ,91)	• تنويع التعليم ص (96 ,92 ,91)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (12)	• كتاب التمارين ص (12)	• كتاب التمارين ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

وعكس النظرّية 6.5 صحيح أيضًا، ويمكن إثباته باستعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث.

نظريّة 6.6 **عكس نظريّة التناسب في المثلث** أضف إلى مطويتك

إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

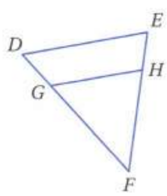
مثال: إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$.



سوف تبرهن النظرية 6.6 في السؤال 22

مثال 2 **تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين**

في $\triangle DEF$ إذا كان $DG = \frac{1}{3}GF, EH = 3, HF = 9$. فهل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$ ؟



يتعين عليك إثبات أنّ $\frac{DG}{GF} = \frac{EH}{HF}$ ، وذلك باستعمال عكس نظرية التناسب في المثلث.

أوجد كل نسبة في أبسط صورة. افترض أن $DG = x$ ، وبما أن $DG = \frac{1}{3}GF$ ، فإن $GF = 3x$.

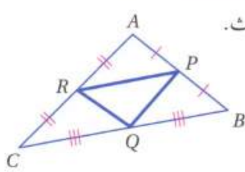
$$\frac{DG}{GF} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \qquad \frac{EH}{HF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

وبما أن $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ، فإن أطوال القطع متناسبة؛ إذن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$.

تحقق من فهمك

2) في الشكل أعلاه، إذا كان $DG = \frac{1}{2}GF, EH = 6, HF = 10$. فهل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$ ؟ لا

القطعة المنصّفة لمثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث. ولكل مثلث ثلاث قطع منصّفة. فالقطع المنصّفة لـ $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}, \overline{PQ}, \overline{RQ}$



ونظرية القطعة المنصّفة للمثلث هي حالة خاصّة من نظرية التناسب في المثلث.

إرشادات للدراسة

مثلث القطع المنصفة
تشكل القطع المنصفة الثلاث لمثلث مثلثًا يُسمى مثلث القطع المنصّفة.

نظرية 6.7 **نظريّة القطعة المنصّفة للمثلث** أضف إلى مطويتك

القطعة المنصفة للمثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

مثال: إذا كانت J, K نقطتي منتصف $\overline{FH}, \overline{HG}$ على الترتيب، فإن $\overline{JK} \parallel \overline{FG}, JK = \frac{1}{2}FG$.

سوف تبرهن النظرّية 6.7 في السؤال 23

الأجزاء المتناسبة في المثلث

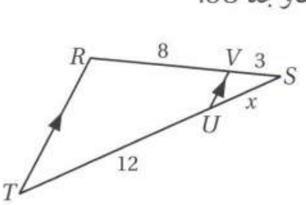
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية استعمال النظريات المتضمنة للأجزاء المتناسبة للمثلثات لإيجاد قياسات غير معلومة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم

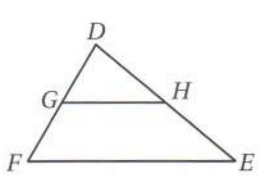
مثالان إضافيان

1 في $\triangle RST$، إذا كان $\overline{RT} \parallel \overline{VU}$ ، $SV = 3, VR = 8, UT = 12$. فأوجد SU.



$4\frac{1}{2}$

2 في $\triangle DEF$، إذا كان $DH = 18$, $HE = 36, DG = \frac{1}{2}GF$. فهل $\overline{GH} \parallel \overline{FE}$ ؟

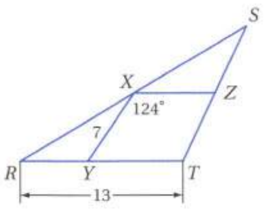


نعم؛ من المعلومات المعطاة ، $\frac{DG}{GF} = \frac{DH}{HE}$. ولأن أطوال القطع المستقيمة متناسبة فإن $\overline{GH} \parallel \overline{FE}$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثين متشابهين على السبورة ، ثم اسحب المثلث الأصغر إلى أعلى المثلث الأكبر لإظهار أن في المثلثين زوجًا من الأضلاع المتوازية. استعمل هذا الشكل وفكرة المثلثات المتشابهة لمساعدتك على أن توضح للطلاب أن المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلث يقسم الضلعين الآخرين إلى قطع مستقيمة متناسبة.

مثال 3 استعمال نظريّة القطعة المنصّفة للمثلث



في $\triangle RST$ ، إذا كانت $\overline{XY}, \overline{XZ}$ قطعتان منصّفتان ، فأوجد كل قياس مما يأتي:

XZ (a

$XZ = \frac{1}{2}RT$ نظرية القطعة المنصّفة للمثلث

$XZ = \frac{1}{2}(13)$ بالتعويض

$XZ = 6.5$ بالتبسيط

ST (b

$XY = \frac{1}{2}ST$ نظرية القطعة المنصّفة للمثلث

$7 = \frac{1}{2}ST$ بالتعويض

$14 = ST$ بضرب كلا الطرفين في 2

$m\angle RYX$ (c

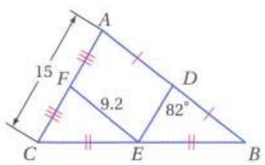
$\overline{XZ}$ قطعة متوسطة في $\triangle RST$ ، إذن $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

$\angle RYX \cong \angle YXZ$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

$m\angle RYX = m\angle YXZ$ تعريف تطابق الزوايا

$m\angle RYX = 124°$ بالتعويض

✓ تحقق من فهمك



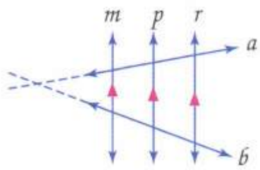
أوجد كل قياس مما يأتي معتمدًا على الشكل المجاور:

3A) DE 7.5

3B) DB 9.2

3C) $m\angle FED$ 82°

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

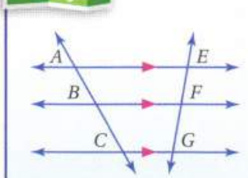


هناك حالة خاصّة أخرى لنظرية التناسب في المثلث تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، يقطعها قاطعان. لاحظ أنّه إذا مُدَّ القاطعان a, b فإنّهما يصنعان ثلاثة مثلثات لها ثلاثة أضلاع متوازية.

نتيجة 6.1

أضف إلى مطويتك

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية



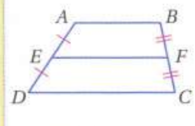
إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

مثال: إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

سوف تبرهن النتيجة 6.1 في السؤال 19

إرشادات للدراسة

القطعة المنصّفة
تشبه نظريّةُ القطعة المنصّفة في المثلث نظريّة القطعة المنصّفة في شبه المنحرف، والتي تنصّ على أن القطعة المنصّفة في شبه المنحرف توازي القاعدتين وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.



$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

إرشادات للدراسة

تناسبات أخرى
يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال في النتيجة 6.1 .

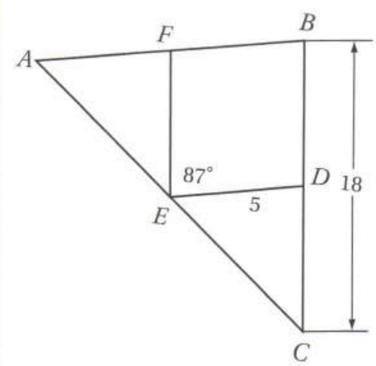
$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$

تنبيه!

الأطوال المتناسبة: أرشد الطلبة عند استعمالهم نظرية التناسب في المثلث إلى كتابة تناسب صحيح. وذكّرهم بأنهم إذا أرادوا أن يجدوا طول ضلع كامل في مثلث فإن عليهم أن يستعملوا الضلع الكامل في المثلث المشابه له.

مثال إضافي

في الشكل أدناه، $\overline{DE}, \overline{EF}$ قطعتان منصفتان في $\triangle ABC$. أوجد كل قياس مما يأتي .



a) AB 10

b) FE 9

c) $m\angle AFE$ 87°

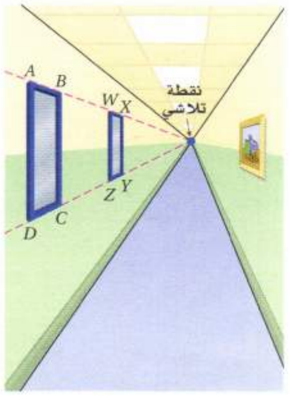
الربط مع الحياة

يستعمل الرسامون إيحاءات إدراكيّة متنوعة تجعل الرسم الثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد، منها:

- الحجم: تبدو الأشياء البعيدة أصغر حجمًا
- الوضوح: تبدو الأجسام القريبة أكثر وضوحًا
- التفاصيل: تتضمن الأجسام القريبة تفاصيل دقيقة، في حين تتضمن الأجسام البعيدة معالم عامّة.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطع المتناسبة من قاطعين

رسم: ترسم مريم ممرًّا في منظور ذي نقطة تلاشي واحدة. استعملت مريم الخطوط الإرشادية المبيّنة لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{WZ}, \overline{XY}$ متوازية، وكان $AB = 8\text{ cm}, DC = 9\text{ cm}, ZY = 5\text{ cm}$، فأوجد WX.



إذا كان $\overline{XY} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$، فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$ وفق النتيجة 6.1.

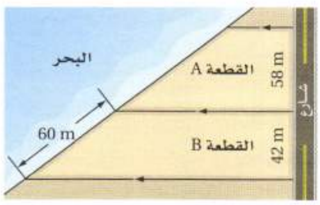
$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$	النتيجة 6.1
$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$	بالتعويض
$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$	خاصيّة الضرب التبادلي
$9WX = 40$	بالتبسيط
$WX = \frac{40}{9} \approx 4.4$	بقسمة كلا الطرفين على 9

المسافة بين W, X تساوي 4.4 cm تقريبًا.

تحقق: نسبة DC إلى ZY هي 9 إلى 5، وهي تقريبًا 10 إلى 5 أو 2 إلى 1. وكذلك نسبة AB إلى WX هي 8 إلى 4.4 وهي تقريبًا 8 إلى 4 أو 2 إلى 1؛ إذن فالإجابة معقولة. ✓

تحقق من فهمك

4) **عقارات:** واجهة قطعة الأرض هي طول حدها المحاذي لمعْلَم ما مثل شارع أو بحر أو نهر. أوجد الواجهة البحرية للقطعة A إلى أقرب عشر المتر. **82.9 m**



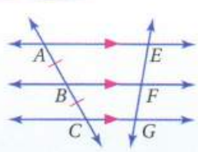
إذا كان معامل التشابه للقطع المتناسبة يساوي 1، فإن المستقيمات المتوازية تقطع أجزاءً متطابقة من القاطعين.

نتيجة 6.2 — الأجزاء المتطابقة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة،فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.

مثال: إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.



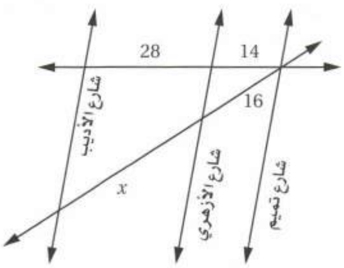
سوف تبرهن النتيجة 6.2 في السؤال 20

الأجزاء المتناسبة من قاطعين مستقيمات متوازية

المثالان 4, 5 يبيّنان كيفية استعمال النظريات في هذا الدرس لإيجاد القطع المستقيمة المتناسبة والمتطابقة.

مثال إضافي

4 **خرائط:** في الشكل أدناه، الشوارع تميم والأزهري والأديب متوازية. ويبيّن الشكل المسافات بينها، أوجد قيمة x.



32

المحتوى الرياضي

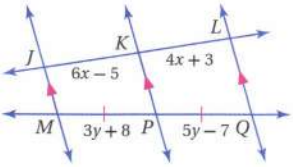
المستقيمات المتوازية: عكس النتيجة 6.2 صحيح أيضًا. فإذا قطعت ثلاثة مستقيمات أجزاء متطابقة من كل قاطع، فإنها تقطع قطعًا متطابقة عل كل مستقيم عموديّ على كل من المستقيمات. وهذا يبيّن أن المستقيمات الثلاثة على أبعاد متساوية فيما بينها. أي أنّها متوازية.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريّون: يمكن للطلبة المتفوقين فنيًّا أن يستقصوا أيضًا التفسير الرياضي لنقطة التلاشي (المثال 4). اطلب إلى الطلبة أن يرسموا رسمًا تُستعمل فيه نقطة تلاشي ، وأن يبحثوا المفاهيم الرياضية التي يتضمنها.

مثال 5 استعمال القطع المتطابقة من قاطعين



جبر: أوجد قيمة كل من x, y.

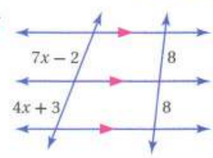
بما أنّ $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$, $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$

فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 6.2 .

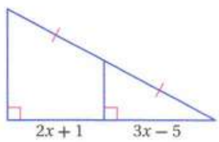
$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x - 5 = 4x + 3$	بالتعويض
$2x - 5 = 3$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$2x = 8$	بإضافة 5 للطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 2
$MP = PQ$	تعريف التطابق
$3y + 8 = 5y - 7$	بالتعويض
$8 = 2y - 7$	بطرح $3y$ من كلا الطرفين
$15 = 2y$	بإضافة 7 لكلا الطرفين
$7.5 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

(5A $\frac{5}{3}$



(5B 6

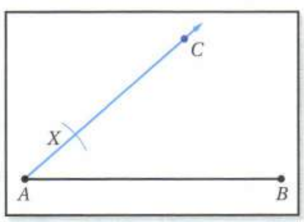


يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين برسم العمود المنصّف للقطعة المستقيمة. ولكن لا يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة برسم أعمدة منصّفة. ولعمل ذلك تستعمل المستقيمات المتوازية والنتيجة 6.2 .

إنشاء هندسي تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة

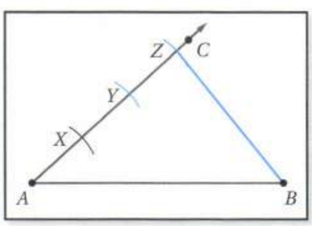
ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AB}$. ثمّ استعمل النتيجة **6.2** لتقسيمها إلى **3** أجزاء متطابقة.

الخطوة 1:



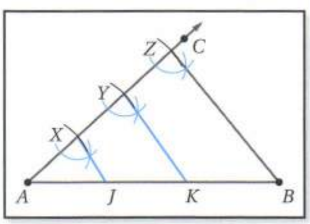
ارسم $\overrightarrow{AC}$. ثم ثبّت الفرجار عند A، وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{AC}$ عند X.

الخطوة 2:



استعمل الفرجار بالفتحة نفسها لتعيين النقطتين Y, Z بحيث $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$. ثم ارسم $\overline{ZB}$.

الخطوة 3:

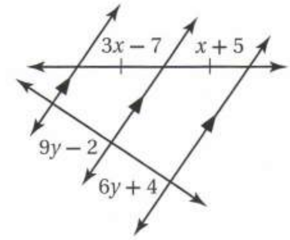


أنشئ من X و Y مستقيمين يوازيان $\overline{ZB}$ وسمِّ نقطتي تقاطعهما مع $\overline{AB}$ بالحرفين J, K.

نتيجة: بما أن المستقيمات المتوازية قطعت قطعًا مستقيمة متطابقة من القاطع $\overrightarrow{AC}$، فإن $\overline{AJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KB}$.

مثال إضافي

5 أوجد قيمة كل من x , y.



$x = 6; y = 2$

تنبيه!

ما المطلوب؟ انتبه إلى المطلوب في السؤال بدقّة. ففي المثال 5، مطلوب منك إيجاد قيمة كلٍّ من x , y وليس أطوال القطع المستقيمة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

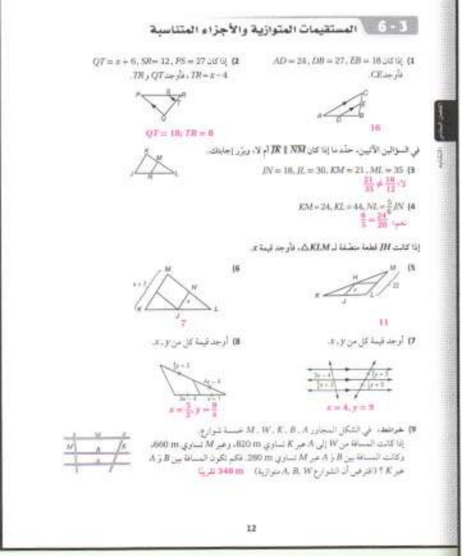
المتعلمون الحركيّون: اطلب إلى الطلبة استعمال خيطٍ وشريطٍ لاصقٍ وأرضيّة مبلّطة لتعيين قطع مستقيمة متطابقة بين مستقيمات متوازية رسمت باستعمال الشريط اللاصق على الأرضية. استعمل الخيط لبيان أنه إذا شكلت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع فإنها تشكّل قطعًا متطابقة على أي قاطع آخر.

3 التدريب

التقويم التكوينيّ

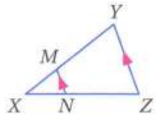
استعمل الأسئلة 9–1 للتحقّق من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

كتاب التمارين، ص (12)


6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

تأكـد

المثال 1 في $\triangle XYZ$ ، إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{YZ}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين:

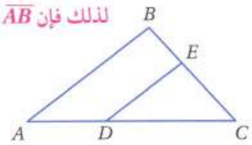


1) إذا كان $XM = 4, XN = 6, NZ = 9$ ، فأوجد XY . **10**

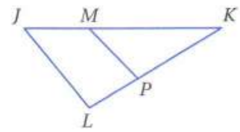
2) إذا كان $XN = 6, XM = 2, XY = 10$ ، فأوجد NZ . **24**

المثال 2

3) في $\triangle ABC$ ، إذا كان $BC = 15, BE = 6$ ، $DC = 12, AD = 8$. فهل $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ؟ برّر إجابتك. **نعم؛ $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{2}{3}$ ، لذلك فإن $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.**

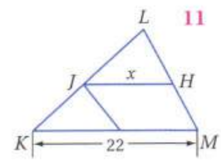


4) في $\triangle JKL$ ، إذا كان $JK = 15, JM = 5$ ، $LK = 13, PK = 9$. فهل $\overline{JL} \parallel \overline{MP}$ ؟ برّر إجابتك. **لا؛ لأن $\frac{5}{10} \neq \frac{4}{9}$**

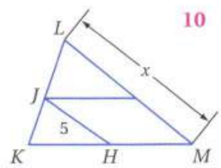


المثال 3 إذا كانت $\overline{JH}$ قطعة منصِّفة في $\triangle KLM$ ، فأوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

5) **11**

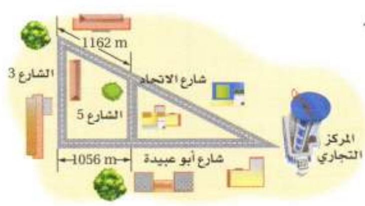


6) **10**



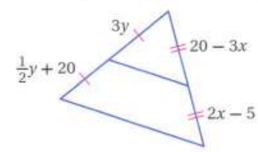
المثال 4

7) **خرائط:** الشارعان 5 , 3 في الخريطة المجاورة متوازيان. إذا كانت المسافة بين الشارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع أبو عبيدة 3201 m ، فأوجد المسافة بين الشارع 5 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر المتر. **2360.3 m**

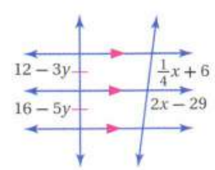


المثال 5 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من السؤالين الآتيين:

8) **$x = 5;$ $y = 8$**

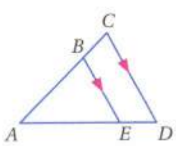


9) **$x = 20;$ $y = 2$**



تدرب وحل المسائل

المثال 1 في $\triangle ACD$ ، إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين:



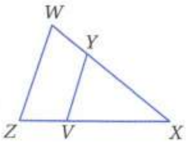
10) إذا كان $AB = 6, BC = 4, AE = 9$ ، فأوجد ED . **6**

11) إذا كان $AB = 12, AC = 16, ED = 5$ ، فأوجد AE . **15**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10-18 ، 35 ، 36 ، 38-53
ضمن ضمن المتوسط	11-33 فردي ، 35 ، 36 ، 38-53
فوق فوق المتوسط	17-48 ، (اختياري: 49-53)

المثال 2 حدّد ما إذا كان $\overline{VY} \parallel \overline{ZW}$ أم لا، وبرّر إجابتك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

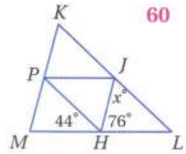


12) $ZX = 18, ZV = 6, WX = 24, YX = 16$ نعم؛ $\frac{ZV}{VX} = \frac{WY}{YX} = \frac{1}{2}$

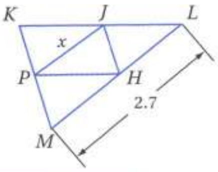
13) $WX = 31, YX = 21, ZX = 4ZV$ لا؛ $\frac{ZV}{VX} \neq \frac{WY}{YX}$

في $\triangle KLM$، إذا كانت $\overline{JH}, \overline{JP}, \overline{PH}$ قطعًا منصّفة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

المثال 3 **14)** 60



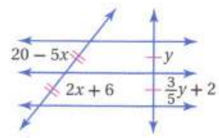
15) 1.35



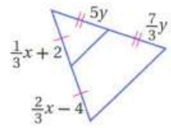
المثال 4 **16)** **خرائط:** المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار. **1100 m**

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة كل من x, y في السؤالين الآتيين:

17) $x = 2;$ $y = 5$



18) $x = 18;$ $y = 3$



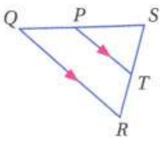
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ مما يأتي: 21–19) انظر الهامش

19) النتيجة 6.1 **20)** النتيجة 6.2 **21)** النظرية 6.5

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريتين الآتيتين: 22, 23) انظر ملحق الإجابات

22) النظرية 6.6 **23)** النظرية 6.7

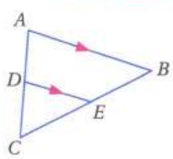
استعمل $\triangle QRS$ للإجابة عن السؤالين الآتيين:



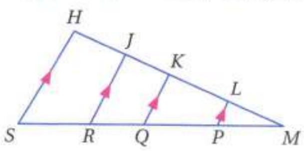
24) إذا كان $ST = 8, TR = 4, PT = 6$، فأوجد QR. 9

25) إذا كان $SP = 4, PT = 6, QR = 12$، فأوجد SQ. 8

26) إذا كان $CE = t - 2, EB = t + 1$، $CD = 2, CA = 10$، فأوجد قيمة كل من t, CE. $t = 3, CE = 1$



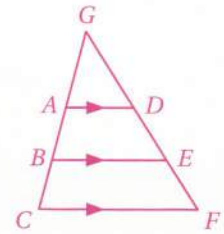
27) إذا كان $LK = 4, MP = 3, PQ = 6, KJ = 2$، $RS = 6, LP = 2$، فأوجد قيمة كل من ML, QR, QK, JH $= 2, QR = 3, QK = 6, JH = 4$



إجابات:

19) المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

المطلوب: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



البرهان:

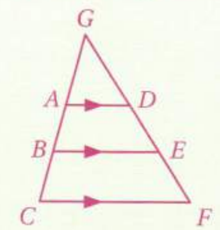
في $\triangle GBE$، $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$. ومن نظرية التناسب في المثلث يكون $\frac{GA}{GD} = \frac{AB}{DE}$ وفي $\triangle GCF$، $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$. ومن نظرية التناسب في المثلث يكون $\frac{GB}{GE} = \frac{BC}{EF}$ ولأن $\triangle GAD \sim \triangle GBE$، فإن $\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GE}$

وبالتعويض $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

أي أن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

20) المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}, \overline{AB} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{DE} \cong \overline{EF}$



البرهان:

من النتيجة 6.1، $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

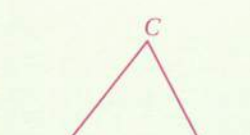
وبما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإنّ $AB = BC$ حسب تعريف التطابق.

إذن $\frac{AB}{BC} = 1$؛ وبالتعويض $\frac{DE}{EF} = 1$

لذلك $DE = EF$، ومن تعريف التطابق يكون $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

21) المعطيات: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

المطلوب: $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$



البرهان: $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 4$، لأنها زوايا متناظرة. ومن مسلمة التشابه AA يكون $\triangle ACE \sim \triangle BCD$

ومن تعريف المضلعين المتشابهين يكون $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$. ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة $CA = BA + CB$, $CE = DE + CD$.

وبالتعويض $\frac{BA + CB}{CB} = \frac{DE + CD}{CD}$.

وبتوزيع البسط على المقام يكون

$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$.

وبالتبسيط $\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$.

وبطرح 1 من الطرفين ينتج $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

تنبيه لحل أسئلة

مسطرة: تتطلب الأسئلة 34 ,32 ,31 استعمال مسطرة.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب في السؤال 34، رسومًا هندسية وجدولًا ووصفًا لفظيًا لاستقصاء منصّفات الزوايا والتناسبات.

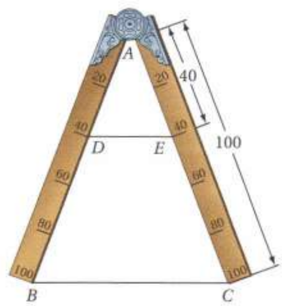
تنبيه!

اكتشف الخطأ يستعمل الطلبة في السؤال 35 الشكل للحكم على معقولية إجاباتهم. عكس سلطان موقع كل من القطعتين المتوازيتين من النظرية 6.7، وعليه ملاحظة أن JL أطول من MP.

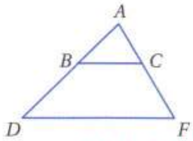
الربط مع الحياة

جاليلو جاليلي
(1564 م إلى 1642 م)
ولد جاليلو جاليلي في إيطاليا. ودرس الفلسفة والفلك والرياضيات. وله إسهامات جوهرية في كل منها.

28) تاريخ الرياضيات: ابتكر جاليلو الفرجار في القرن السادس عشر الميلادي لاستعماله في القياس. ولرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي خُمسي طول قطعة معلومة، اجعل نهايتي ساقي الفرجار عند طرفي القطعة المعلومة، ثم ارسم قطعة مستقيمة بين علامتي 40 على ساقي الفرجار. بيِّن أن طول $\overline{DE}$ يساوي خمسي طول $\overline{BC}$.
انظر ملحق الإجابات



أوجد قيمة x بحيث يكون $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$.



29) $AB = x + 5, BD = 12, AC = 3x + 1, CF = 15$ **3**

30) $AC = 15, BD = 3x - 2, CF = 3x + 2, AB = 12$ **6**

إنشاءات هندسية: أنشئ كل قطعة مستقيمة فيما يأتي وفق التعليمات التالية: 33–31) انظر الهامش

31) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى خمس قطع متطابقة.

32) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طوليهما 1 إلى 3.

33) قطعة مستقيمة طولها 11 cm ، ومقسمة إلى أربع قطع متطابقة.

إرشادات للدراسة

إنشاءات هندسية
تذكّر أن الفرجار والمسطرة غير المدرجة هما الأداتان الوحيدتان المستعملتان في الإنشاءات الهندسية.

34) تمثيلات متعددة: سوف تستكشف في هذه المسألة تناسبات مرتبطة بمنصفات زوايا المثلث.

a) هندسيًا: ارسم ثلاثة مثلثات: حادّ الزوايا، وقائم الزاوية، ومنفرج الزاوية. وسمِّ أحدها ABC وارسم $\overrightarrow{BD}$ منصّفًا لـ $\angle B$. وسمِّ الثاني MNP وارسم $\overrightarrow{NQ}$ منصّفًا لـ $\angle N$ ، وسمِّ الثالث WXY وارسم $\overrightarrow{XZ}$ منصّفًا لـ $\angle X$. انظر ملحق الإجابات

b) جدوليًا: أكمل الجدول المجاور بالقيم المناسبة.

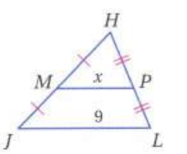
c) لفظيًا: اكتب تخمينًا حول القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّف للزاوية المقابلة لذلك الضلع.

المثلث	الطول		النسبة	
ABC	AD	1.1 cm	$\frac{AD}{CD}$	1.0
	CD	1.1 cm		
	AB	2.0 cm	$\frac{AB}{CB}$	1.0
	CB	2.0 cm		
MNP	MQ	1.4 cm	$\frac{MQ}{PQ}$	0.8
	PQ	1.7 cm		
	MN	1.6 cm	$\frac{MN}{PN}$	0.8
	PN	2.0 cm		
WXY	WZ	0.8 cm	$\frac{WZ}{YZ}$	0.7
	YZ	1.2 cm		
	WX	2.0 cm	$\frac{WX}{YX}$	0.7
	YX	2.9 cm		

34c) إجابة ممكنة: النسبة بين طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّف للزاوية المقابلة لذلك الضلع تساوي النسبة بين طولي الضلعين المجاورين للقطعتين على الترتيب.

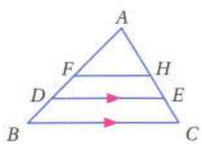
مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: يجد كل من أسامة وسلطان قيمة x في $\triangle JHL$. يقول أسامة: إنّ MP يساوي نصف JL؛ إذن x تساوي 4.5. ويقول سلطان: إن JL يساوي نصف MP؛ إذن x تساوي 18. هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.



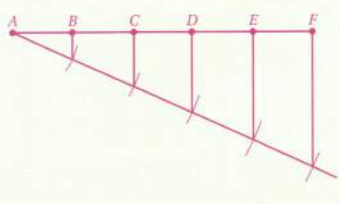
35) أسامة؛ إجابة ممكنة: بما أنّ $\overline{MP}$ قطعة منصّفة فإنّ $MP = \frac{1}{2}JL$.

36) تبرير: في $\triangle ABC$، إذا كان $AF = FB, AH = HC$، $DA = \frac{3}{4}AB, EA = \frac{3}{4}AC$، فهل $DE = \frac{3}{4}BC$ دائمًا أو أحيانًا أو لايساويه أبدًا؟ انظر ملحق الإجابات

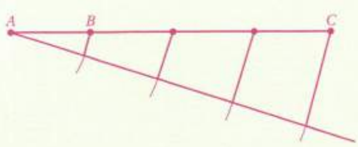


إجابات:

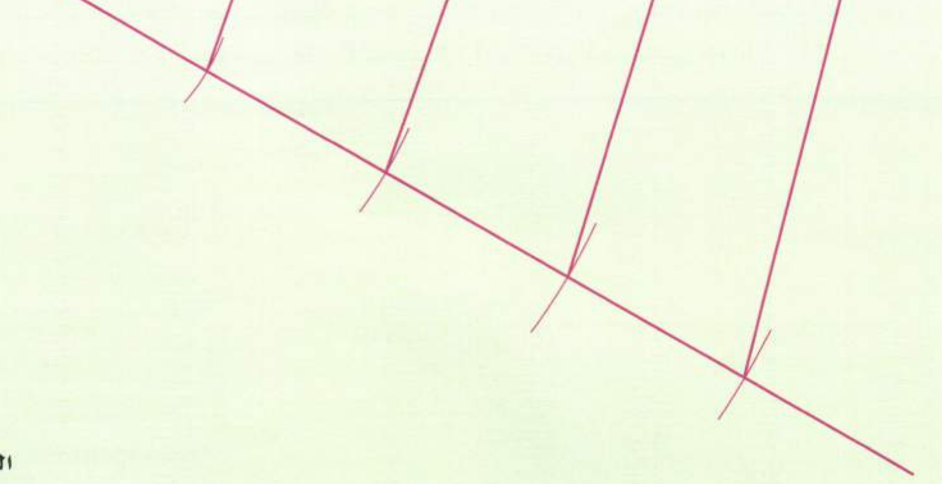
31) إجابة ممكنة:



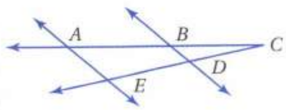
32) إجابة ممكنة:



33) إجابة ممكنة:



95 الدرس 3-6 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة



37) تحدٍّ: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $AB = 4$, $BC = 4$, $CD = DE$

المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ انظر ملحق الإجابات

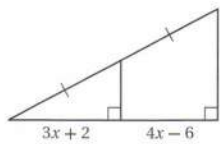
38) مسألة مفتوحة: ارسم ثلاث قطع مستقيمة أطوالها مختلفة a, b, c. وارسم قطعة رابعة طولها d، بحيث يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. انظر ملحق الإجابات

39) اكتب: قارن بين نظرية التناسب للمثلث ونظرية القطعة المنصّفة للمثلث. انظر الهامش

تدريب على الاختبار المعياري

40) إجابة قصيرة: ما قيمة x؟

8



41) إذا كانت رؤوس $\triangle JKL$ هي $(0, 0), (0, 10), (10, 10)$ فإنّ مساحته تساوي: D

A 20 وحدة مربّعة

B 30 وحدة مربّعة

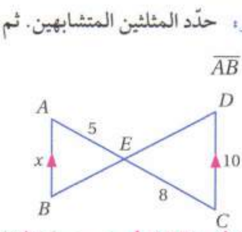
C 40 وحدة مربّعة

D 50 وحدة مربّعة

مراجعة تراكمية

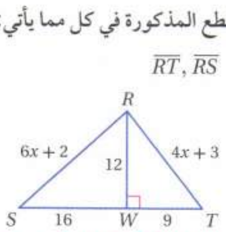
جبر: حدّد المثلثين المتشابهين. ثم أوجد أطوال القطع المذكورة في كل مما يأتي: (الدرس 2-6)

42) $\overline{AB}$



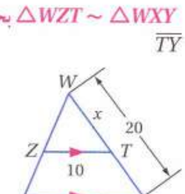
$\triangle ABE \sim \triangle CDE$ بحسب مسلمة التشابه AA؛ 6.25

43) $\overline{RT}, \overline{RS}$



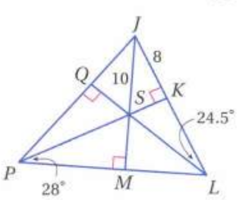
$\triangle RSW \sim \triangle TRW$ بحسب نظرية التشابه SAS؛ 15, 20

44) $\overline{TY}$



$\triangle WZT \sim \triangle WXY$ بحسب مسلمة التشابه AA؛

إذا كانت النقطة S مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JPL$. فأوجد كل قياس مما يأتي: (الدرس 1-4)



45) SQ 6

46) QJ 8

47) $m\angle MPQ$ 52.5°

48) $m\angle SJP$ 37.5°

استعد للدرس اللاحق

حُل كل تناسب مما يأتي.

49) $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$ $\frac{2}{3}$

50) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$ 6.7

51) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$ 2.1

52) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$ 3.6

53) $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$ 8.7

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلبة تفسير نظريّة التناسب في المثلث باستعمال خصائص تشابه المثلثات.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرس 3–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

إجابة:

39) النظريتان تبحثان في المستقيمات المتوازية داخل المثلث. ونظرية القطعة المنصّفة حالة خاصّة لعكس نظرية التناسب.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: يقع خزّان الماء لمدينة ما عند النقطة A. وتشكل حدود المدينة مثلثًا رؤوسه النقطتان B, C وخزان الماء. إذا كانت النقطة D عند منتصف المسافة بين خزان الماء والنقطة B. والنقطة E عند منتصف المسافة بين خزّان الماء والنقطة C. والمسافة بين D و E تساوي 18.9 ميلًا. فما المسافة بين C و B؟ 37.8 ميلًا

6-4 عناصر المثلثات المتشابهة
Parts of Similar Triangles

ـيما سبق:
رستُ أن الأضلاع المتناظرة لمضلعين تشابهين تكون متناسبة.

الآن:
- أتعرف علاقات التناسب بين منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.
- أستعمل نظرية منصف زاوية في مثلث.

www.obeikaneducation.cor

لماذا؟

تستعمل في كاميرات التصوير الاحترافي أفلام قياسها 35 mm للحصول على صور واضحة. وعند التقاط الصورة المجاورة كانت المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وكان طول النخلة على الفيلم 35 mm. يمكن استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد طول النخلة الحقيقي.

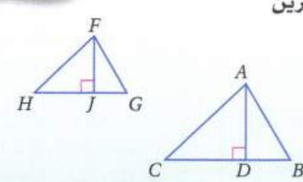
قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين: تعلمت في الدرس 6-1 أنّ أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات المتشابهة، ومنها المثلثات، تكون متناسبة. ويمكن توسيع الفكرة إلى قطع مستقيمة أخرى في المثلثات.

نظريات: قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

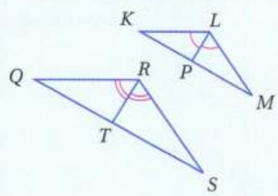
6.8 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$، فإن $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$.



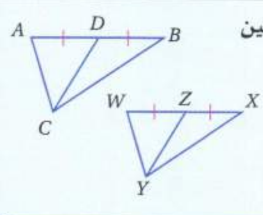
6.9 إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

مثال: إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$، فإن $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$.



6.10 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$، فإنّ $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$.



سوف تبرهن النظريتين 6.9، 6.10 في السؤالين 15، 14 على الترتيب

1 التركيز

الترابط الرأسيّ

ما قبل الدرس 6-4

تعلمت أنّ الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين متناسبة.

الدرس 6-4

تعرّف علاقات التناسب بين منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسّطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة واستعمالها.

استعمال نظرية منصّف زاوية في المثلث.

ما بعد الدرس 6-4

استعمال خصائص التناسب وتوسيعها لوضع تخمينات حول الأشكال الهندسيّة وتبريرها.

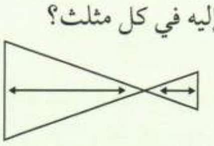
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا مثلت المسألة بمثلثين متشابهين كما في الشكل أدناه فماذا يمثل الارتفاع المشار إليه في كل مثلث؟



ارتفاع المثلث الكبير هو بُعد النخلة عن عدسة الكاميرا، وارتفاع المثلث الصغير هو بُعد العدسة عن الفيلم.

- إذا أمكن التحكم ببعد العدسة عن الفيلم، فماذا يترتب على الاقتراب أكثر من النخلة؟ تقليل بُعد العدسة عن الفيلم.

مصادر الدرس 6-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (99)	• تنويع التعليم ص (99, 102)	• تنويع التعليم ص (99, 102)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (13)	• كتاب التمارين ص (13)	• كتاب التمارين ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

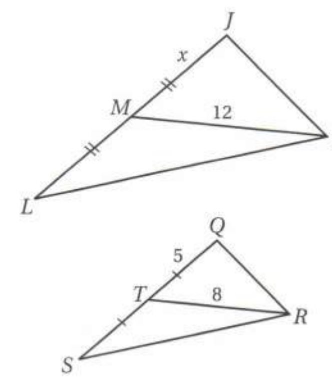
المثالان 2 ,1 يبيّنان كيفية استعمال القطع المستقيمة في المثلثين المتشابهين لإيجاد قياسات مجهولة وحل مسائل.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 في الشكل أدناه $\triangle LJK \sim \triangle SQR$. أوجد قيمة x .

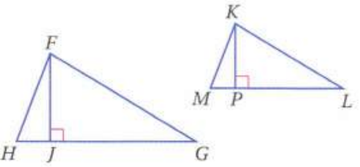


7.5

برهان النظرية 6.8

المعطيات: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، و $\overline{FJ}, \overline{KP}$ ارتفاعان.

المطلوب: $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$



برهان حر:

بما أن $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، فإن $\angle H \cong \angle M$ ، كما أن $\angle FJH \cong \angle KPM$ لأنهما زاويتان قائمتان ناتجتان من ارتفاعين مرسومين إلى الضلعين المقابلين، وجميع الزوايا القوائم متطابقة؛ لذلك فإن $\triangle HFJ \sim \triangle MKP$ بحسب مسلمة التشابه AA ؛ إذن $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$ وفق تعريف المضلعين المتشابهين.

وبنفس الطريقة يمكن إثبات ذلك للارتفاعين الآخرين.

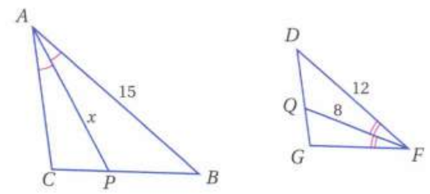
ويمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات المتشابهة لإيجاد الأطوال المجهولة.

إرشادات للدراسة

استعمال معامل التشابه
يمكن حل المثال 1 أيضًا بإيجاد معامل التشابه بين $\triangle ABC, \triangle FDG$ أولًا . وتكون النسبة بين طول القطعة المستقيمة المنصّفة لزاوية في $\triangle ABC$ إلى طول القطعة المستقيمة المنصّفة للزاوية المناظرة لها في $\triangle FDG$ تساوي معامل التشابه هذا.

مثال 1 استعمال القطع الخاصّة في المثلثات المتشابهة

إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FDG$ في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



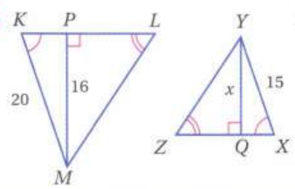
$\overline{AP}, \overline{FQ}$ منصّفا زاويتين متناظرتين و $\overline{AB}, \overline{FD}$ ضلعان متناظران للمثلثين المتشابهين ABC, FDG .

$\frac{AP}{FQ} = \frac{AB}{FD}$	النسبة بين طولي القطعتين المستقيمتين المنصفتين لزاويتين متناظرتين في مثلثين متشابهين تساوي النسبة بين الأضلاع المتناظرة للمثلثين.
$\frac{x}{8} = \frac{15}{12}$	بالتعويض
$8 \cdot 15 = x \cdot 12$	خاصية الضرب التبادلي
$120 = 12x$	بالتبسيط.
$10 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 12

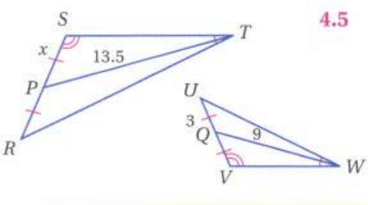
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين.

(1A 12



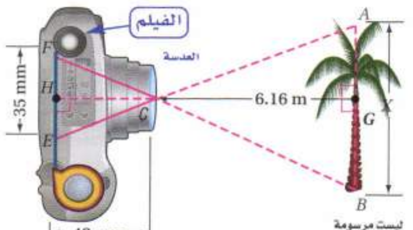
(1B 4.5



يمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصّة في المثلثات المتشابهة لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة **استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل**

تصوير: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، يبين الرسم أدناه موقع الكاميرا والمسافة من عدسة الكاميرا إلى الفيلم. أوجد الارتفاع الحقيقي للنخلة.



افهم: تكون النخلة وصورتها على الفيلم متوازيتين، ويكون CH و CG ارتفاعين متناظرين في المثلثين $\triangle ABC, \triangle EFC$.

خطط: بما أنّ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ، فإنّ $\angle BAC \cong \angle CEF$, $\angle CBA \cong \angle CFE$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ لذلك فإن $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ وفق مسلمة التشابه AA . اكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x .

حل:

$\frac{AB}{EF} = \frac{GC}{HC}$ النظرية 6.8

$\frac{x\,\text{m}}{35\,\text{mm}} = \frac{6.16\,\text{m}}{42\,\text{mm}}$ بالتعويض

$x \cdot 42 = 35\,(6.16)$ خاصيّة الضرب التبادلي

$42x = 215.6$ بالتبسيط

$x = 5.13$ بقسمة كلا الطرفين على 42

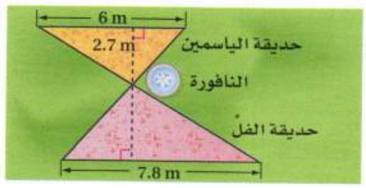
إذن ارتفاع النخلة 5.13 m تقريبًا.

تحقق: نسبة طول الصورة إلى المسافة بين العدسة والفيلم هي 35:42 أو 5:6 ونسبة ارتفاع النخلة إلى المسافة بينها وبين العدسة هي: 6.16 : 5.13 أي 5:6 تقريبًا. ✓

تحقق من فهمك

2) **حدائق:** حديقتان بجوارهما نافورة. إذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلّ.

3.51m

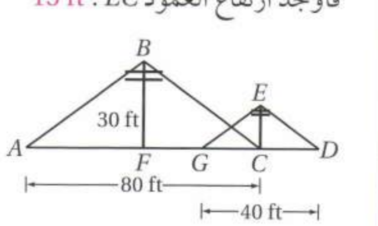


الربط مع الحياة

طُرحت الكاميرات الرقمية في الأسواق لأول مرة عام 1994م ، وكانت دقة الوضوح 640 × 480 بكسل، وفي عام 2005 أمكن أخذ صورة بدرجة وضوح بلغت 2912 × 4368 بكسل بوساطة كاميرا مضخّمة لدرجة 12.8 مليون، وهي صورة أوضح بكثير مما تعرضه معظم الحواسيب.

مثال إضافي

2 استعمالات مفيدة: يوضّح الرسم أدناه عمودين مدعمين بالأسلاك. فإذا كان $\triangle ABC \sim \triangle GED$. $\overline{AF} \cong \overline{CF}$, $\overline{FG} \cong \overline{GC} \cong \overline{DC}$. فأوجد ارتفاع العمود $\overline{EC}$. 15 ft



التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا في مدونة الفصل فقرة توضح لماذا تكون النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين هي نفسها النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة. واطلب إليهم تفسير ذلك بدلالة مجموع أطوال الأضلاع وباستعمال خصائص الجمع والضرب.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

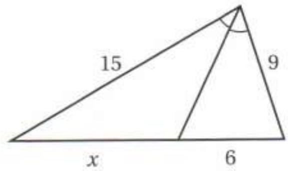
المتعلمون البصريّون: من الأخطاء الشائعة الاعتقاد بأنّ النسبة بين قياسات الزوايا المتناظرة لمثلثين متشابهين هي النسبة نفسها بين أطوال الأضلاع المتناظرة. أكّدْ على أن الزوايا المتناظرة لمثلثين متشابهين يجب أن تكون متطابقة.

نظرية منصّف زاوية في مثلث

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث لإيجاد قياسات مجهولة.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



10

المحتوى الرياضي

تناسبات أخرى في المثلثات المتشابهة: قد ترغب في سؤال الطلبة أن يخمّنوا أطوال قطع مستقيمة أخرى تكون النسبة بين أطوالها هي النسبة نفسها بين الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين. ثم اطلب إليهم أن يختبروا تخميناتهم.

نظريّة منصّف زاوية في مثلث: يقسم منصّف زاوية في مثلث الضلع المقابل لتلك الزاوية إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

إرشادات للدراسة

التناسب يمكن كتابة تناسب آخر باستعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث هو $\frac{KM}{KJ}=\frac{LM}{LJ}$

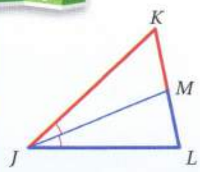
نظرية 6.11 منصّف زاوية في مثلث

أضف إلى مطويتك

منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

مثال: إذا كانت $\overline{JM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$

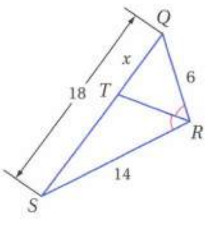
فإنّ $\frac{KM}{LM}=\frac{KJ}{LJ}$ ← القطعتان المشتركتان بالرأس K ← القطعتان المشتركتان بالرأس L



سوف تبرهن النظرية 6.11 في السؤال 19

مثال 3 استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

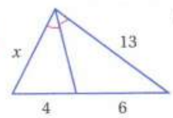


بما أنّ $\overline{RT}$ منصف زاوية في $\triangle QRS$، فيمكنك استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث لكتابة تناسب.

$\frac{QT}{ST}=\frac{QR}{SR}$	نظرية منصّف زاوية في مثلث
$\frac{x}{18-x}=\frac{6}{14}$	بالتعويض
$(18-x)(6)=x\cdot 14$	خاصية الضرب التبادلي
$108-6x=14x$	بالتبسيط
$108=20x$	بإضافة $6x$ لكلا الطرفين
$5.4=x$	بقسمة كلا الطرفين على 20

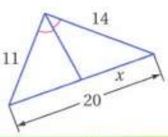
تحقق من فهمك

(3A



$8\frac{2}{3}$

(3B

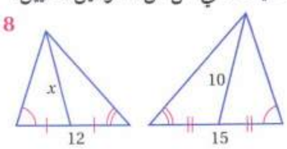


11.2

تأكد

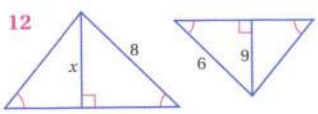
مثال 1 أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

(1



8

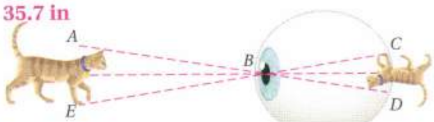
(2



12

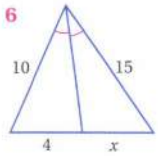
مثال 2 **(3** **صورة:** ارتفاع قطّة 10 in، وارتفاع صورتها على شبكيّة العين 7 mm. إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$، وكانت المسافة من بؤبؤ العين إلى الشبكيّة 25 mm، فكم تبعد القطة عن بؤبؤ العين؟

35.7 in

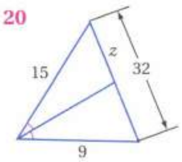


مثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين. (لاحظ أن الشكلين ليسا مرسومين وفق مقياس رسم):

(4 **6**



(5 **20**

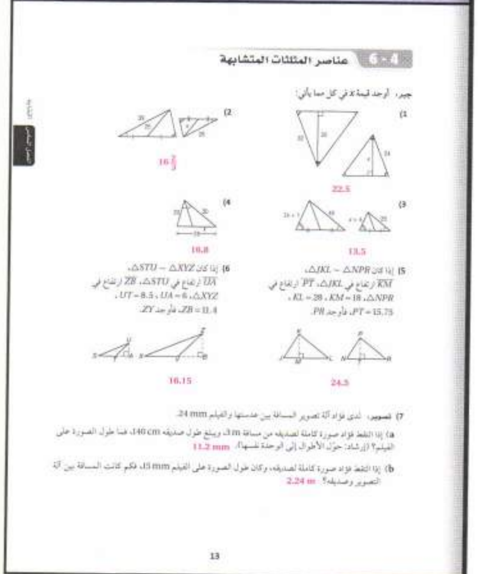


3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5–1 للتحقّق من فهم الطلبة ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزليّة للطلبة بحسب مستوياتهم.

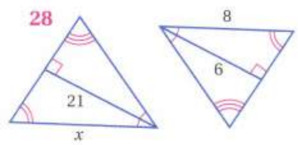
كتاب التمارين، ص (13)



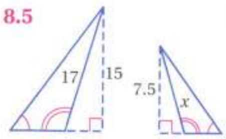
تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

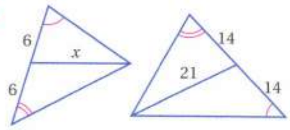
(6 **28**



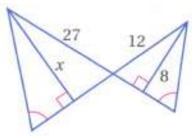
(7 **8.5**



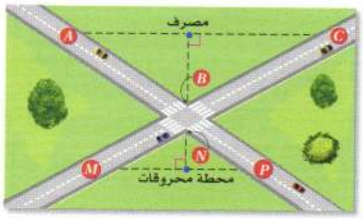
(8 **9**



(9 **18**

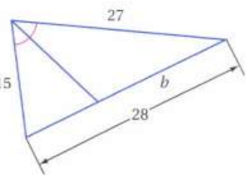


مثال 2 (10 **طرق:** يشكل الطريقان المتقاطعان في الشكل أدناه مثلثين متشابهين. إذا كان $AC = 382$ ft، $MP = 248$ ft، وتبعد محطة المحروقات 50 ft عن التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع؟ **77 ft تقريبًا**

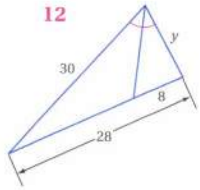


مثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين. (لاحظ أن الأشكال ليست مرسومة وفق مقياس رسم):

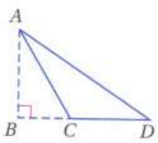
(11 **18**

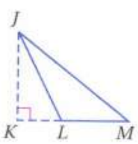


(12 **12**



(13 **جبر** إذا كانت $\overline{AB}$, $\overline{JK}$ ارتفاعين، وكان $\triangle DAC \sim \triangle MJL, AB = 9$ ، $AD = 4x - 8, JK = 21, JM = 5x + 3$ فأوجد قيمة x. **5**





تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	6-13 ، 22 ، 23 ، 25-37
ضمن المتوسط	7-17 فردي ، 18 ، 19 ، 21-23 ، 25-37
فوق المتوسط	14-31 ، (اختياري: 32-37)

إرشادات للدراسة

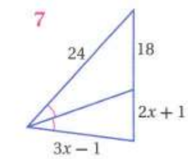
التناسب في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، إذا كان $a > c$، فإن $b > d$. والعكس صحيح أيضًا، إذا كـان $b > d$، فإن $a > c$.

14) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظريّة 6.9 . انظر الهامش

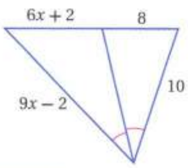
15) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 6.10 . انظر ملحق الإجابات

جبر: أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

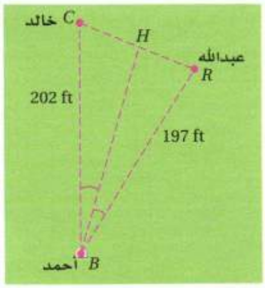
16) 7



17) 3



18) **رياضة:** تأمل المثلث المتشكل في المسارات بين أحمد وعبدالله وخالد في أثناء مباراة كرة قدم كما في الشكل المجاور. إذا ركل أحمد الكرة بمسار ينصف $\angle B$ في $\triangle CBR$، فأيهما أقرب إلى الكرة عبد الله أم خالد؟ وضح إجابتك.



18) عبد الله؛ إجابة ممكنة: بما أن مسار الكرة ينصف $\angle B$، فإن النسبة بين طولي القطعتين اللتين قُسم إليهما الضلع المقابل للزاوية CBR تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين. أو $\frac{CH}{RH}=\frac{BC}{BR}$ وبالتعويض $\frac{CH}{RH}=\frac{202}{197}=1.03$ وبما أنّ $\frac{CH}{RH}$ أكبر قليلًا من 1 فإنّ CH أطول قليلًا من RH؛ ولذلك فإن عبد الله أقرب إلى الكرة.

(19, 20) انظر ملحق الإجابات

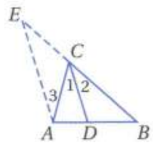
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل من السؤالين الآتيين.

19) النظريّة 6.11

المعطيات: $\overline{CD}$ تنصف $\angle ACB$.

وبالرسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

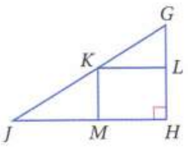
المطلوب: $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$



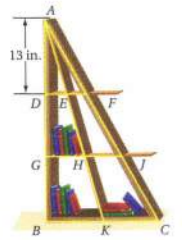
20) **المعطيات:** $\angle H$ قائمة.

L, K, M نقاط منتصفات الأضلاع.

المطلوب: $\angle LKM$ قائمة.



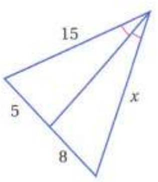
21) **أثاث:** يمثل الشكل المجاور خزانة كتب مثلثة الشكل، المسافة بين كل رفّين تساوي 13 in، و $\overline{AK}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle ABC$. إذا كان $EF = 3\frac{1}{3}$ in فكم يكون BK؟ **10 in**



مسائل مهارات التفكير العليا

22) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من عبد الله وفيصل أن يجد قيمة x في الشكل المجاور. يقول عبد الله: لإيجاد قيمة x أحل التناسب $\frac{15}{x}=\frac{5}{8}$، ويقول فيصل: لإيجاد قيمة x، أحل التناسب $\frac{8}{15}=\frac{5}{x}$، أيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.

عبد الله؛ وفق نظرية منصف زاوية في مثلث، التناسب الصحيح هو $\frac{15}{x}=\frac{5}{8}$.



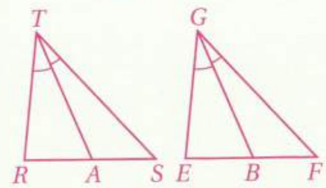
تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 22، يجب أن يتذكّر الطلبة من نظرية منصّف الزاوية أن النسبة بين طولي القطعتين المستقيمتين تساوي النسبة بين طولي الضلعين المجاورين المناظرين. وإذا تمت مقارنة طول قطعة مستقيمة مع طول ضلع، فيجب أن تكونا في المثلث نفسه. حيث أخطأ فيصل حين قارن طول القطعة المستقيمة مع طول الضلع في مثلثين مختلفين.

إجابات:

14) **المعطيات:** $\triangle RTS \sim \triangle EGF$، $\overline{TA}, \overline{GB}$ منصفا زاويتين.

المطلوب: $\frac{TA}{GB}=\frac{RT}{EG}$



البرهان: بما أن الزوايا المتناظرة في المثلثين المتشابهين تكون متطابقة.

فإن $\angle R \cong \angle E$, $\angle RTS \cong \angle EGF$.

ولأن $\angle RTS$, $\angle EGF$ نُصِّفتا فإن

$2(m\angle RTA) = m\angle RTS$

$2(m\angle EGB) = m\angle EGF$

ولكن $m\angle RTS = m\angle EGF$

$2(m\angle RTA) = 2(m\angle EGB)$

إذن $m\angle RTA = m\angle EGB$

أي أن $\angle RTA \cong \angle EGB$

وحسب مسلمة التشابه AA، يكون $\triangle RTA \sim \triangle EGB$

إذن $\frac{TA}{GB}=\frac{RT}{EG}$.

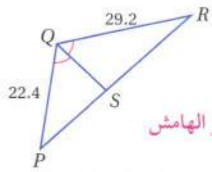
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: نظّم الطلبة في مجموعات ثلاثيّة أو رُباعيّة متفاوتة القدرات. واطلب إليهم أن يرسموا مخطّطًا بمقياس رسم لحدود مدرستهم. واطلب إليهم أيضاً قياس محيط المدرسة بعدِّ الخطوات عند المشي حول المدرسة. ثم اطلب إليهم استعمال نسبة عدد الخطوات إلى عدد الوحدات التي سوف يستعملونها في مخططاتهم.

23) تبرير: أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية. وضِّح إجابتك.

"إذا كانت النسبة بين ارتفاع مثلث وطول أحد أضلاعه تساوي النسبة بين الارتفاع وطول الضلع المناظرين لهما في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متشابهان". انظر الهامش

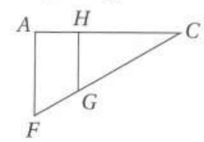


24) تحدٍّ: إذا كان محيط $\triangle PQR$ يساوي 94 وحدة، $\overline{QS}$ منصِّف في $\angle PQR$، فأوجد PS, RS. $PS \cong 18.4$, $RS \cong 24$

25) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النظريّة 6.9 والنظرية 6.11. انظر الهامش

تدريب على الاختبار المعياري

26) أي الحقائق الآتية ليست كافية لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟ **C**



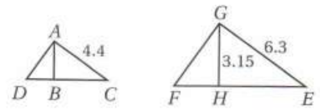
A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\dfrac{AC}{HC} = \dfrac{FC}{GC}$

C $\dfrac{CG}{CF} = \dfrac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ قائمتان.

27) إجابة قصيرة: في الشكلين أدناه، $\overline{DB} \cong \overline{BC}$, $\overline{FH} \cong \overline{HE}$



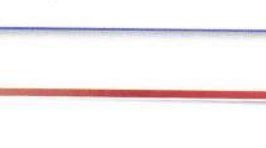
إذا كان $\triangle ACD \sim \triangle GEF$، فأوجد AB. **2.2**

مراجعة تراكمية

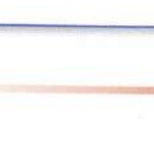
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي. (الدرس 3-6)

(28 $x = 6; y = 4$

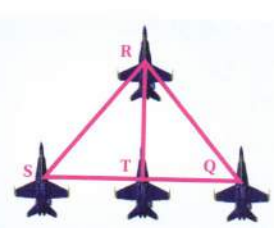
(29 $x = 2; y = 3$



(30 $x = 4; y = 10$



31) طائرات: في عرض للطائرات النفاثة شكلت الطائرات تشكيلًا يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$، و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 3-4) انظر الهامش



استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كل مما يأتي:

(32 $E(-3, -2), F(5, 8)$ $\sqrt{164} \approx 12.8$

(33 $A(2, 3), B(5, 7)$ **5**

(34 $C(-2, 0), D(6, 4)$ $\sqrt{80} \approx 8.9$

(35 $W(7, 3), Z(-4, -1)$ $\sqrt{137} \approx 11.7$

(36 $J(-4, -5), K(2, 9)$ $\sqrt{232} \approx 15.2$

(37 $R(-6, 10), S(8, -2)$ $\sqrt{340} \approx 18.4$

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة أن يرسموا مثلثًا محيطه 24 cm. ثم اطلب إليهم أن يرسموا منصفًا لإحدى زواياه، واطلب إليهم أن يجدوا طول كلّ من القطعتين المستقيمتين التي انقسم إليها الضلع المقابل للزاوية التي تم تنصيفها. وأن يسلموك إجاباتهم قبل خروجك من غرفة الصّف. 16 cm

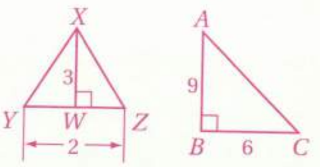
التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرس 4–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابات:

(23



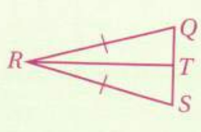
$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{XW}{YZ}$،

ولكن $\triangle ABC$ لا يشابه $\triangle XYZ$

25) تتضمن كلا النظريتين قطعة مستقيمة تنصف زاوية، ونسبًا متكافئة. نظرية منصف الزاوية تنطبق على مثلث واحد، بينما تنطبق النظرية 9–6 على مثلثين متشابهين بخلاف نظرية منصف الزاوية التي تجزء الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين بنسبة مساوية للنسبة بين الضلعين الآخرين، النظرية 9–6 تربط طول منصف الزاوية بأطوال الأضلاع.

31) المعطيات: $\overline{SR} \cong \overline{QR}$، T نقطة منتصف $\overline{SQ}$

المطلوب: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$، T نقطة منتصف $\overline{SQ}$. (معطيات)

2) $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصيّة الانعكاس)

4) $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ (SSS)

1 التركيز

الهدف
رسم شجرة كسريّة .

المواد
- ورقة منقّطة.

إرشادات التدريس
ناقش مع الطلبة كيفيّة تحديد كلّ مرحلة كي يفهموا الطريقة. كل مرّة تُنصّف فيها أضلاع كل مثلث لتشكيل مثلث داخلي تُعدّ مرحلة واحدة. اطلب إليهم أن يُسجّلوا عدد المثلثات في كل مرحلة بحيث يمكنهم تحليل النمط في الأعداد.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية
نظّم الطلبة في مجموعات رباعيّة متفاوتة القدرات واطلب إلى أحد الطلبة في كلّ مجموعة أن يرسم المثلثات بينما يقوم طالب آخر بتحليل البيانات وذلك بعدّ المثلثات وتشكيل متتابعة من الأعداد. واطلب إلى طالبٍ ثالثٍ أن يجد محيط كل مثلث طالما استمر النشاط. ويكوّن الطالب الرابع متتابعة من محيطات المثلثات. سوف تساعدهم هذه المتتابعة على ملاحظة أن المحيط يقترب من الصفر كلّما زاد عدد المثلثات. اطلب إليهم أن يحلّوا السؤال 1.

واسأل:
- ما ترتيب المرحلة الذي يمثّل ضمّ ثلاث نسخٍ من المرحلة 4 من مثلث سيربنسكيّ؟ المرحلة 5

تدريب: اطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة 2–7.

توسع
معمل الهندسة :
6-4 الكسريّات
Fractals

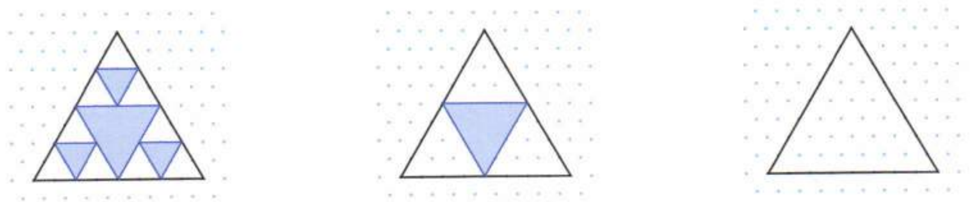
الكسريات أشكال هندسية تنتج باستعمال تكرار الأجزاء (iteraction). **وتكرار** الأجزاء هو عمليّة تكرار النمط نفسه مرّة تِلْوَ الأخرى. وتكون الكسريات **ذاتيّة التشابه** ؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي.

نشاط 1

البداية: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه 8 وحدات على ورقة منقّطة.

المرحلة 1: صِلْ نقاط منتصفات أضلاع المثلث لتشكيل مثلثًا آخر، وظلّل المثلث الداخلي.

المرحلة 2: كرّر العمليّة مع المثلثات الثلاثة غير المظلّلة. وصل نقاط منتصفات أضلاعها لتشكل ثلاثة مثلثات أخرى.



إذا كرّرت هذه العملية إلى مالانهاية، فإن الشكل الناتج يسمّى مثلث سيربنسكي.

تحليل النتائج:

1) إذا استمررت في هذه العمليّة، فكم يكون عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 3؟ 27

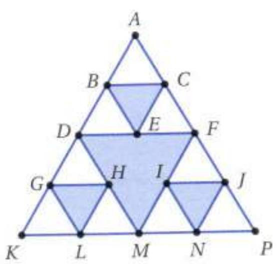
2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المرحلة 4؟ 1.5 وحدة

3) إذا استمررت في هذه العملية إلى مالانهاية، فماذا سيحصل لمحيط كل مثلث غير مظلّل؟ سيقترب المحيط من الصفر.

4) **تحدٍّ** أكمل البرهان الآتي: انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع.
D, F, M, B, C, E منتصفات $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ على الترتيب.

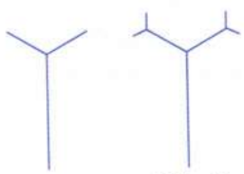
المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$.



5) يمكن رسم شجرة كسريّة برسم غصنين جديدين من نهاية كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصن منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له . (a–b) انظر الهامش

a) ارسم المرحلة 3 والمرحلة 4 للشجرة الكسريّة. ما العدد الكلّي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تعدّ السيقان)

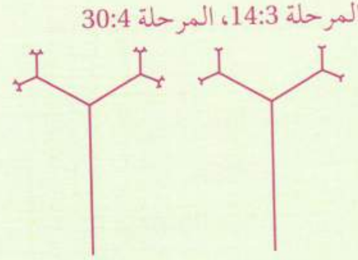
b) اكتب عبارة جبرية يمكن استعمالها للتنبؤ بالعدد الكلّي للأغصان في نهاية كل مرحلة.



المرحلة 1 المرحلة 2

إجابات:

5a) المرحلة 1:2، المرحلة 2:6،
المرحلة 3:14، المرحلة 4:30



المرحلة 3 المرحلة 4

5b) في المرحلة n، العدد الكلّي للأغصان يساوي $2(2^n - 1)$.

توسع 6-4 ملاحظات الدرس

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1 للتحقق من فهم الطلبة لمعنى الكسريّات والتكرار، والصيغة الترددية، والشجرة الكسريّة.

من المحسوس إلى المجرّد

استعمل السؤال 12 لتوسعة ما لاحظه الطلبة جبريًّا.

لا تتضمن جميع العمليات المكرّرة معالجات لأشكال هندسيّة. فبعض العمليات المكرّرة يمكن أن تترجم إلى صيغ أو معادلات مشابهة للعبارة الجبرية التي كتبتها في السؤال 5 في الصفحة السابقة. تسّمى هذه العبارات **صيغًا ترددية**.

نشاط 2

مثلث باسكال هو نمط عددي يبدأ كل صف فيه بالعدد 1، وينتهي بالعدد 1 أيضًا، وينتج كل حد من حدود الصفوف الأخرى من جمع الحدّين الواقعين فوقه. أوجد صيغة لمجموع حدود كل صف في مثلث باسكال بدلالة رقم هذا الصف.

الخطوة 1: اكتب الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال.

الخطوة 2: أوجد مجموع حدود كل صف.

الخطوة 3: أوجد نمطًا يعتمد على **رقم الصف** ويمكن استعماله لإيجاد مجموع حدود كل صف.

الصف	مثلث باسكال	المجموع	النمط
1	1	1	$2^0 = 2^{1-1}$
2	1 1	2	$2^1 = 2^{2-1}$
3	1 2 1	4	$2^2 = 2^{3-1}$
4	1 3 3 1	8	$2^3 = 2^{4-1}$
5	1 4 6 4 1	16	$2^4 = 2^{5-1}$

تحليل النتائج:

6) اكتب صيغة للمجموع S لحدود الصف n لمثلث باسكال. $S = 2^{n-1}$

7) ما مجموع حدود الصف الثامن في مثلث باسكال؟ **128**

تمارين:

اكتب صيغة ترددية لـ $F(x)$.

8) $F(x) = 2x - 1$

x	2	4	6	8	10
$F(x)$	3	7	11	15	19

9) $F(x) = x^2 - x$

x	0	5	10	15	20
$F(x)$	0	20	90	210	380

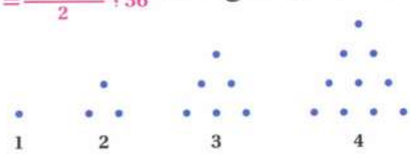
10) $F(x) = \frac{1}{x}$

x	1	2	4	8	10
$F(x)$	1	0.5	0.25	0.125	0.1

11) $F(x) = \sqrt{x} + 3$

x	4	9	16	25	36
$F(x)$	5	6	7	8	9

12) **تحدٍّ** يمثّل النمط أدناه متتابعة أعداد مثلثيّة. ما عدد النقاط في الحد الثامن في هذه المتتابعة؟ هل من الممكن كتابة صيغة ترددية يمكن استعمالها لتحديد عدد النقاط في العدد المثلثي ذي الرقم n في هذه المتتابعة؟ وإذا كان ذلك ممكنًا فاكتب الصيغة، وإلّا فوضّح السبب. 36؛ $F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$



توسع 6-4 معمل الهندسة: الكسريّات 105

التقويم التكويني

المفردات الأساسيّة: يشير رقم الصفحة بعد كلّ مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرّة.

فإذا واجه الطلبة صعوبات في حلّ الأسئلة 6–1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33)

التقويم الختامي

أحاجي المفردات: تعزّز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة كلمات، والبحث عن الكلمة باستعمال التلميحات، ويمكن أن ينفذ الطلبة ذلك من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المضلعات المتشابهة والمثلثات المتشابهة (الدرسان 2-6 ,1-6)

- يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- يكون المثلثان متشابهين إذا كانت:

AA: زاويتان في أحدهما مطابقتين لزاويتين في المثلث الآخر.

SSS: أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة.

SAS: طولا ضلعين في أحدهما متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتين.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 3-6)

- إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين محددتين، فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.
- القطعة المنصّفة لمثلث توازي ضلعًا فيه، وطولها يساوي نصف طوله.

عناصر المثلثين المتشابهين (الدرس 4-6)

- إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كل من محيطيهما، ارتفاعيهما المتناظرين، طولي منصفي الزاويتين المتناظرتين، طولي القطعتين المتوسطتين المتناظرتين تساوي النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة.

المطويات منظم أفكار

تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

مفردات أساسيّة

المضلعات المتشابهة (ص 70)

نسبة التشابه (ص 71)

معامل التشابه (ص 71)

القطعة المنصّفة لمثلث (ص 89)

اختبار المفردات:

اختر رمز الجملة التي تكمل كلًّا مما يأتي:

a) نسبة التشابه   **d)** نظرية التشابه SSS

b) معامل التشابه   **e)** نظرية التشابه SAS

c) مسلمة التشابه AA   **f)** القطعة المنصّفة

1) طرفا ___؟___ لمثلث هما منتصفا ضلعين فيه. f

2) إذا كانت $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$ فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق ___؟___. c

3) النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ___؟___. b

4) إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان وفق ___؟___. d

5) يطلق أحيانًا على معامل التشابه بين مضلعين اسم ___؟___. a

6) إذا كانت $\frac{BA}{CA} = \frac{DF}{EF}$، وكان $\angle A = \angle F$، فإن $\triangle BAC \sim \triangle EFD$ وفق ___؟___. e

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

1) لا؛ المضلعان ليسا متشابهين، لأن الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة.

4) نعم؛ $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ وفق نظرية التشابه SAS.

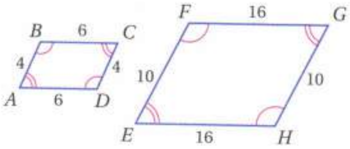
5) نعم؛ $\triangle IJK \sim \triangle HFG$ وفق نظرية التشابه SSS.

مراجعة الدروس

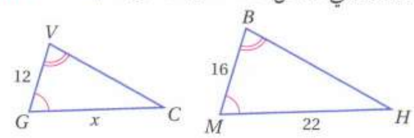
6-1 المضلعات المتشابهة (ص 77-70)

1) حدد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وإلا فوضّح السبب.

انظر الهامش



2) المثلثان في الشكل أدناه متشابهان. أوجد قيمة x. **16.5**

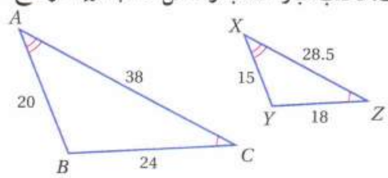


3) **النظام الشمسي:** في نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi. إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بعد من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

ستضع سميرة بلوتو على بعد 39.7 ft تقريبًا من الشمس.

مثال 1

حدّد ما إذا كان المثلثان أدناه متشابهين أم لا؟ برّر إجابتك. وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وإلا فوضّح السبب.



بما أنّ $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$، فإنّه وفق نظرية الزاوية الثالثة تكون $\angle B \cong \angle Y$؛ إذن الزوايا المتناظرة متطابقة.

يجب أن تكون أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات المتشابهة متناسبة. اختبر النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{AB}{XY} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \qquad \frac{BC}{YZ} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \qquad \frac{AC}{XZ} = \frac{38}{28.5} = \frac{4}{3}$$

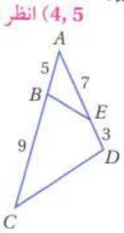
وبما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. إذن فالمثلثان متشابهان ومعامل التشابه $\frac{4}{3}$.

6-2 المثلثات المتشابهة (ص. 86-78)

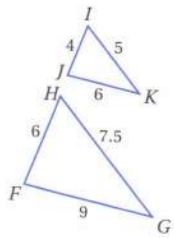
حدد ما إذا كان المثلثان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. و وضّح إجابتك.

4, 5) انظر الهامش

4)



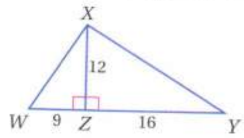
5)



6) **أشجار:** يريد عبد الله أن يقدّر ارتفاع شجرة فوقف على مسافة 66 ft منها، فكانت نهاية ظلّه ونهاية ظل الشجرة عند النقطة نفسها، إذا كان طول عبد الله 6 ft و 4 in وطول ظلّه 15 ft، فما ارتفاع الشجرة؟ **34.2 ft**

مثال 2

حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.



$\angle XZY \cong \angle WZX$ لأنهما زاويتان قائمتان. والآن قارن طولي ساقي المثلثين القائمين.

$$\frac{XZ}{YZ} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \qquad \frac{WZ}{XZ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

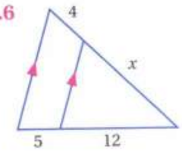
وبما أنه يوجد ضلعان في المثلث الأول طولاهما متناسبان مع طولي نظيريهما في الثاني، وأن الزاويتين المحصورتين بينهما متطابقتان، فإنّ $\triangle WZX \sim \triangle XZY$ وفق نظرية التشابه SAS.

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

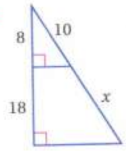
6-3 المستقيمات المتوازية و الأجزاء المتناسبة (ص. 96-88)

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

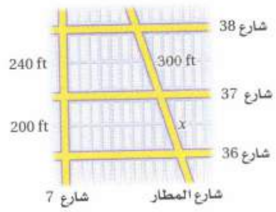
7) 9.6



8) 22.5

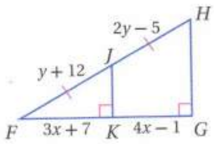


9) **شوارع:** أوجد المسافة على امتداد شارع المطار بين الشارعين 37, 36 بفرض أن الشوارع 38, 37, 36 متوازية **250 ft**



مثال 3

جبر: أوجد قيمة كل من x, y.



$$FK = KG$$

$$3x + 7 = 4x - 1$$

$$-x = -8$$

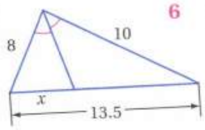
$$x = 8$$

$FJ = JH$	تعريف التطابق
$y + 12 = 2y - 5$	بالتعويض
$-y = -17$	بالطرح
$y = 17$	بالتبسيط

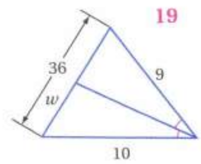
6-4 عناصر المثلثات المتشابهة (ص. 103-97)

أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين:

10) 6



11) 19

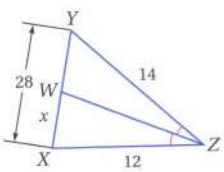


12) **عين الإنسان:** تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية. فكم المسافة بين عدسة العين والشبكية؟

المسافة بين عدسة العين إلى الشبكية 1 in

مثال 4

أوجد قيمة x.



استعمل نظرية منصف زاوية في مثلث لكتابة تناسب.

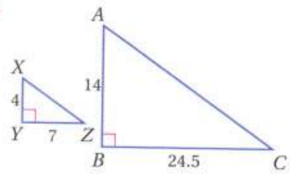
$\frac{WX}{YW} = \frac{XZ}{YZ}$	نظرية منصّف زاوية في مثلث.
$\frac{x}{28 - x} = \frac{12}{14}$	بالتعويض
$(28 - x)(12) = x \cdot 14$	خاصية الضرب التبادلي
$336 - 12x = 14x$	بالتبسيط
$336 = 26x$	بإضافة $12x$ لكلا الطرفين
$12.9 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 26

108 الفصل 6 التشابه

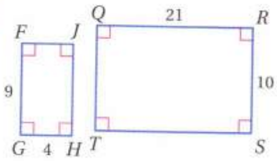
المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.
تساعدك العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا في كل من السؤالين الآتيين؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وإلّا فوضّح السبب.

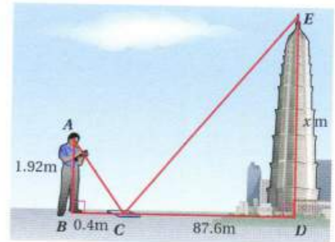
1) نعم؛ $\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}; \frac{2}{7}$



2) لا؛ $\frac{FG}{QR} \neq \frac{GH}{RS}$



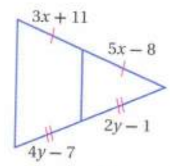
3) **أبراج:** استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين الآتيين:
لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى الأعلى.



a) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟ **420.5 m تقريبًا**
b) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟
من الصعب قياس طول الظل داخل المدن.

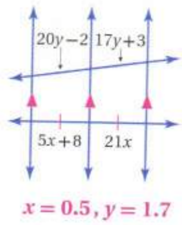
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من السؤالين الآتيين. مقربًا إجابتك إلى أقرب عشر إن كان ضروريًا.

4)



$x = 9.5, y = 3$

5)



$x = 0.5, y = 1.7$

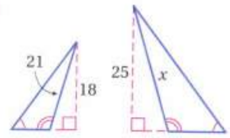
6) **جبر:** $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع محيطه $12a + 18b$، إذا كانت $\overline{QR}$ قطعة منصّفة فيه، فما قيمة QR؟ $2a + 3b$

7) **جبر:** $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره h. إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة فيه طولها $4x$، فما محيط $\triangle ABC$؟ $16x + h$

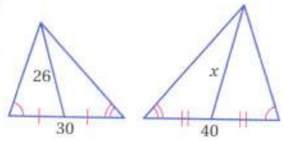
8) **نماذج:** لدى سالم نموذج لسيارة سباق حقيقيّة. إذا كان طول السيارة الحقيقيّة 10 ft و 6 in، وطول النموذج 7 in، فما معامل تشابه النموذج إلى السيارة الحقيقيّة؟ **1:18**

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

9) **29.2**



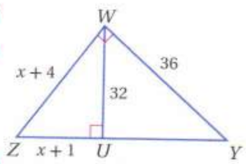
10) **34.7**



جبر: عيّن المثلثين المتشابهين، وأوجد كل طول مشار إليه في كل من السؤالين الآتيين:

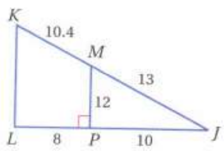
11) WZ, UZ

$\triangle WUZ \sim \triangle YUW$
وفق مسلمة التشابه **AA؛ 27, 24**



12) KL

$\triangle KJL \sim \triangle MJP$
وفق نظرية التشابه **SAS**،
$KL = 21.6$



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 6-1, 6-2, 6-3, 6-4		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف: تعيين بدائل الإجابة التي تمثل "لا" أمثلة صحيحة. في أسئلة الاختيار من متعدد.

2 التدريس

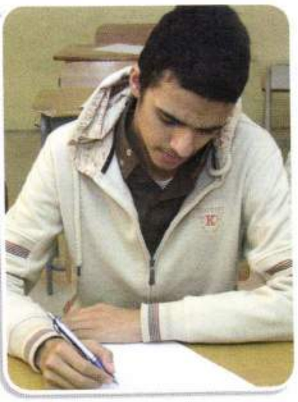
أسئلة التعزيز

أسأل:

- ما المقصود باللّامثال في بدائل السؤال من نوع الاختيار المتعدد؟
- كيف يمكن تحديد اللامثال من بين بدائل أسئلة الاختيار من متعدد؟

الفصل 6 الإعداد للاختبارات المعيارية

تعيين اللّاأمثلة



تتطلب أسئلة الاختيار من متعدّد أحيانًا تحديد أيّ البدائل المعطاة تعدّ لا أمثلة صحيحة. وتتطلب هذه الأسئلة مدخلًا مختلفًا لحلّها.

استراتيجيات تعيين اللّاأمثلة

الخطوة 1

اقرأ المسألة وافهمها.

- **اللّامثال:** اللّامثال هو بديل من بدائل الإجابة لا يحقق شروط المسألة.
- **كلمات أساسيّة:** ابحث عن كلمة لا (تكتب عادة بخط غامق أو يوضع تحتها خط) لتفهم منها أن المطلوب منك أن تجد لا مثالًا.

الخطوة 2

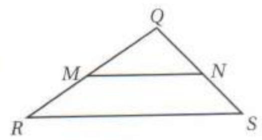
اتبع الإرشادات والخطوات الآتية لمساعدتك على تعيين اللّامثال. عيّن بدائل الإجابة الواضح عدم صحتها واحذفها.

- احذف البدائل التي تبدو بعيدة عن محتوى السؤال.
- احذف البدائل ذات الوحدات غير الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

في المثلث المجاور، $\angle MQN \cong \angle RQS$.
أيّ مما يأتي لا يكفي لإثبات أنّ $\triangle QRS \sim \triangle QMN$؟



A $\angle QMN \cong \angle QRS$

B $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

C $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

D $\frac{QM}{QR} = \frac{QN}{QS}$

الفصل 6 الإعداد للاختبارات المعياريّة

يُشير الحرف "لا" المكتوب بالخط الغامق أنه يتعين عليك أن تجد لا مثالًا. اختبر كلًّا من بدائل الإجابة باستعمال مبادئ تشابه المثلثات لترى إن كان أيٌّ منها لا يثبت أن $\triangle QRS \cong \triangle QMN$.

البديل A : $\angle QMN \cong \angle QRS$

إذا كانت $\angle QMN \cong \angle QRS$ ، فإنّ $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ وفق مسلمة التشابه AA .

البديل B : $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$ ، فإن $\angle QMN \cong \angle QRS$ ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان بالنسبة لمستقيمين متوازيين قطعهما القاطع $\overline{QR}$. لذلك $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ وفق مسلمة التشابه AA .

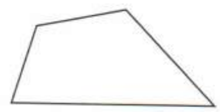
البديل C : $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

إذا كانت $\overline{QN} \cong \overline{NS}$ ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ ؛ لأننا لا نعرف أيّ شيء عن $\overline{MR}$, $\overline{QM}$. لذلك فالبديل C يُعدّ لا مثالًا، فالإجابة الصحيحة هي C. وإذا كان لديك وقت فاختبر البديل D للتأكد من أنه مثال صحيح.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على النموذج المخصص للإجابة:

1) النسبة بين قياسات زوايا الشكل الرباعي أدناه هي 6:5:4:3. أيّ مما يأتي لا يمكن أن يكون قياسًا لزاوية من زوايا الشكل؟ **D**



A $60°$ **C** $120°$

B $80°$ **D** $140°$

2) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا مضادًا للتخمين أدناه؟ **G**

إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإنه مربّع.

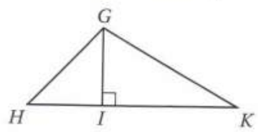
F متوازي الأضلاع

G المستطيل

H المعين

J شبه المنحرف

3) أيّ مما يأتي لا يكفي لإثبات أنّ $\triangle HIG \sim \triangle GIK$؟ **C**



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

4) أي مثلثين مما يأتي ليسا بالضرورة متشابهين؟ **H**

F مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $30°$

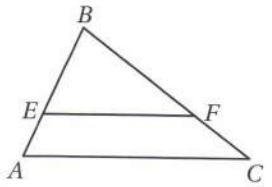
G مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $45°$

H مثلثان متطابقا الساقين

J مثلثان متطابقا الأضلاع

مثال إضافي

مثال من اختبار معياري:
في المثلث أدناه. إذا علمت أن $\angle EBF \cong \angle ABC$. فأيّ مما يأتي لا يكفي لإثبات أنّ $\triangle BFE \sim \triangle BCA$؟ C



A $\angle BFE \cong \angle BCA$

B $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$

C $\overline{BE} \cong \overline{EA}$

D $\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BA}$

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1 للتحقق من فهم الطلاب.

الفصل 6 الإعداد للاختبارات المعيارية 111

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كلّ سؤال؛ فقد تشير إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيميّة مثل:

1) A أخطأ في الحسابات.
B أخطأ في كتابة التناسب.
C أخطأ في كتابة التناسب.
D صحيحة.

2) A أخطأ في الحسابات.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D خمّن.

3) A أخطأ في الحسابات.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

4) A عدم فهم المفهوم.
B عدم فهم المفهوم.
C صحيحة.
D عدم فهم المفهوم.

5) A أخطأ في استعمال الصيغة.
B صحيحة.
C أخطأ في استعمال الصيغة.
D أخطأ في استعمال الصيغة.

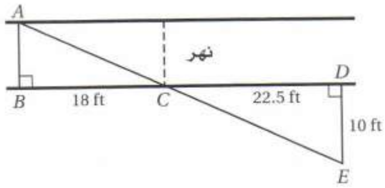
6) A أخطأ في الحسابات.
B أخطأ في الحسابات.
C صحيحة.
D خمّن.

7) A صحيحة.
B أخطأ في الحسابات.
C ضرب الإجابة الصحيحة في 2
D استعمل 21 m للشكل الرباعي الأصغر.

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي. ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة:

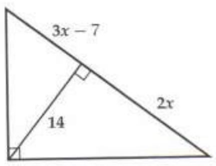
1) يُريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير. فعيّن الأطوال المبيّنة في الشكل أدناه.



أوجد العرض التقريبي للنهر باستعمال هذه المعلومات. D

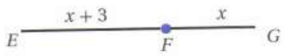
A 5ft
C 7ft
B 6ft
D 8ft

2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟ B



A 5
C 8
B 7
D 10

3) إذا كان $EG = 15m$ ، فما طول $\overline{EF}$؟ B

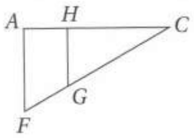


A 6m
C 10m
B 9m
D 12m

إرشادات للاختبار

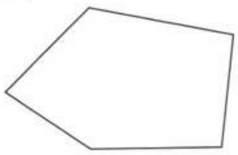
السؤال 2: عيّن مثلثين متشابهين، واكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x.

4) أي الحقائق الآتية ليست كافية لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟ C



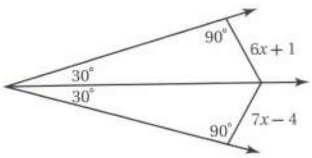
A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$
B $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$
C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$
D $\angle FAH, \angle CHG$ زاويتان قائمتان.

5) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع أدناه؟ B



A 450°
C 630°
B 540°
D 720°

6) أوجد قيمة x. C



A 3
C 5
B 4
D 6

7) شكلان رباعيان متشابهان بمعامل تشابه 3:2. إذا كان محيط الشكل الرباعي الأكبر 21 m ، فما محيط الشكل الرباعي الأصغر؟ A

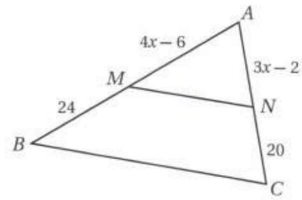
A 14m
C 28m
B 17.5m
D 31.5m

أسئلة ذات إجابات قصيرة

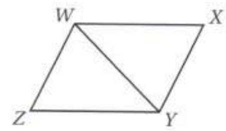
اكتب إجابتك على نموذج الإجابة.

8) **إجابة شبكيّة :** أجرت هند دراسة مسحية شملت 50 طالبة في مدرستها، فوجدت أن 35 منهن يأخذن واجبًا منزليًا في أربعة أيام على الأقل كل أسبوع، إذا كان عدد طالبات المدرسة 290 طالبة، فكم تتوقع أن يكون عدد الطالبات اللواتي يأخذن العدد نفسه من الواجبات المنزلية كل أسبوع؟ **203 طالبات**

9) **إجابة شبكيّة :** إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x . **9**



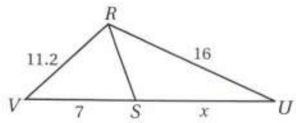
10) الشكل الرباعي $WXYZ$ معين. إذا كان $m\angle XYZ = 110^\circ$، فأوجد $m\angle ZWY$. **55°**



11) ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟ **انظر الهامش**

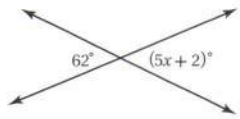
إذا كان صالح مولودًا في الرياض، فإنّه مولود في السعوديّة.

12) **إجابة شبكيّة :** إذا كان $\overline{RS}$ تنصّف $\angle VRU$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x . **10**



13) **إجابة شبكيّة :** يبين مقياس رسم خريطة أن $1\text{ cm} = 25\text{ km}$، ما المسافة الحقيقية بين مدينتين إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة 4.5 cm؟ **112.5 km**

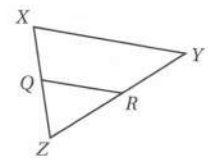
14) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ **12**



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبيّنًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه للإجابة عن كل من الأسئلة الآتية:



a) إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$ فما العلاقة بين الأطوال RZ, YR, QZ, XQ؟ $\frac{XQ}{QZ} = \frac{YR}{RZ}$

b) إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}, XQ = 15, QZ = 12, YR = 20$، فما طول $\overline{RZ}$؟ **16 وحدة**

c) إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}, XQ = QZ, QR = 9.5$، فما طول $\overline{XY}$؟ **19 وحدة**

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس..	6-2	6-2	1-7	6-2	5-1	4-1	6-1	2-4	6-3	5-5	1-3	6-4	6-1	1-8	6-3

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة في الفصول 1−6 من خلال:

- اختبار معياري تراكمي: ص (112−113)
- اختبار تراكمي: ص (43−45)

إجابة :

11) إذا لم يكن صالح مولودًا في السعودية فإنّه لم يولد في الرياض.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 7 : حدد الأسئلة صفحة 115 واجبًا منزليًا لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 1-6 ، ص (76) :

28) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة ، فإن المثلثين منفرجي الزاوية متشابهان.

29) لا يمكن أن يتشابها. إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان. في حين أن لشبه المنحرف ضلعان فقط متوازيان. لذلك فالشكلان لا يمكن أن يكونا متشابهين أبدًا ، لأنهما لا يمكن أن يكونا من نوع واحد من الأشكال.

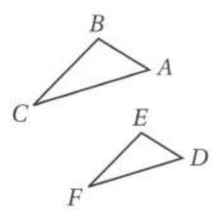
30) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة ، فإن المثلثين قائمي الزاوية يكونان متشابهين.

31) أحيانًا، إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة فإن المثلثين متطابقي الضلعين يكونان متشابهين.

32) لا يمكن أن يتشابها؛ إجابة ممكنة: بما أنّ المثلث المتطابق الضلعين له ضلعان متطابقان والمثلث مختلف الأضلاع له ثلاثة أضلاع غير متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة لا يمكن أن تكون متساوية. لذا فالمثلث المتطابق الضلعين والمثلث مختلف الأضلاع لا يمكن أن يتشابها.

33) دائمًا؛ إجابة ممكنة: المثلث متطابق الأضلاع قياس كل زاوية فيه 60، لذلك، فزوايا أيّ مثلث متطابق الأضلاع مطابقة لزوايا أي مثلث آخر متطابق الأضلاع ، وبما أن أضلاع المثلث متطابق الأضلاع تكون متطابقة دائمًا، فإن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة تكون متساوية دائمًا. لذا فإن، أي مثلثين متطابقي الأضلاع يكونان دائمًا متشابهين.

34) **المعطيات:** $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{m}{n}$



المطلوب: $\dfrac{\triangle ABC \text{ محيط}}{\triangle DEF \text{محيط}} = \dfrac{m}{n}$

البرهان: بما أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ،

فإنّ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$. إذن

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{m}{n}$. وبالضرب التبادلي يكون $AB = DE\left(\dfrac{m}{n}\right)$

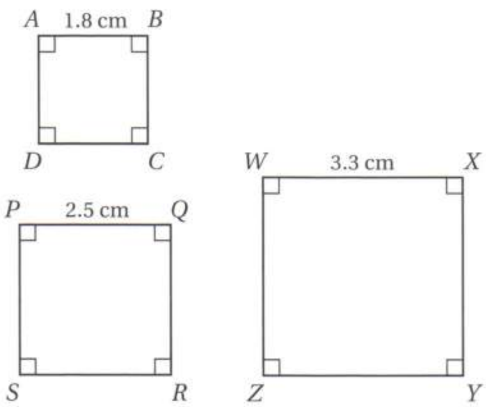
$BC = EF\left(\dfrac{m}{n}\right)$ ، و $AC = DF\left(\dfrac{m}{n}\right)$. وبالتعويض يكون محيط

$\triangle ABC$ يساوي $DE\left(\dfrac{m}{n}\right) + EF\left(\dfrac{m}{n}\right) + DF\left(\dfrac{m}{n}\right)$ ، أو

$\dfrac{m}{n}(DE + EF + DF)$. إذن، فالنسبة بين المحيطين تساوي

$\dfrac{\frac{m}{n}(DE + EF + DF)}{DE + EF + DF} = \dfrac{m}{n}$.

36a) إجابة ممكنة:

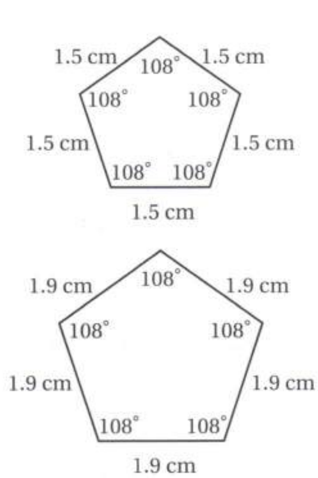


36b)

$WXYZ, ABCD$		$PQRS, WXYZ$		$ABCD, PQRS$	
1.8	$WX:AB$	0.76	$PQ:WX$	0.72	$AB:PQ$
1.8	$XY:BC$	0.76	$QR:XY$	0.72	$BC:QR$
1.8	$YZ:CD$	0.76	$RS:YZ$	0.72	$CD:RS$
1.8	$ZW:DA$	0.76	$SP:ZW$	0.72	$AD:PS$

ABCD **يشابه** *PQRS*، *PQRS* **يشابه** *WXYZ*، *WXYZ* **يشابه** *ABCD*.

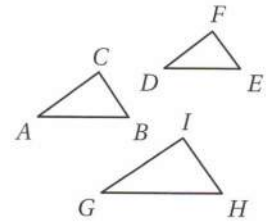
40)



نعم؛ إجابة ممكنة: المضلعان الخماسيّان المنتظمان متشابهان، لأن زواياهما المتناظرة متطابقة وأضلاعهما المتناظرة متناسبة. وبما أنّ جميع زوايا المضلع المنتظم متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة أيضًا. فإن زوايا المضلعين المنتظمين تكون متطابقة بغض النظر عن أبعاد أي شكل. وبما أن جميع أضلاع المضلع المنتظم متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة في المضلعين المنتظمين اللذين لهما العدد نفسه من الأضلاع ستكون متساوية. لذا فإن جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع تكون متشابهة.

الدرس 2-6 ، ص (85-84) :

(18



خاصيّة الانعكاس للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

البرهان :

العبارات (المبررات)

1) $\triangle ABC$ (معطى)

2) $\angle A \cong \angle A, \angle B \cong \angle B$ (خاصية الانعكاس)

3) $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (مسلّمة التشابه AA)

خاصيّة التماثل للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

المطلوب: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

العبارات (المبررات)

1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (معطى)

2) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$
(تعريف المضلعين المتشابهين)

3) $\angle D \cong \angle A, \angle E \cong \angle B$ (خاصية التماثل)

4) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (مسلّمة التشابه AA)

خاصيّة التعدّي للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \triangle DEF \sim \triangle GHI$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

العبارات (المبررات)

1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$،
$\triangle DEF \sim \triangle GHI$(معطيات)

2) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle D \cong \angle G$،
$\angle E \cong \angle H$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

3) $\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H$ (خاصية التعدّي)

4) $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ (مسلّمة التشابه AA)

19) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $\triangle XYZ, \triangle ABC$ قائما الزاوية. (معطى)

2) $\angle XYZ, \angle ABC$ قائمتان . (تعريف المثلث القائم)

3) $\angle XYZ \cong \angle ABC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$ (معطى)

5) $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$ (نظرية التشابه SAS)

20) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ شبه منحرف. (معطى)

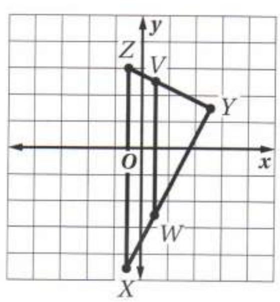
2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (تعريف شبه المنحرف)

3) $\angle BDC \cong \angle ABD, \angle BAC \cong \angle DCA$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخليًّا)

4) $\triangle DCP \sim \triangle BAP$ (نظرية التشابه AA)

5) $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$ (الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين متناسبة)

(22



$XY = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$YZ = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$ZX = 6 - (-9) = 15$

$VW = 5 - (-5) = 10$

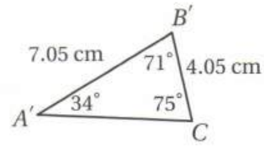
$WY = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$YV = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\frac{XY}{WY} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}, \frac{YZ}{YV} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}, \frac{ZX}{VW} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

وبما أنّ $\frac{XY}{WY} = \frac{YZ}{YV} = \frac{ZX}{VW} = \frac{3}{2}$، فإن $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$
حسب نظرية التشابه SSS.

30) إجابة ممكنة:

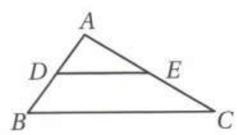


$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ لأن طول كل ضلع يساوي نصف طول الضلع المناظر له وقياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

31) إجابة ممكنة: أختار ضلعًا من أضلاع المثلث الأصلي وأقيس طوله. وأرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي مِثلي طول هذا الضلع. ثم أقيس الزاويتين المحصورتين بين الضلع الذي قِسْت طوله في المثلث الأصلي والضلعين الآخرين. وارسم زاويتين مطابقتين للزاويتين اللتين أوجدت قياسيهما في المثلث الأصلي عند طرفي القطعة التي رسمتها. وأمدُّ ضلعي الزاويتين الجديدتين حتى تلتقيا. فيكون المثلث الجديد مشابهًا للمثلث الأصلي وأبعاده مثلي أبعاد المثلث الأصلي.

الدرس 3-6 ، ص (94-96) :

22) المعطيات: $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$



المطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1) $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ (معطى)

2) $\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$ (خاصيّة الإضافة)

3) $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ (بالجمع)

4) $AB = AD + DB, AC = AE + EC$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

5) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (بالتعويض)

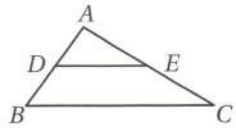
6) $\angle A \cong \angle A$ (خاصيّة الانعكاس)

7) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (نظرية التشابه SAS)

8) $\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف المضلّعين المتشابهين)

9) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

23) المعطيات: D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، E نقطة منتصف $\overline{AC}$.



المطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}, DE = \frac{1}{2}\, BC$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، E نقطة منتصف $\overline{AC}$. (معطيات)

2) $\overline{AD} \cong \overline{DB}, \overline{AE} = \overline{EC}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $AD = DB, AE = EC$ (تعريف القطعتين المتطابقتين)

4) $AB = AD + DB, AC = AE + EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

5) $AB = AD + AD, AC = AE + AE$ (بالتعويض)

6) $AB = 2AD, AC = 2AE$ (بالجمع)

7) $\frac{AB}{AD} = 2, \frac{AC}{AE} = 2$ (خاصيّة القسمة)

8) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (خاصيّة التعدّي)

9) $\angle A \cong \angle A$ (خاصيّة الانعكاس)

10) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (نظرية التشابه SAS)

11) $\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف المضلّعين المتشابهين)

12) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

13) $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ (تعريف المضلّعين المتشابهين)

14) $\frac{BC}{DE} = 2$ (خاصيّة التعويض)

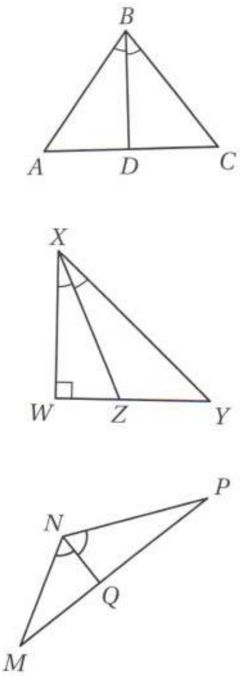
15) $2DE = BC$ (بالضرب)

16) $DE = \frac{1}{2}BC$ (بالقسمة)

28)

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$	نظرية التشابه SAS
$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$	تعريف المثلثين المتشابهين
$\frac{DE}{BC} = \frac{40}{100}$	بالتعويض
$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$	بالتبسيط
$\frac{2}{5}\, BC = DE$	بالضرب

34a) إجابة ممكنة:



36) دائمًا؛ إجابة ممكنة: FH قطعة منصّفة افرض أن $BC = x$ فيكون $FH = \frac{1}{2}x$. وبما أن $FHCB$ شبه منحرف فإنّ،

$$DE = \frac{1}{2}(BC + FH) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$$

لذلك، $DE = \frac{3}{4}BC$.

37) البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1) $AB = 4, BC = 4$ (معطيات)

2) $AB = BC$ (بالتعويض)

3) $AB + BC = AC$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

4) $AB + BC = AC$ (بالتعويض)

5) $2BC = AC$ (بالجمع)

6) $AC = 2BC$ (خاصيّة التماثل)

7) $\frac{AC}{BC} = 2$ (بالقسمة)

8) $ED = DC$ (معطى)

9) $ED + DC = EC$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

10) $DC + DC = EC$ (بالتعويض)

11) $2DC = EC$ (بالجمع)

12) $\frac{EC}{DC} = 2$ (خاصيّة القسمة)

13) $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ (خاصيّة التعدّي)

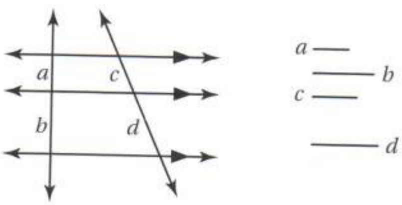
14) $\angle C \cong \angle C$ (خاصيّة الانعكاس)

15) $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ (نظرية التشابه SAS)

16) $\angle CAE \cong \angle CBD$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

17) $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإنّ المستقيمين متوازيان)

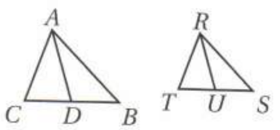
38)



حسب النتيجة 6.1، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

الدرس 6-4، ص (102):

15) المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle RST$



$\overline{DA}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle ABC$.

$\overline{UR}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle RST$.

المطلوب: $\frac{AD}{RU} = \frac{AB}{RS}$

البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1) $\triangle ABC \sim \triangle RST$؛ $\overline{AD}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle ABC$؛ $\overline{RU}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle RST$. (معطيات)

2) $CD = DB; TU = US$ (تعريف القطعة المتوسّطة)

3) $\frac{AB}{RS} = \frac{CB}{TS}$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

4) $CB = CD + DB; TS = TU + US$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

5) $\frac{AB}{RS} = \frac{CD + DB}{TU + US}$ (بالتعويض)

6) $\frac{AB}{RS} = \frac{DB + DB}{US + US} = \frac{2(DB)}{2(US)}$ (بالتعويض)

7) $\frac{AB}{RS} = \frac{DB}{US}$ (بالتعويض)

8) $\angle B \cong \angle S$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

9) $\triangle ABD \sim \triangle RSU$ (نظرية التشابه SAS)

10) $\frac{AD}{RU} = \frac{AB}{RS}$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

19) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $\overline{CD}$ تنصّف $\angle ACB$، وبالرسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. (معطيات)

2) $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BC}$ (نظرية التناسب في المثلث)

3) $\angle 1 \cong \angle 2$ (تعريف منصّف الزاوية)

4) $\angle 3 \cong \angle 1$ (نظّرية الزوايا المتبادلة داخليًّا)

5) $\angle 2 \cong \angle E$ (مسلّمة الزوايا المتناظرة)

6) $\angle 3 \cong \angle E$ (خاصيّة التعدّي)

7) $\overline{CA} \cong \overline{CE}$ (عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين)

8) $EC = AC$ (تعريف القطعتين المتطابقتين)

9) $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$ (بالتعويض)

20) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $\angle H$ قائمة. L, K, M نقاط منتصفات الأضلاع. (معطيات)

2) $\overline{MK} \parallel \overline{HG}$ ، $\overline{KL} \parallel \overline{HJ}$ (نظرية القطعة المنصّفة)

3) $\angle H \cong \angle GLK$ (مسلمة الزوايا المتناظرة)

4) $\angle GLK$ قائمة. (بالتعويض)

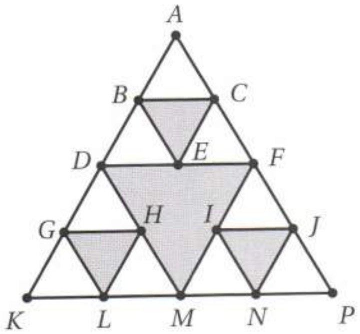
5) $\angle GLK \cong \angle LKM$ (الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة)

6) $\angle LKM$ قائمة. (بالتعويض)

توسع الدرس 6-4 ، ص (104):

4) **المعطيات:** $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع .
D, F, M, B, C, E منتصفات
$\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ ، على الترتيب.

المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع. النقاط D, F, M, B, C, E هي منتصفات $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ ، على الترتيب. (معطيات)

2) $\overline{DF}$ قطعة منصّفة في $\triangle KAP$، $\overline{BC}$ قطعة منصّفة في $\triangle ADF$ (تعريف القطعة المنصفة)

3) $\overline{DF} \parallel \overline{KP}, \overline{BC} \parallel \overline{DF}$ (نظرية القطعة المنصفة للمثلث)

4) $\overline{KP} \parallel \overline{BC}$ (القطعتان الموازيتان لقطعة مستقيمة متوازيتان)

5) $\angle ABC \cong \angle AKP$ (مسلمة الزوايا المتناظرة)

6) $\angle A \cong \angle A$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle BAC \sim \triangle KAP$ (نظرية التشابه AA)

ملحوظات المعلم

الفصل 7

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (115)

	الدرس 7-1 حصتان	الدرس 7-2 حصتان	استكشاف 7-3 حصة واحدة	الدرس 7-3 حصتان
العنوان	الانعكاس	الإزاحة (الانسحاب)	معمل الهندسة: الدوران	الدوران
الأهداف	• رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس. • رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.	• رسم الصور الناتجة عن الإزاحة. • رسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.	• استكشاف خصائص الدوران.	• رسم الصورة الناتجة عن الدوران مستعملًا المنقلة. • رسم الصورة الناتجة عن دوران شكل في المستوى الإحداثي.
المفردات الأساسية	خط الانعكاس			مركز الدوران زاوية الدوران
تمثيلات متعددة	ص (122)	ص (128)		ص (135)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**المواد** • أوراق شفافة • مسطرة • منقلة	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية ص (117)	السبورة التفاعلية ص (126)		برمجية تحرير الصور ص (132)
تنويع التعليم	ص (118, 121)	ص (125, 129)		ص (132, 133)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (137)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التحويلات الهندسية والتماثل

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(15) حصة	(2) حصة	(17) حصة

استكشاف 4-7 حصة واحدة	الدرس 4-7 حصتان	توسع 4-7 حصة واحدة	الدرس 5-7 حصتان	الدرس 6-7 حصتان
معمل الحاسبة البيانية : تركيب التحويلات الهندسية	**تركيب التحويلات الهندسية**	**معمل الهندسة : التبليط**	**التماثل**	**التمدد**
• استكشاف أثر إجراء عدة تحويلات هندسية على شكل هندسي.	• رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما الانعكاس. • رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.	• تعرّف التبليط المنتظم. • إنشاء نماذج تبليط باستعمال التقنيات ودون استعمالها.	• تحديد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد. • تحديد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.	• رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة. • رسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.
	التحويل الهندسي المركب.	التبليط التبليط المنتظم التبليط المتسق	التماثل التماثل حول محور محور التماثل التماثل الدوراني مركز التماثل رتبة التماثل مقدار التماثل	التمدد تحويل التشابه معامل التمدد
			ص (154)	ص (161)
المواد • الآلة الحاسبة Ti-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق	**المواد** • الآلة الحاسبة Ti-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق
	السبورة التفاعلية ص (141)		السبورة التفاعلية ص (151)	السبورة التفاعلية ص (158)
	ص (142 ,144)		ص (152)	ص (157 ,158)

التقويم الختامي

• دليل الدراسة والمراجعة ص (166 - 163)

• اختبار الفصل ص (167)

الفصل 7

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 7**	
	التهيئة للفصل 7 ، ص (115)	مخطط المعالجة، ص (115)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 7 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (137) اختبار منتصف الفصل، ص (51) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 7 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (163) اختبار الفصل، ص (167) اختبار معياري تراكمي، ص (170-171) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصل 7 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53-58) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59, 60) اختبار المفردات ، ص (52) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61) الاختبار التراكمي ، ص (62-64) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

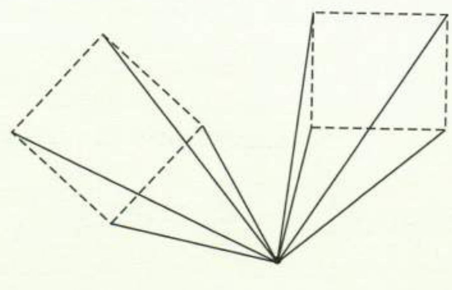
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون استعمل آلة التصوير الرقمية لتصوير نماذج لأمثلة على التماثل أو الانعكاس. اطلب إلى الطلاب أن يحضروا مرايا صغيرة لتكوين الانعكاسات وتصويرها. اطبع الصور التي التقطها الطلاب واعرضها في القاعة أو على جدار.

المتعلمون الطبيعيون اخرج مع الطلاب في جولة في رحاب الطبيعة. و اطلب إليهم أن يحضروا معهم دفاتر ملاحظات وأقلام رصاص لتسجيل ملاحظاتهم. تجول معهم حول المدرسة واطلب إليهم أن يرسموا الأشياء التي يلاحظوا أنها متماثلة وأن يسمّوها، واسألهم عن الغرض من وجود التماثل في الطبيعية حسب رأيهم.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب استعمال لوح من الفلّين رسمت عليه شبكة إحداثية، ودبابيس، وأشكال مغلقة، وخيط من الصوف لنمذجة الدوران. يمكن أن يبدأ الطلاب بوضع شكل على اللوح و تثبيت خيوط عند كل رأس، ثم يختاروا مركزًا للدوران ويثبتوا أطراف خيوط الصوف عند مركز الدوران بدبوس. ثم يتعين عليهم أن يختاروا زاوية الدوران ويستعملوا منقلة لرسم هذه الزاوية و أن يحركوا الشكل إلى موقعه الجديد.



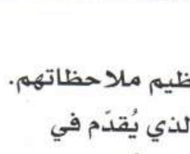
البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا الحاسبة TI-nspire أو القلم والورقة لإنشاء أنماط تبليط أحدها بواسطة الانعكاس و آخر بالدوران و الأخير بالإزاحة. يستعمل الطلاب المفاتيح المناسبة في الحاسبة TI-nspire لإتمام التبليط. ويمكن بعد ذلك تلوين نمط التبليط أو تركه كما هو على شكل مخطط واضح المعالم.

القراءة و الكتابة بلغة الرياضيات

مهارة الدراسة

شجِّع الطلاب على إنشاء إطارات المحتوى لتنظيم ملاحظاتهم. يصف الإطار المعروض أدناه مصطلح الانعكاس الذي يُقدّم في الدرس 1-7. اطلب إلى الطلاب أن يضيفوا تحويلات أخرى إلى هذا الإطار عند دراستها في هذا الفصل.

المصطلح	التعريف (بكلماتك الخاصة)	مثال	سؤال وإجابة
الانعكاس	تشكل صورة المرآة انعكاسًا للشكل الأصلي		ارسم صورة $ABCD$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم ℓ . 

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 7

- تمثيل التمدد و الانعكاس والإزاحة (الانسحاب) في المستوى الإحداثي.
- تمثيل العلاقات بيانيًا وبالجداول.
- حل معادلات خطيّة.

الفصل 7

- استعمال تحويلات التطابق لصياغة تخمينات حول خصائص الأشكال الهندسية و تبريرها.

مابعد الفصل 7

التهيئة للصف الثاني الثانوي

- تطبيق تحويلات هندسية أساسية تشمل $a \cdot f(x), f(x) + d, f(x-c), f(b \cdot x), |f(x)|, f(|x|)$ على الدالة المولدة (الأم).
- إجراء عمليات تشمل تركيب الدوال و إيجاد معكوساتها ووصف هذه الإجراءات و النتائج لفظيًا و عدديًا و بيانيًا وبالرموز.

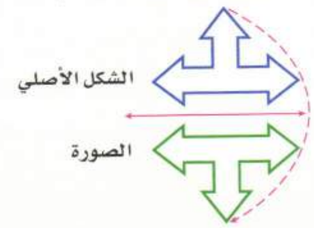
ملخص الدروس

7-1 الانعكاس

الانعكاس هو تحويل هندسي يمثل قلب الشكل حول مستقيم معلوم .

الانعكاس

يمكن أن يقلب الشكل حول مستقيم.



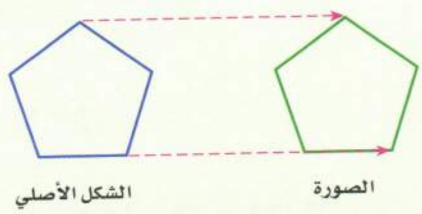
ويمكن أن يكون الانعكاس حول نقطة أو حول مستقيم أو حول مستوى و تكون الصورة الناتجة من الانعكاس مطابقة للشكل الأصلي دائمًا. وبمعنى آخر فإن الانعكاس تحويل تطابق أو تحويل متساوي القياس و يمكن أن يتم الانعكاس في المستوى الإحداثي وهذا يتيح الفرصة لتعيين إحداثيات كل نقطة في الشكل الأصلي وصورته.

7-2 الإزاحة (الانسحاب)

الإزاحة (الانسحاب) تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها بالاتجاه نفسه.

الإزاحة (الانسحاب)

يمكن إزاحة الشكل بأي اتجاه.



ويمكن رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي إذا عُلم اتجاه الإزاحة ومسافتها الأفقية و / أو الرأسية. تقوم إحدى طرائق إجراء الإزاحة لشكل ما في المستوى الإحداثي على عدّ الوحدات على المحور x وعلى المحور y بالطريقة نفسها المستعملة لإيجاد الميل.

7-3 الدوران

الدوران تحويل هندسي يدوّر كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة واتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

تسمى النقطة الثابتة مركز الدوران. وزاوية الدوران هي الزاوية المتشكلة من نقطة على الشكل الأصلي والنقطة المناظرة لها في الصورة ومركز الدوران. يحقق الدوران جميع خصائص التحويلات المتساوية القياس بما فيها الحفاظ على الأطوال و قياس الزوايا. يمكن إجراء الدوران باستعمال المنقلة لقياس زاوية الدوران والفرجار لتعيين صور النقاط.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية

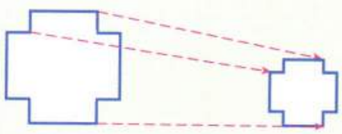
عندما يُجرى تحويل هندسي على شكل ما، ثم يُجرى تحويل آخر على الصورة الناتجة من التحويل الأول تسمى النتيجة تركيب تحويلين هندسيين. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس. وتنص النظرية 7.2 على أن الإزاحة تكافئ انعكاسين متتالين حول مستقيمين متوازيين. وتنص النظرية 7.3 على أن الدوران يكافئ انعكاسين متتالين حول مستقيمين متقاطعين.

7-5 التماثل

يكون الشكل متماثلاً إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. يقال إن الشكل متماثل حول محور إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول محورها، هي الشكل نفسه. ويقال إن للشكل تماثل دوراني إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه. وبطريقة مماثلة يكون الشكل الثلاثي الأبعاد متماثلاً حول مستوى أو متماثلاً حول محور.

7-6 التمدد

التمدد تحويل هندسي يغير أبعاد الشكل.



قد يكون الشكل الجديد أصغر من الشكل الأصلي أو أكبر منه بمعامل تمدد محدد. إذا كان معامل التمدد 1 يسمى التمدد تمددًا مطابقًا وإذا كان معامل التمدد لا يساوي 1 يكون التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا. وهذا يعني أن الشكل الأصلي والصورة متشابهان. ومن المهم الانتباه إلى أن معامل التمدد السالب لا يعني قياسًا سالبًا ولكنه يعني أن الصورة الجديدة تقع خلف الشكل الأصلي من الجهة المقابلة لمركز التمدد. وصورة مركز التمدد هي المركز نفسه دائمًا.

يمكنك استعمال معامل التمدد لإيجاد إحداثيات نقاط الصورة الناتجة عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. إذا كانت $P(x, y)$ النقطة الأصلية فإن صورتها الناتجة عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله r هي $P'(rx, ry)$. ولإيجاد معامل التمدد في المستوى الإحداثي اقسم طول الصورة على الطول الأصلي.

مشروع الفصل

التصوير والتبليط

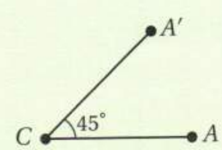
يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الانعكاس و الانسحاب والدوران للربط بين التصوير والتبليط.

- اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا في الطرق التي يوظف فيها المصورون الانعكاس والإزاحة والدوران في مجال عملهم. وأن يقدموا أمثلة لكل واحد منها. كيف يؤثر كل واحد من هذه التحويلات على الصورة؟
- ثم اطلب إليهم أن يجدوا أمثلة من الإنترنت على التبليط، يُستعمل فيها الانعكاس والإزاحة و الدوران. واسألهم إن كان نمط التبليط يذكرهم بألعاب الطفولة مثل المنظار السحري (الكاليدو سكوب).
- اطلب إلى الطلاب أن يكوّنوا أنماط تبليط خاصة بهم باستعمال تحويلين هندسيين على الأقل من: الانعكاس والإزاحة والدوران.
- اطلب إلى الطلاب أن يعرضوا بحوثهم وتصاميمهم أمام الصف، وأن يعطوا أمثلة على الأساليب التي استعملوها لإنشاء أنماط التبليط.

المفردات: قدّم مفردات هذا الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: مركز الدوران هو نقطة ثابتة ينقل الدوران حولها بزاوية $x°$ كل نقطة إلى صورتها.

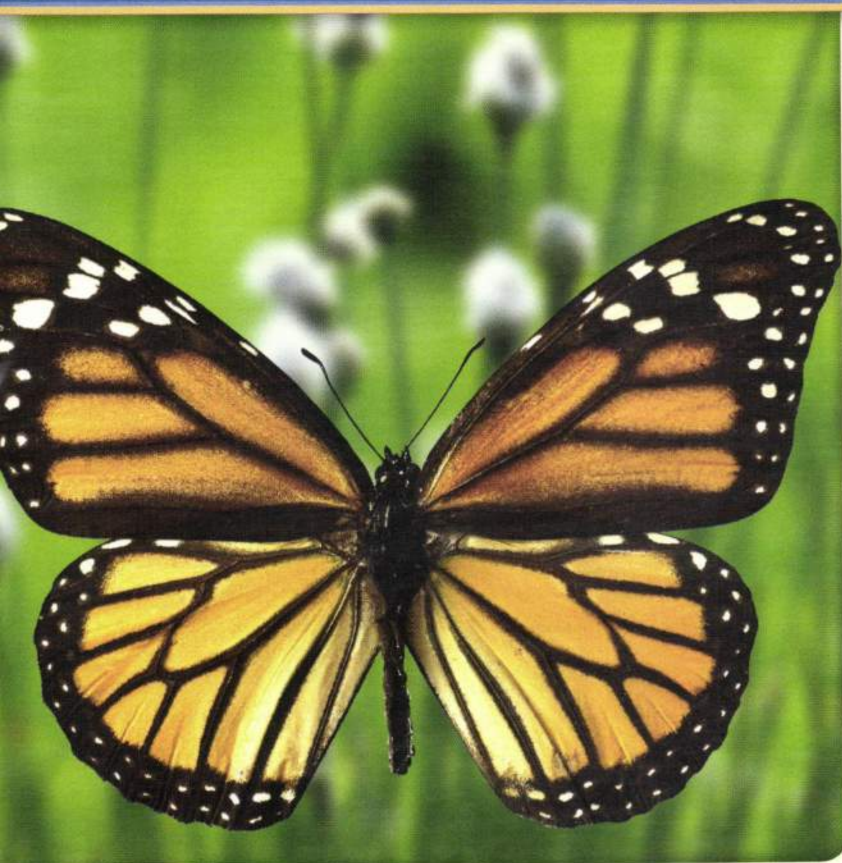
مثال:



سؤال: ما النقطة التي تمثل مركز الدوران في الشكل أعلاه؟ وما اتجاه الدوران؟ النقطة C ، عكس اتجاه عقارب الساعة.

الفصل 7

التحويلات الهندسية و التماثل
Transformations and Symmetry



فيما سبق:
درستُ تحويلات التطابق: الانعكاس والإزاحة والدوران.

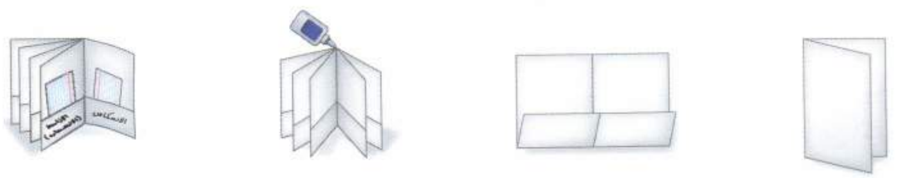
والآن:
- أرسم صور أشكال بالانعكاس أو الانسحاب أو الدوران أو التمدد وأسميها.
- أتعرف تركيب تحويلين هندسيين.
- أتعرف التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد والثلاثية الأبعاد.

لماذا؟
أحياء: يستعمل علماء الأحياء صفات هندسية كالتماثل حول مستقيم والتماثل الدوراني لتصنيف مخلوقات المملكة الحيوانية.

المطويات منظم أفكار

التحويلات الهندسية والتماثل: اعمل هذه المطوية؛ لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 7 ، مبتدئًا بثلاث أوراق A4.

1. اطوِ كل ورقة من المنتصف.
2. ابسط الأوراق ثم اطوها طوليًا بعرض 5 cm لتكوّن جيبين.
3. ألصق الأوراق لتكون كتيبًا كما في الشكل أدناه.
4. عنوِن كل جيب كما في الشكل أدناه.



المطويات منظم أفكار

غرضها: يدون الطلاب ملاحظاتهم ويرسموا أشكالًا تمثل التحويلات الهندسية.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها لكتابة المفردات الجديدة لكل درس، وشجعهم على كتابة أمثلة لتوضيح هذه المفردات، وتعريفاتها.

وقت استعمالها: شجع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات على مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 7

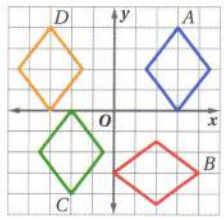
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(تُستعمل مع الدروس 1-7 إلى 4-7)

صنِّف كلًّا من تحويلات التطابق الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B
2) D إلى A
3) A إلى C

1) دوران
2) إزاحة أو انعكاس
3) إزاحة

(تُستعمل مع الدرس 2-7)

4) **هندسة إحداثية:** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $P(-4,2)$,$Q(3,0)$, $R(4,3)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟
$P'(-8,8), Q'(-1,6), R'(0,9)$

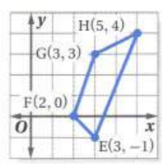
استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

5) $(0,1)$, $(2,8)$ $\sqrt{53}$
6) $(-2,0)$, $(3,3)$ $\sqrt{34}$
7) $(6,4), (2,1)$ 5
8) $(-3,-1), (0,5)$ $3\sqrt{5}$

(تُستعمل مع الدرس 6-7)

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم. أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in، وكان طول الصورة 1 ft . 24

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.

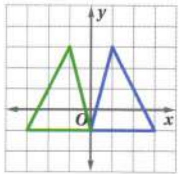


10) $\overline{EF}$ $\sqrt{2}$
11) $\overline{FG}$ $\sqrt{10}$
12) $\overline{GH}$ $\sqrt{5}$
13) $\overline{HE}$ $\sqrt{29}$

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف تحويل التطابق المبين في الشكل المجاور إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.



يبعد كل رأس وصورته البعد نفسه عن المحور y ، ولذلك فهذا التحويل انعكاس.

مثال 2

وقف مقدّم استعراض رياضي عند النقطة (1, 4) وتحرك منها 4 وحدات إلى اليمين ثم 3 وحدات إلى أسفل. ما إحداثيات النقطة التي وصل إليها؟

يمكن التعبير عن حركة 4 وحدات إلى اليمين وثم 3 وحدات إلى الأسفل بالقاعدة

$$(x, y) \rightarrow (x+4, y-3)$$
$$(1, 4) \rightarrow (1+4, 4-3) = (5, 1)$$

مثال 3

عمل خالد نموذجًا مصغرًا لجسر. أوجد مقياس الرسم للنموذج إذا كان طول النموذج 2m ، وطول الجسر 120m .

طول النموذج يساوي 2m ، وطول الجسر يساوي 120m؛

إذن مقياس رسم النموذج إلى الجسر $\frac{2\text{ m}}{120\text{ m}}$ أي $\frac{1}{60}$.

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فقم بمراجعة تحويلات الانعكاس والإزاحة والدوان وصيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، ومقياس الرسم.

www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم بتحديد أخطائهم، ووَضْع أنشطة علاجية لذلك.

www.obeikaneducation.com

7-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

تعيين الانعكاس و إثبات أنه تحويل تطابق.

الدرس 7-1

رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس حول مستقيم، ورسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال خصائص التشابه والتحويلات الهندسية و توسيعها لاستكشاف تخمينات حول الأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما نوع التحويل الهندسي الذي تمثله هذه الصورة؟ انعكاس
- ما المفردات الأخرى التي تستعمل للتعبير عن الانعكاس؟ قلب، أو صورة مرآة
- هل هذه الصورة متماثلة؟ ولماذا؟ متماثلة حول مستقيم أفقي؛ لأنها ناتجة عن انعكاس حول مستقيم أفقي.

7-1 الانعكاس Reflection

فيما سبق:

درستُ الانعكاس كتحويل هندسي.

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن الانعكاس.
- ارسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

المفردات:

خط الانعكاس line of reflection

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

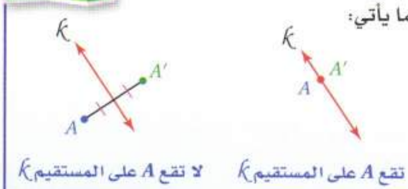
تُظهر المسطحات المائية انعكاسات رائعة لما يحيط بها. ففي مسطحات الماء الراكدة تلاحظ أن لكل نقطة فوق سطح الماء نقطة مناظرة لها تحته هي صورتها الناتجة عن الانعكاس. وتكون المسافة بين النقطة الأصلية وسطح الماء مساوية للمسافة بين صورتها وسطح الماء.

رسم الانعكاسات: تعلمت أن الانعكاس هو تحويل هندسي يمثِّل قلب الشكل حول مستقيم يسمى **خط الانعكاس**، بحيث يكون بعد النقطة وبعد صورتها عن خط الانعكاس متساويين.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول مستقيم (أضف إلى مطويتك)

ينقل الانعكاس حول مستقيم النقطة إلى صورتها كما يأتي:

- إذا كانت النقطة واقعة على خط الانعكاس فإن صورتها هي النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة غير واقعة على خط الانعكاس، يكون خط الانعكاس هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها.



A', A'', A''' هي أسماء للنقاط المتناظرة الناتجة من تحويل واحد أو أكثر للنقطة A

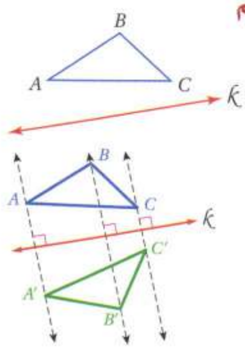
لرسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم، ارسم صورة كل رأس من رؤوسه، ثم صل بين صور الرؤوس لتكوين صورة المضلع بهذا الانعكاس.

إرشادات للدراسة

الشكل الأصلي والصورة سيكون الشكل الأصلي دائمًا في هذا الكتاب باللون الأزرق، وستكون الصورة باللون الأخضر.

مثال 1 رسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم

ارسم صورة $\triangle ABC$ بالانعكاس حول المستقيم ℓ.

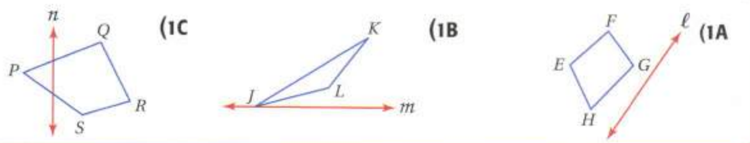


الخطوة 1: ارسم مستقيمًا يمر بكل رأس من رؤوس المثلث ويكون عموديًّا على المستقيم ℓ.

الخطوة 2: قِس المسافة بين النقطة A والمستقيم ℓ، وعيِّن النقطة A'؛ بحيث يكون المستقيم ℓ العمود المنصف لِـ $\overline{AA'}$.

الخطوة 3: كرر الخطوة 2 لتعين B' و C'. ثم صل الرؤوس A', B', C' لتشكل صورة المثلث الناتجة عن الانعكاس.

تحقق من فهمك (1A–1C) انظر ملحق الإجابات.



إرشادات للدراسة

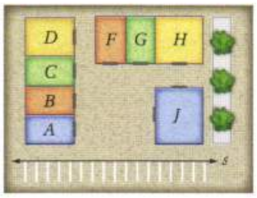
تحويل التطابق هو تحويل تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

لاحظ أن الانعكاس هو تحويل تطابق، ففي المثال 1، يكون $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

مصادر الدرس 7-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (118, 121)	• تنويع التعليم ص (118, 121)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (14)	• كتاب التمارين ص (14)	• كتاب التمارين ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2 من واقع الحياة — اختصار المسافات باستعمال الانعكاس

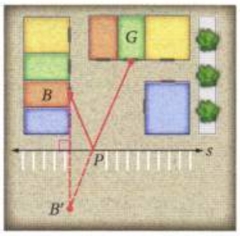


تسوق: افترض أنك تريد شراء بعض الملابس من المتجر B، وتعود إلى سيارتك، ثم تشتري زوجًا من الأحذية من المتجر G.

فأين توقف سيارتك على المستقيم s بحيث تكون المسافة التي تسيرها على قدميك أقل ما يمكن؟

افهم: طلب إليك تعيين نقطة P على المستقيم s، بحيث يكون $BP + PG$ أقل ما يمكن.

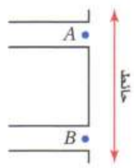
خطط: تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أقل ما يمكن عندما تكون هذه النقاط على استقامة واحدة. استعمل صورة النقطة B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم s لإيجاد موقع النقطة P.



حُلّ: ارسم $\overline{B'G}$. وعيّن P عند تقاطع المستقيم s مع $\overline{B'G}$.

تحقق: اختر مواقع أخرى للنقطة P على المستقيم s. قارن مجموع $BP + PG$ في كل حالة؛ لإثبات أن الموقع الذي تم تحديده للنقطة P هو الذي يجعل هذا المجموع أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك



2) **مبيعات التذاكر:** يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة القدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخص ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن. انظر الهامش.

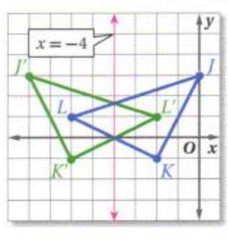
رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي: يمكن أيضًا رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي حول مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي.

مثال 3 — رسم صورة بالانعكاس حول مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي

مثّل بيانيًا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(0, 3), K(-2, -1), L(-6, 1)$.
وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطى في كل مما يأتي:

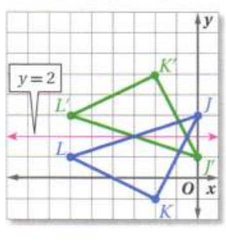
a) $x = -4$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس بحيث يكون المستقيم $x = -4$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



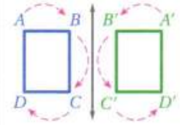
b) $y = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 2$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



إرشادات للدراسة

خصائص الانعكاس
يحافظ الانعكاس على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة، ولكنه يعكس الاتجاه.



رسم صورة شكل بالانعكاس

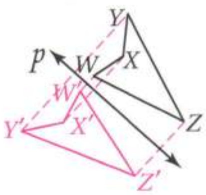
المثالان 1, 2 يبينان كيفية رسم صور الأشكال بالانعكاس و كيفية استعمال الانعكاسات لاختصار المسافات.

التقويم التكويني

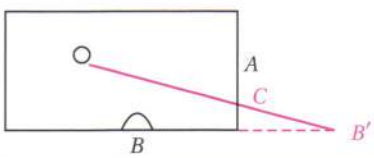
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 ارسم صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ بالانعكاس حول المستقيم p باستعمال المسطرة.



2 **البلياردو:** افرض أنه يجب أن ترتد الكرة عن الحافة A وتتدحرج إلى الجيب B. عيّن النقطة C على الحافة A التي يجب أن ترتطم بها الكرة لضمان تدحرجها مباشرة باتجاه الجيب B.



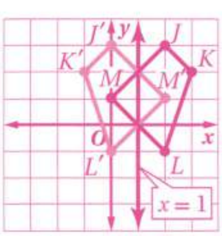
رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي

الأمثلة 5-3 تبيّن طريقة رسم الانعكاسات في المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

3 إحداثيات رؤوس الشكل $JKLM$ هي $J(2, 3), K(3, 2), L(2, -1), M(0, 1)$. مثل بيانيًّا الشكل $JKLM$ وصورته بالانعكاس في المستقيم المعطى في كل مما يأتي.

a) $x = 1$

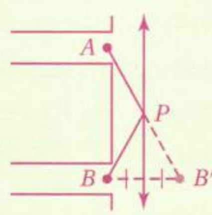


التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثًا على السبورة ثم استعرض الانعكاسات باستعمال القلب الأفقي والرأسي و اطلب إلى الطلاب تحديد العلاقة بين الأشكال.

إجابة (تحقق من فهمك):

(2



تحقق من فهمك

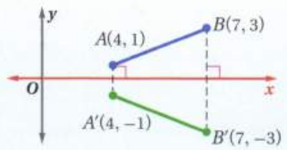
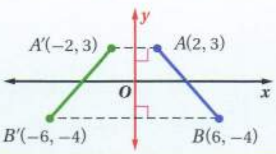
مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $R(-1, 1), S(4, 1), T(4, -1), V(-1, -3)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ ممّا يأتي: **3A–B** انظر ملحق الاجابات

3A) $y = -3$ **3B)** $x = 2$

يمكنك استعمال القاعدة الآتية عندما يكون خط الانعكاس هو المحور x أو المحور y .

مفهوم أساسي: الانعكاس حول المحور x أو المحور y

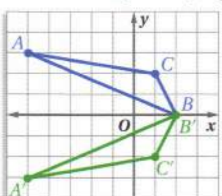
أضف إلى مطويتك

	الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
التعبير اللفظي:	لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1.	لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور y، اضرب إحداثي x لها في -1.
الرموز:	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال:		

مثال 4 رسم صورة بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي، وارسم صورته بالانعكاس المحدد.

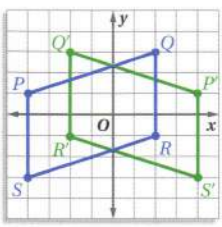
a) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-5, 3), B(2, 0), C(1, 2)$ بالانعكاس حول المحور x .



اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 .

$$\begin{aligned}
(x, y) &\rightarrow (x, -y)\\
A(-5, 3) &\rightarrow A'(-5, -3)\\
B(2, 0) &\rightarrow B'(2, 0)\\
C(1, 2) &\rightarrow C'(1, -2)
\end{aligned}$$

b) متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه $P(-4, 1), Q(2, 3), R(2, -1), S(-4, -3)$ بالانعكاس حول المحور y .



اضرب الإحداثي x لكل نقطة في -1 .

$$\begin{aligned}
(x, y) &\rightarrow (-x, y)\\
P(-4, 1) &\rightarrow P'(4, 1)\\
Q(2, 3) &\rightarrow Q'(-2, 3)\\
R(2, -1) &\rightarrow R'(-2, -1)\\
S(-4, -3) &\rightarrow S'(4, -3)
\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

4A–B) انظر ملحق الإجابات

4A) المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه $E(-4, -1), F(2, 2), G(3, 0), H(-3, -3)$ بالانعكاس حول المحور x.

4B) $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(3, 2), K(2, -2), L(4, -5)$ بالانعكاس حول المحور y .

قراءة الرياضيات

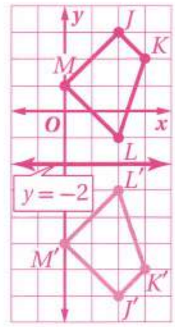
التعبير عن الدالة بالصيغة الإحداثية
يمكن قراءة العبارة $P(a, b) \rightarrow P'(a, -b)$ على النحو الآتي: تتحول النقطة P التي إحداثياها a و b إلى النقطة P' شرطة التي إحداثياها a وسالب b .

إرشادات للدراسة

النقاط الثابتة
تسمى النقطة B في المثال 4a نقطة ثابتة؛ لأنها اقترنت مع نفسها. النقاط الواقعة على محور الانعكاس هي فقط التي تبقى ثابتة تحت تأثير الانعكاس.

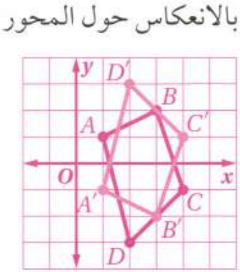
مثالان إضافيان

3 b) $y = -2$

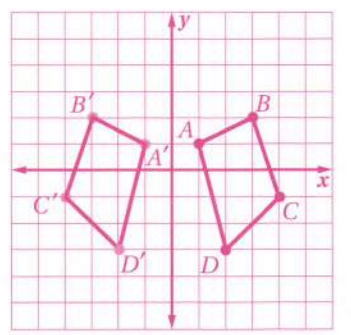


4 مثّل بيانيًا كلًّا من الشكلين الآتيين وصورتيهما بالانعكاس المحدد .

a) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 1), B(3, 2), C(4, -1), D(2, -3)$ بالانعكاس حول المحور x .



b) الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته بالانعكاس حول المحور y .



$A(1, 1) \rightarrow A'(-1, 1),$
$B(3, 2) \rightarrow B'(-3, 2),$
$C(4, -1) \rightarrow C'(-4, -1),$
$D(2, -3) \rightarrow D'(-2, -3)$

تنويع التعليم

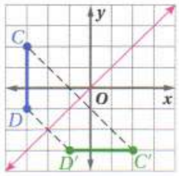
ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيون: دع الطلاب يناقشوا أمثلة على الانعكاس من الطبيعة والأشياء التي يستعملونها يوميًّا، وأعطهم الفرصة لأن يبينوا مواقع محاور الانعكاس أو محاور التماثل فيها، بحيث تشمل أشياء من الطبيعة مثل أوراق الأشجار والأزهار والفواكه والخضراوات والحيوانات والبيض وغيرها، وتشمل الأشياء التي يستعملونها يوميًّا مثل أقلام الرصاص والورق والسيارات والأقراص المدمجة والملابس وغيرها.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتعامدة
يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي 1− .

ويمكن أيضًا أن تعكس شكلًا حول المستقيم $y = x$، ففي المستوى الإحداثي المجاور، ارسم عمودًا من النقطة C على المستقيم $y = x$، وحيث إن ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1، فإن ميل العمود الذي رسمته يساوي 1−. لاحظ أنك إذا تحركت من النقطة $C(-3, 2)$، بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل تصل إلى نقطة تقاطع العمود الذي رسمته مع المستقيم $y = x$.
و من هذه النقطة على $y = x$، تحرك 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل لتعيّن النقطة $C'(2, -3)$ التي هي صورة النقطة C بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.
وبطريقة مماثلة نجد أن صورة $D(-3, -1)$ هي $D'(-1, -3)$.
وبمقارنة إحداثيات هاتين النقطتين مع إحداثيات صورتيهما يمكن الوصول إلى القاعدة الآتية للانعكاس حول المستقيم $y = x$.



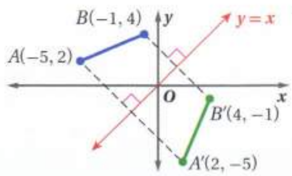
مفهوم أساسي — الانعكاس حول المستقيم $y = x$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ بدّل الإحداثيين x و y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, x)$

مثال:

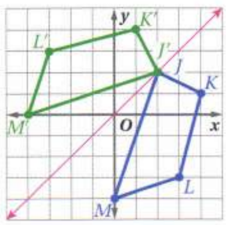


مثال 5 رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$

مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $J(2, 2), K(4, 1), L(3, -3), M(0, -4)$ وارسم صورته $J'K'L'M'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

بدّل الإحداثيين x و y لكل الرؤوس.

$(x, y) \rightarrow (y, x)$
$J(2, 2) \rightarrow J'(2, 2)$
$K(4, 1) \rightarrow K'(1, 4)$
$L(3, -3) \rightarrow L'(-3, 3)$
$M(0, -4) \rightarrow M'(-4, 0)$

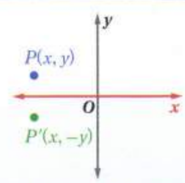
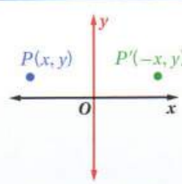
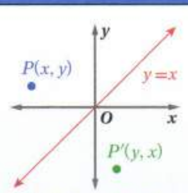


تحقق من فهمك

5) مثّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$. وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. انظر الهامش.

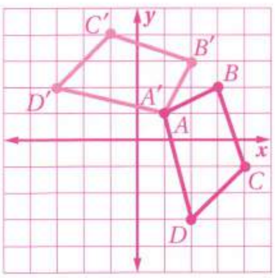
ملخص المفهوم — الانعكاس في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

مثال إضافي

5 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(1, 1), B(3, 2), C(4, -1), D(2, -3)$. مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $ABCD$ وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$A(1, 1) \longrightarrow A'(1, 1),$
$B(3, 2) \longrightarrow B'(2, 3),$
$C(4, -1) \longrightarrow C'(-1, 4),$
$D(2, -3) \longrightarrow D'(-3, 2)$

المحتوى الرياضي

أخطاء شائعة: من الأخطاء الشائعة ضرب الإحداثي x في 1− عند الانعكاس في المحور x وضرب الإحداثي y في 1− عند الانعكاس في المحور y. ذكر الطلاب أنه عند الانعكاس في المحور x يبقى الإحداثي x للنقطة كما هو و يتغير الإحداثي y وعند الانعكاس في المحور y يبقى الإحداثي y كما هو ويتغير الإحداثي x للنقطة. وبيّن لهم أن الانعكاس في المحور x يقلب الشكل إلى الأعلى أو إلى الأسفل في حين أن الانعكاس في المحور y يقلب الشكل إلى اليمين أو إلى اليسار.

تنبيه!

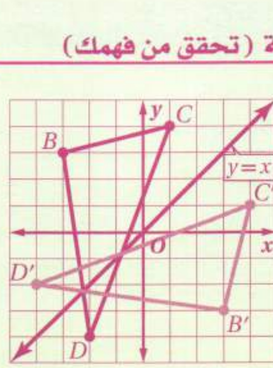
الرؤوس: عند رسم صورة شكل بالانعكاس يجب تتبع الرؤوس وصورها بعناية. ويكون هذا الأمر في غاية الأهمية للأشكال المتماثلة كالمربع حيث يجب تسمية الرؤوس وصورها لتحديد تحويل هندسي وحيد.

إرشادات للمعلم الجديد

الانعكاسات: تستعمل في الكتب المختلفة مفردات مختلفة مثل انعكاس في محور، و انعكاس حول محور و انعكاس عبر محور و كل هذه المفردات تعني الأمر نفسه.

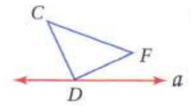
إجابة (تحقق من فهمك)

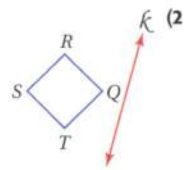
(5

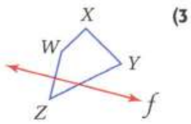


تأكد

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى: 3-1) انظر الهامش.

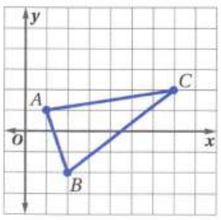
(1


(2


(3


المثال 2 4) **مباريات:** ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع يجب أن يوقف صديقه سيارته حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.
انظر ملحق الإجابات

المثال 3 مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كل من السؤالين 6، 5. 6-5) انظر الهامش.



5) $y = -2$

6) $x = 3$

المثالان 4, 5 مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي، وارسم صورته بالانعكاس المحدد.

9-7) انظر ملحق الإجابات

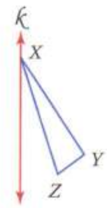
7) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y.

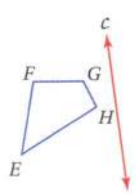
8) $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x.

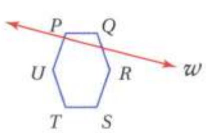
9) الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تدرب وحل المسائل

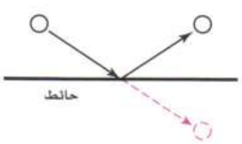
المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى. 12-10) انظر ملحق الإجابات

(10


(11


(12


المثال 2 **رياضة:** عندما ترتطم كرة بحائط فإنها ترتد عنه وتتحرك على نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط. استعمل هذه المعلومات في حل السؤال 13. انظر ملحق الإجابات



تنويع الواجبات المنزلية

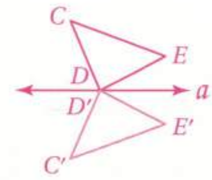
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	23–10 ، 38–36 ، 48–40
ضمن المتوسط	37–11 فردي ، 38 ، 40 ، 41 ، 48–44
فوق المتوسط	48–24

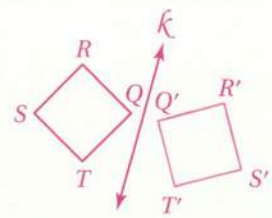
3 التدريب

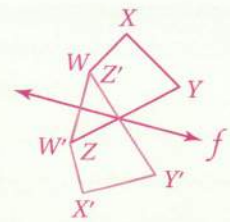
التقويم التكويني

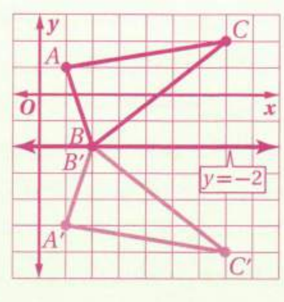
استعمل التمارين 9–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

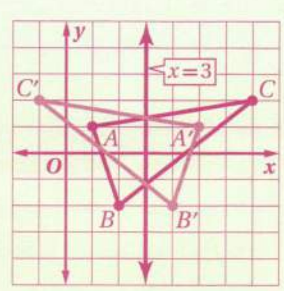
إجابات:

(1


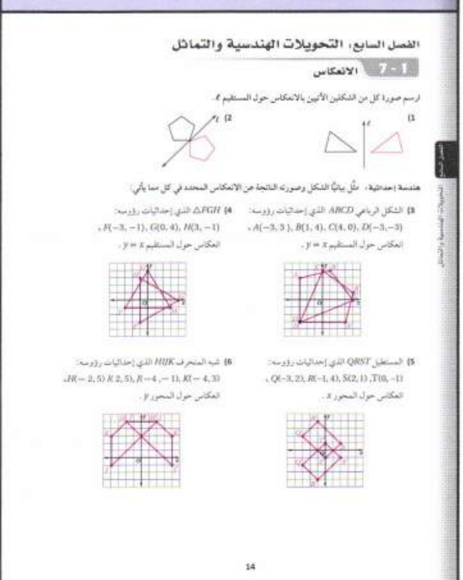
(2


(3


(5


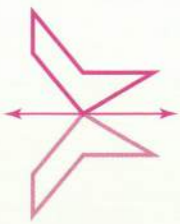
(6


كتاب التمارين، ص (14)

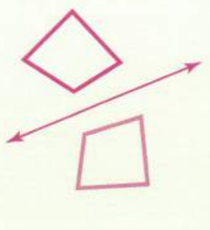


إجابات:

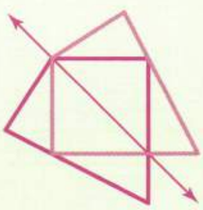
(24



(25

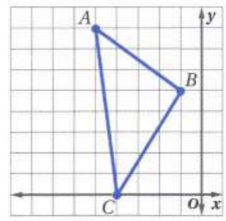


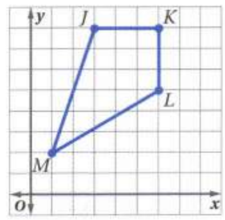
(26

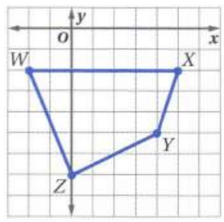


13) **كرة قدم:** يشارك سليمان في مباراة كرة القدم في ملعب داخلي، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B. ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C. ارسم شكلًا يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط، التي يجب أن يصوب سليمان الكرة إليها.

المثال 3 مثّل بيانيًّا صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى . **14–19) انظر ملحق الإجابات**







14) $\triangle ABC, y = 3$

15) $JKLM, x = 1$

16) $WXYZ, y = -4$

17) $\triangle ABC, x = -1$

18) $JKLM, y = 4$

19) $WXYZ; x = -2$

المثالان 4, 5 مثّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي، وارسم صورته بالانعكاس المحدد . **20–23) انظر ملحق الإجابات**

20) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-5, 2), B(1, 2), C(1, -1), D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.

21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-4, 6), K(0, 6), L(0, 2), M(-4, 2)$ بالانعكاس حول المحور y .

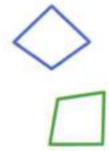
22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-3, 2), G(-4, -1), H(-6, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

23) $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه $W(2, 3), X(7, 3), Y(6, -1), Z(1, -1)$ بالانعكاس حول المحور x .

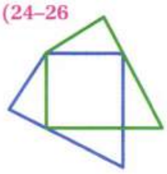
يبين كل من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيم ما، ارسم خط الانعكاس في كل منها. **24–26) انظر الهامش .**

24)

25)



26)



الربط مع الحياة

المصورون

يلتقط المصورون الصور لأغراض متعددة مثل الصحافة أو لأغراض علمية، ويتطلب العمل في بعض مجالات التصوير مثل التصوير الصحفي أو التصوير العلمي تدريبًا خاصًا.

27) **تصوير:** انظر إلى الصورة المجاورة.

a) ما الشيء الذي يفصل بين الحمار الوحشي و انعكاسه؟ **الماء**

b) ما المصطلح الهندسي الذي يمثل هذا الشيء؟ **المستقيم**

تنويع التعليم

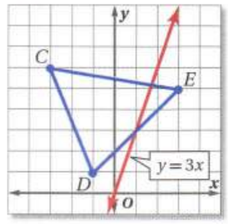
ضمن فوق

توسّع: تلعب الانعكاسات الهندسية دورًا هامًا في رياضات عدة مثل الجولف و البلياردو و التنس و تنس الطاولة والهوكي وكرة القدم في الملاعب الداخلية المغلقة. ارجع إلى السؤال 13 لتناقش كيف يمكن استعمال الانعكاس لإنشاء ركلة كرة من نقطة إلى نقطةأخرى على الحائط الجانبي في ملعب كرة قدم داخلي، بحيث ترتد إلى نقطة داخل الملعب. اطلب إلى الطلاب أن يصمموا ملعب جولف مصغر ذي 9 حفر. يجب أن يتضمن النموذج شكل المنطقة الخضراء لكل فقرة والنقطة التي تبدأ منها ضرب كرة الجولف و موقع الحفرة. يمكن أن ينشئ الطلاب الضربات المحكمة لكل حفرة للنموذج الذي أعدوه أو النماذج التي أعدها زملاؤهم.

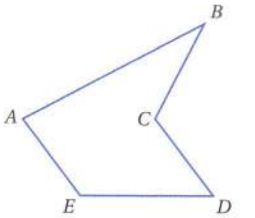
جبر: مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كل مما يأتي، واكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس؟ 28–30) انظر ملحق الإجابات

28) المحور x **29)** المحور y **30)** المستقيم $y = x$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$. انظر الهامش .

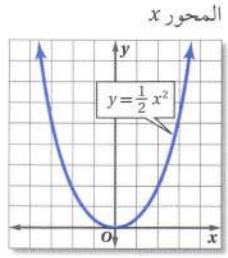


32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير. انظر الهامش .

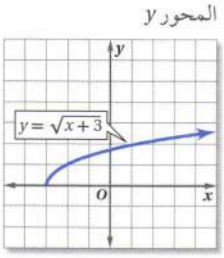


جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كل من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس. 33–35) انظر الهامش .

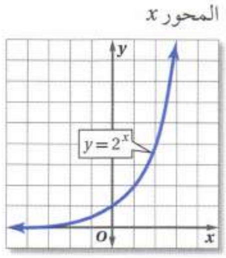
33) المحور x



34) المحور y



35) المحور x



36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة الانعكاس حول نقطة الأصل . a, b) انظر الهامش.

a) هندسيًّا: ارسم المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.

b) بيانيًّا: عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامة واحدة، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه عن نقطة الأصل.

c) جدوليًّا: انقل الجدول الآتي وأكمله. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A	$(2, 4)$	A'	$(-2, -4)$
	B	$(4, 5)$	B'	$(-4, -5)$
	C	$(3, 1)$	C'	$(-3, -1)$

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكل، وصورته الناتجة من انعكاسه حول نقطة الأصل . $(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$

تاريخ الرياضيات

فيلكس كلاين
(1849–1925)
هو عالم رياضيات ألماني عرّف الهندسة بأنها دراسة خصائص الفضاء التي تبقى دون تغيير تحت تأثير مجموعة من التحويلات الهندسية.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $(2, 3)$ الناتجة عن انعكاس حول المحور x . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش.

جميل	إبراهيم
$C'(2, -3)$	$C'(-2, 3)$

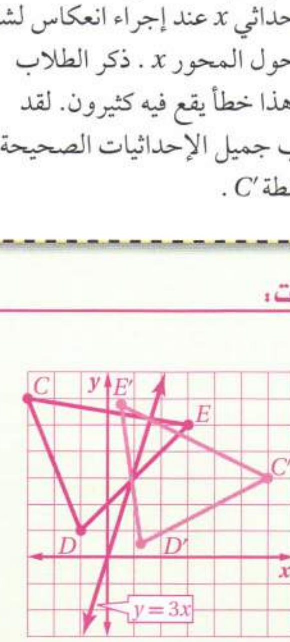
تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب في السؤال 36، الرسوم الهندسية والتمثيلات البيانية والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء الانعكاس في نقطة الأصل.

تنبيه!

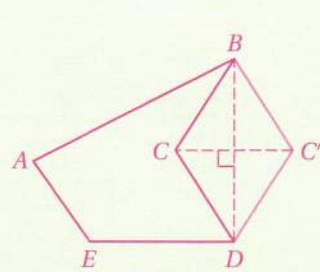
اكتشف الخطأ: يجب أن يدرك الطلاب في السؤال 37، بأن إبراهيم قد وقع في خطأ شائع وهو تغيير إشارة الإحداثي x عند إجراء انعكاس لشكل ما حول المحور x . ذكر الطلاب أن هذا خطأ يقع فيه كثيرون. لقد كتب جميل الإحداثيات الصحيحة للنقطة C' .

الإجابات:

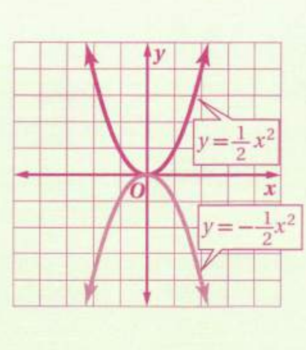
(31



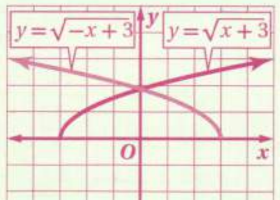
(32



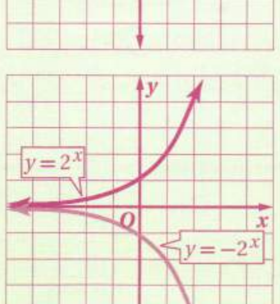
(33



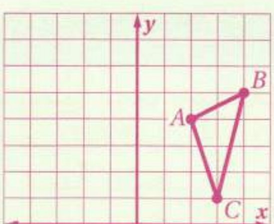
(34



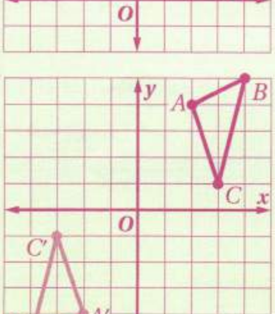
(35



36a) إجابة ممكنة:



(36b



41–38) انظر الهامش

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقة عليه تمامًا بالضبط كما كان أصلًا.

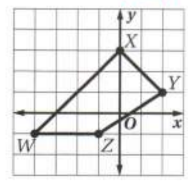
39) **تحدٍ:** إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيم معين هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة خط الانعكاس. اشرح تبريرك.

40) **تبرير:** هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

41) **اكتب:** تقع النقاط P, Q, R على استقامة واحدة، حيث Q واقعة بين P و R. صف خطة لإثبات أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

تدريب على الاختبار المعياري

42) **إجابة قصيرة:** إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $W'X'Y'Z'$، ما إحداثيات X'؟ **(0, 3)**



43) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(-2, 4), (3, 3)$ على الترتيب. ما قيمة AB؟ **B**

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

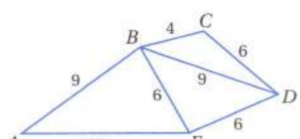
C $(5, -1)$

D $\sqrt{50}$

مراجعة تراكمية

44) **هندسة إحداثية:** $\overline{PR}$ يقسم $\overline{MN}$, $\overline{NL}$ تناسبيًا في $\triangle LMN$، إذا كانت إحداثيات رؤوس $\triangle NPR$ هي: $N(8, 20), P(11, 16), R(3, 8)$، وكانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$، فأوجد إحداثيات النقطتين L , M. (الدرس 4-6)
$L(17, 8); M(-7, -16)$

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينة تصف العلاقة بين قياسي الزاويتين أو طولي القطعتين المستقيمتين في كل مما يأتي. (الدرس 6-4)



45) AB, FD — $AB > FD$

46) $m\angle BDC, m\angle FDB$ — $m\angle BDC < m\angle FDB$

47) $m\angle FBA, m\angle DBF$ — $m\angle FBA > m\angle DBF$

استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفي $\overline{AB}$ هما $A(5, 4)$, $B(3, -1)$. تحركت كل من هاتين النقطتين 3 وحدات إلى اليمين و5 وحدات إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة A' , B' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي. $(x, y) \longrightarrow (x + 3 , y - 5)$

b) أوجد إحداثيات A' , B' . $A'(8, -1)$, $B'(6, -6)$

c) أوجد طول كل من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$. $\sqrt{29}$, $\sqrt{29}$

4 التقويم

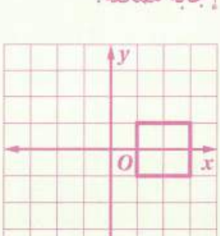
بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية و أن يستعملوا ورق مربعات لرسم أشكال وصورها بالانعكاس. يمكن أن يرسم أحد الطلاب شكلًا له 3 رؤوس ويرسم مستقيمًا أو نقطة ويسميهما و يقوم الطالب الآخر برسم صورته بالانعكاس. سوف يسلم الطلاب أوراقهم عند مغادرة غرفة الصف.

إجابات:

36d) إجابة ممكنة: إحداثيا الصورة بالانعكاس في نقطة الأصل هما المعكوسان الجمعيان لإحداثيي النقطة الأصلية.

37) جميل؛ إجابة ممكنة: صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x يبقى موقع الصورة الأفقي نفسه ولكنه يتغير رأسيًا. عندما تعكس النقطة $(2, 3)$ حول المحور x يكون إحداثيا الصورة $(2, -3)$ لأنها تكون في الموقع الأفقي نفسه ولكن في الجهة الأخرى من المحور x رأسيًا.

38) إجابة ممكنة:



39) ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة وصورتها $\frac{3}{5}$. وباستعمال قانون نقطة المنتصف نجد أن نقطة منتصف القطعة الواصلة بين النقطة و صورتها $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. وباستعمال صيغة النقطة والميل لمعادلة المستقيم نجد أن معادلة خط الانعكاس $y = -\frac{5}{3}x + 4$. (ميل العمود المنصف يساوي $-\frac{5}{3}$ لأنه يساوي سالب مقلوب الميل $\frac{3}{5}$)

40) أحيانًا؛ إذا وقعت النقطة على محور الانعكاس فتبقى صورتها في الموقع نفسه.

41) أنشئ النقاط P, Q, R على استقامة واحدة، بحيث تكون Q بين P و R. ارسم المستقيم ℓ ، ثم أنشئ أعمدة من كلٍّ من P, Q, R على المستقيم ℓ. واستعمل صيغة الميل لتبين أن ميل $P'Q'$ يساوي ميل $P'R'$ فتكون النقاط P', Q', R' على استقامة واحدة ولأن $PQ = P'Q'$, $QR = Q'R'$, $PR = P'R'$ وحيث أن $PR = PQ + QR$ فإن $P'R' = P'Q' + Q'R'$ ما يعني أن Q' تقع بين P', R' .

7-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

رسم الصورة الناتجة عن انعكاس حول مستقيم.

الدرس 7-2

رسم الصورة الناتجة عن الإزاحة، ورسم الصورة الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-2

استعمال خصائص التشابه وتحويلات التشابه وتوسيعها لاستكشاف تخمينات حول الأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا تستعمل الفرق العسكرية عادة الإزاحة في تحركها وليس الدوران؟ إجابة ممكنة: استعمال الدوران يحول دون مواجهتها جمهور المتفرجين.
- ما أنواع الخطوات التي ينتقل بها أعضاء تلك الفرق؟ إجابة ممكنة: إلى الجانبين وإلى الخلف وإلى الأمام.

7-2 الإزاحة (الانسحاب)
Translation

فيما سبق:

درستُ الإزاحة كتحويل هندسي.

والآن:

- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة.
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

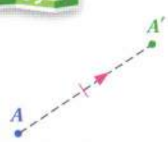
تفتتح بعض الاحتفالات الوطنية بعروض عسكرية تزيدها بهجةً وبهاءً. وتمثِّل معظم حركات أعضاء تلك الفرق العسكرية ما يُعرف في الهندسة بالإزاحة أو الانسحاب.

رسم الإزاحة (الانسحاب): تعلمت أن الإزاحة أو الانسحاب هو تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وبالاتجاه نفسه. ويمكن التعبير عن الإزاحة بقطعة مستقيمة تنقل النقطة A إلى A'.

مفاهيم أساسية — الإزاحة (الانسحاب) — أضف إلى مطويتك

تنقل الإزاحة (الانسحاب) كل نقطة إلى صورتها مسافة محدّدة وباتجاه محدّد. فالإزاحة التي تنقل النقطة A إلى صورتها A' تنقل أيضًا نقاط الشكل جميعها بحيث إن:

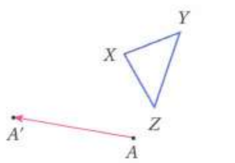
- **طول القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها يساوي طول $\overline{AA'}$.**
- **القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها توازي $\overline{AA'}$.**



النقطة A' هي صورة النقطة A بالإزاحة.

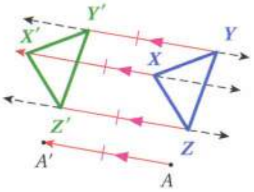
مثال 1 — رسم الإزاحة في المستوى

ارسم صورة $\triangle XYZ$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A'.



الخطوة 1: ارسم من كل رأس مستقيمًا يوازي $\overline{AA'}$.

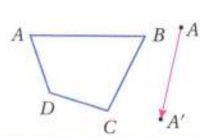
الخطوة 2: قس طول $\overline{AA'}$. ثم عيّن على المستقيم المار بالرأس X النقطة X'، التي تبعد عن X بالاتجاه من A إلى A' مسافة تساوي طول $\overline{AA'}$.



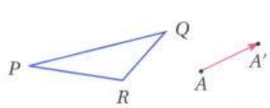
الخطوة 3: كرر الخطوة 2 لتعيّن Z' ، Y'. ثم صل الرؤوس X', Y', Z' لتشكل المثلث X', Y', Z' الناتج عن الإزاحة.

تحقق من فهمك (1A–B) انظر ملحق الإجابات

(1A



(1B



مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (125)	• تنويع التعليم ص (125, 129)	• تنويع التعليم ص (129)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (15)	• كتاب التمارين ص (15)	• كتاب التمارين ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي: يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي إذا علمنا اتجاه الإزاحة وعدد الوحدات التي تحركها الشكل أفقيًا أو رأسيًا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b، فيمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ ، ويمكن استعمال هذه القاعدة لإجراء إزاحة للشكل في المستوى الإحداثي.

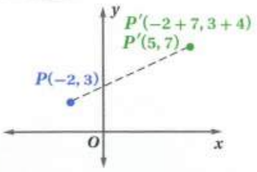
مفهوم أساسي — الإزاحة في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدة أفقيًا، و b وحدة رأسيًا، اجمع a إلى الإحداثي x ، و b إلى الإحداثي y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال: إذا كانت $a = 7$, $b = 4$ فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.



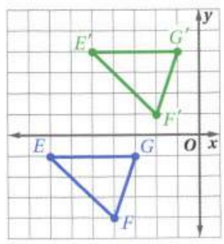
مثال 2 الانسحاب في المستوى الإحداثي

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كل مما يأتي:

a) $\triangle EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى .

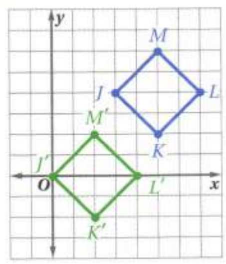
(x, y)	$\rightarrow$	$(x + 2, y + 5)$
$E(-7, -1)$	$\rightarrow$	$E'(-5, 4)$
$F(-4, -4)$	$\rightarrow$	$F'(-2, 1)$
$G(-3, -1)$	$\rightarrow$	$G'(-1, 4)$



b) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(3, 4), K(5, 2), L(7, 4), M(5, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل .

(x, y)	$\rightarrow$	$(x - 3, y - 4)$
$J(3, 4)$	$\rightarrow$	$J'(0, 0)$
$K(5, 2)$	$\rightarrow$	$K'(2, -2)$
$L(7, 4)$	$\rightarrow$	$L'(4, 0)$
$M(5, 6)$	$\rightarrow$	$M'(2, 2)$



تحقق من فهمك

(2A–2B) انظر ملحق الإجابات

2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-4, y-1)$

2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه $Q(-8, -2), R(-9, -5), S(-4, -7), T(-4, -2)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x+7, y+1)$

قراءة الرياضيات

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية
عندما يكون $b = 0$ تكون الإزاحة أفقية فقط وعندما يكون $a = 0$ تكون الإزاحة رأسية فقط.

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة
تعني إشارة a السالبة أن الإزاحة إلى اليسار، وتعني إشارة b السالبة أن الإزاحة إلى أسفل.

رسم الإزاحة

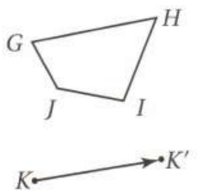
المثال 1 يبيّن كيفية رسم صورة شكل هندسي الناتجة عن إزاحة بمسافة محددة واتجاه محدد.

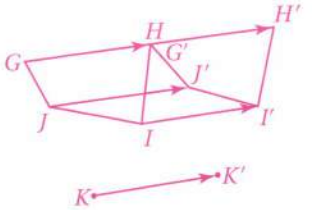
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 انقل الشكل أدناه، ثم ارسم صورته الناتجة عن الإزاحة التي تنقل K إلى K' .





رسم الإزاحة (الانسحاب) في المستوى الإحداثي

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية إجراء إزاحة لشكل في المستوى الإحداثي و ذلك بتحريكه أفقيًا أو رأسيًا أو في كلا الاتجاهين.

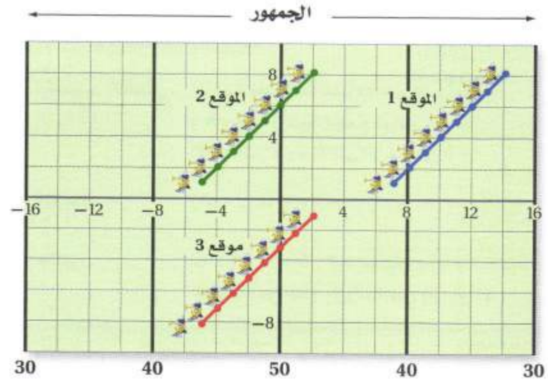
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: كوّن ثلاث أو أربع شبكات إحداثية على لوحات كبيرة و زود الطلاب بأشكال مثل المستطيل وشبه المنحرف وأشكال خماسية وسداسية. ودع الطلاب يتدربون على إجراء الإزاحة عمليًّا لهذه الأشكال على الشبكات. يمكن أن يستعمل الطلاب أمثلة من هذا الدرس أو أن يكوّنوا أمثلة جديدة خاصة بهم.

مثال 3 من واقع الحياة **وصف الإزاحة**

استعراض: في استعراض لفرقة عسكرية يسير الأفراد من الموقع 1 إلى الموقع 2 ثم إلى الموقع 3، وتمثل كل وحدة عل الشبكة خطوة واحدة.



a) **صف حركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 2 باستعمال قاعدة ولفظيًّا.**

إحدى نقاط المستقيم في الموقع 1 عند هي $(14, 8)$. وتحركت هذه النقطة إلى $(2, 8)$ في الموقع 2. استعمل قاعدة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ لكتابة معادلتين و حلهما لإيجاد قيمة كل من b ، a.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, 8)$$

$$8 + b = 8 \qquad 14 + a = 2$$

$$b = 0 \qquad a = -12$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \rightarrow (x + (-12), y + 0)$

أي أن كلًّا من أفراد الفرقة العسكرية تحرك 12 خطوة إلى اليسار، ولم يتحرك أي خطوة إلى الأمام أو إلى الخلف في أثناء انتقاله من الموقع 1 إلى الموقع 2.

b) **صف حركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 3 باستعمال قاعدة الإزاحة.**

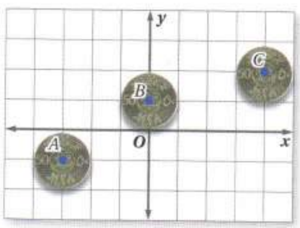
$$(14 + a, 8 + b) = (2, -1)$$

$$8 + b = -1 \qquad 14 + a = 2$$

$$b = -9 \qquad a = -12$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \rightarrow (x - 12, y - 9)$

تحقق من فهمك



3) **نقود:** تم تصوير قطعة نقد في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.

A) صف حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.

B) صف حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة. $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 3)$

إرشادات للدراسة

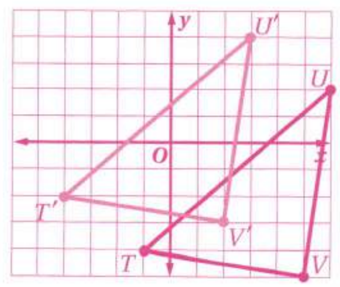
تحويلات التطابق
الإزاحة هي تحويل تطابق أيضًا، فهي تحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة.

3A) تحركت قطعة النقد 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.

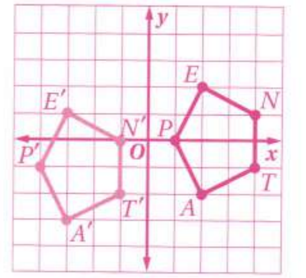
مثالان إضافيان

2 مثّل بيانيًّا كل شكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يلي:

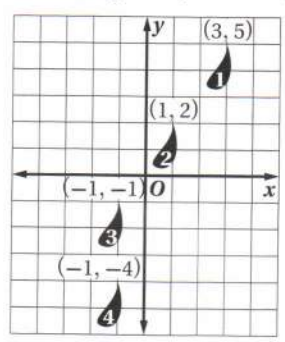
a) $\triangle TUV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(-1, -4)$, $U(6, 2)$, $V(5, -5)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y + 2)$



b) الخماسي $PENTA$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(1, 0)$, $E(2, 2)$, $N(4, 1)$, $T(4, -1)$, $A(2, -2)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 1)$



3 **صور متحركة:** يبيّن الشكل الآتي إزاحات متكررة تمثل حركة قطرة المطر.



a) صف الإزاحة التي تنقل القطرة من الموقع 2 إلى الموقع 3 باستعمال قاعدة الإزاحة، وبالتعبير اللفظي.
$(x, y) \rightarrow (x - 2, y - 3)$
أُزيحت القطرة وحدتين إلى اليسار وثلاث وحدات إلى الأسفل.

b) صف الإزاحة التي تنقل القطرة من الموقع 3 إلى الموقع 4 باستعمال قاعدة الإزاحة.
$(x, y) \rightarrow (x, y - 3)$

تنبيه!

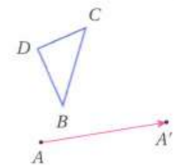
الإزاحة: عند إزاحة نقطة وفق قاعدة معينة، انتبه جيدًا للإشارات في إحداثيات النقطة وفي قاعدة الإزاحة.

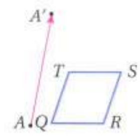
التعليم باستعمال التقنيات

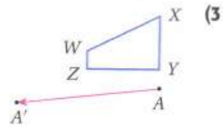
السبورة التفاعلية: ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، مثّل إزاحة بسحب المضلع إلى موقع جديد على المستوى الإحداثي. اطلب إلى الطلاب أن يجدوا إحداثيات رؤوس صورة المضلع وأن يستعملوها لوصف الإزاحة.

تأكد

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كل مما يأتي: 3–1) انظر الهامش.

(1


(2


(3


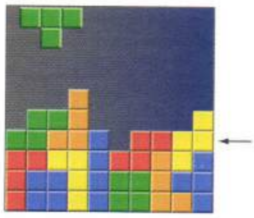
المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كل مما يأتي: 6–4) انظر ملحق الإجابات

4) شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(2, 4), K(1, 1), L(5, 1), M(4, 4)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

5) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه $D(-8, 8), F(-10, 4), G(-7, 6)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$

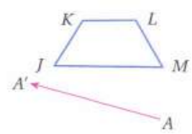
6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه $W(-6, -5), X(-2, -5), Y(-1, -8), Z(-5, -8)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 4)$

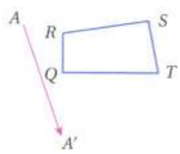
المثال 3 **7)** **ألعاب فيديو:** إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغات فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدة لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم. $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$

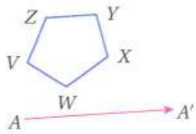


تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كل مما يأتي: 10–8) انظر ملحق الإجابات

(8


(9


(10


المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كل مما يأتي: 13–11) انظر ملحق الإجابات

11) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 1)$

12) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه $Q(-8, 4), R(-8, 2), S(-3, 2), T(-3, 4)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$

13) الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-4, -2), G(-1, -1), H(0, -4), J(-3, -6)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 6)$

المثال 3 **14)** **مواقع:** تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.

a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟ المسجد

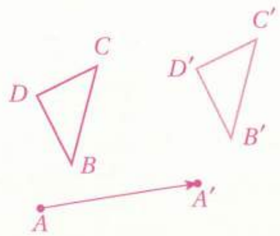
b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله. انظر الهامش

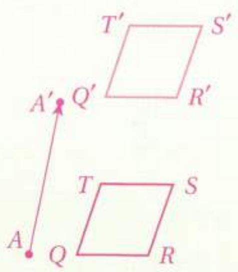
3 التدريب

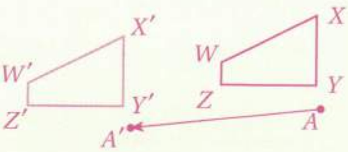
التقويم التكويني

استعمل التمارين 7–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات:

(1


(2


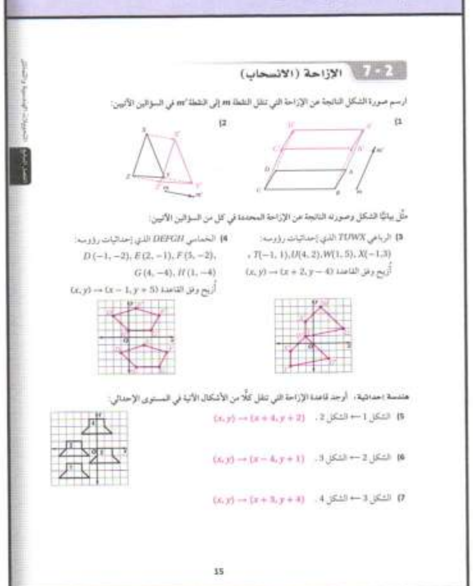
(3


14b) إجابة ممكنة: يمكن أن يسير 5 وحدات باتجاه الغرب، ثم وحدة واحدة إلى الجنوب، أو أن يسير وحدة إلى الجنوب ثم 5 وحدات باتجاه الغرب.

تنويع الواجبات المنزلية

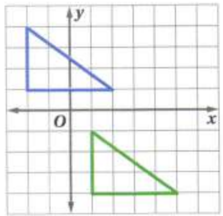
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8–14، 21، 23–40
ضمن المتوسط	9–14 فردي، 15، 17، 19–21، 23–40
فوق المتوسط	15–36، (اختياري: 37–40)

كتاب التمارين، ص (15)

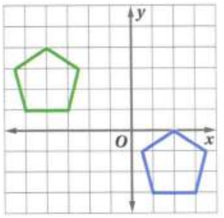


اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كل من السؤالين الآتيين.

(15



(16



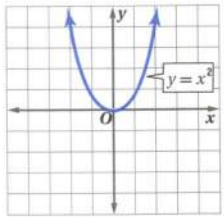
(15 $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$

(16 $(x, y) \rightarrow (x - 6, y + 4)$

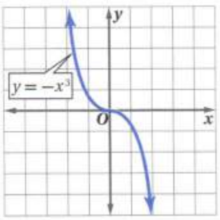
جبر: مثّل بيانيًّا صورة كل من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة. ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

17–18) انظر الهامش.

(17 $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 1)$



(18 $(x, y) \rightarrow (x - 2, y)$



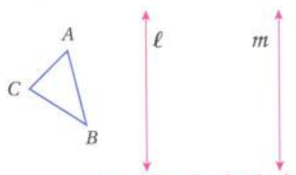
إرشادات للدراسة

انسحاب الدالة المتصلة
عند إجراء تحويل هندسي على دالة متصلة كما في السؤالين 17, 18، تبقى الدالة محافظة على شكلها كما هو الحال في تحويلات التطابق.

(19 **تضاريس:** طول سفح تلة من القمة حتى القاع 125 m. وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي $53°$. إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة.

$(x, y) \rightarrow (x - 100, y - 75)$

(20 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة الانعكاس حول محورين متوازيين.



a) **هندسيًّا:** ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$، والمستقيمين الرأسيين ℓ, m. ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة من الانعكاس حول المستقيم ℓ بطي الورقة على امتداد المستقيم ℓ، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$، الناتجة من الانعكاس حول المستقيم m بطي الورقة على امتداد المستقيم m، و سمّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$. **a–b) انظر ملحق الإجابات**

b) **هندسيًّا:** كرّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين n, p وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين q, r.

c) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي و أكمله. **الإجابات المعطاة هنا هي بعض الإجابات الممكنة.**

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
2.2	ℓ, m	4.4	A و A''، B و B''، C و C''
2.8	n, p	5.6	D و D''، E و E''، F و F''
1.4	q, r	2.8	M و M''، N و N''، P و P''

d) **لفظيًّا:** صف نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

20d) إجابة ممكنة: يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين رأسيين باعتباره إزاحة أفقية مسافتها مِثْلا المسافة بين المستقيمين الرأسيين، واتجاهها عمودي عليهما.

مسائل مهارات التفكير العليا

(21 **تبرير:** أوجد قاعدة لإيجاد الصورة الناتجة عن إزاحة نقطة وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$، ثم إزاحتها وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + c, y + d)$.

$(x,y) \rightarrow (x + a + c, y + b + d)$

تنبيه لحل سؤال

الورق الشفاف: يتطلب حل السؤال 20 استعمال الورق الشفاف.

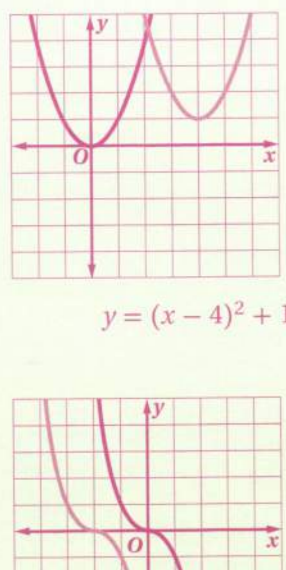
تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب في السؤال 20، الرسم الهندسي والجداول والوصف اللفظي لاستقصاء الانعكاسات حول مستقيمين متوازيين.

إجابات:

(15 $.(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$

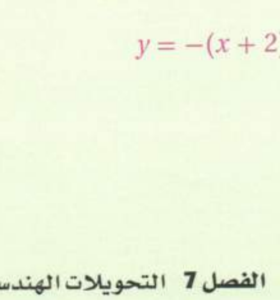
(16 $.(x, y) \rightarrow (x - 6, y + 4)$

(17



$y = (x - 4)^2 + 1$

(18



$y = -(x + 2)^3$

24) إجابة ممكنة: لا؛ لأنه يجب أن تتحرك النقطة حتى تتم الإزاحة، و يبقى الشكل محافظًا على هيئته. فلا يمكن أن تبقى أيّ نقطة ثابتة في الإزاحة. إذا بقيت أي نقطة ثابتة عندئذ تكون الصورة هي الشكل الأصلي نفسه.

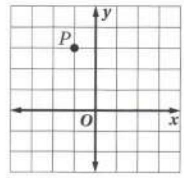
22) **تحدٍ:** أزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟ $y = m(x - a) + 2b; 2b$

23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضِّح الشروط التي يجب توفرها لتحقيق هذا الأمر. انظر ملحق الإجابات

24) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها. انظر الهامش

تدريب على الاختبار المعياري

25) عين موقع صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$. D



A $(0, 6)$	C $(2, -4)$
B $(0, 3)$	D $(2, 4)$

26) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و كرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سحبت من الكيس كرتان على التوالي دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟ B

A $\frac{1}{66}$ B $\frac{1}{11}$ C $\frac{1}{9}$ D $\frac{5}{33}$

27) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟

$(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 3)$

مراجعة تراكمية

مثِّل بيانيًا كل شكل مما يأتي، وارسم صورته بالانعكاس المحدد. (الدرس 7-1) 31–28) انظر الهامش.

28) $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفيها $D(4, 4), J(-3, 2)$، بالانعكاس حول المحور y.

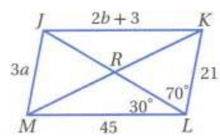
29) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$، بالانعكاس حول المحور x.

30) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

31) الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-2, 2), K(3, 1), L(4, -1), M(-2, -2)$، بالانعكاس حول نقطة الأصل.

32) **الملاحة الجوية:** كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية $3.5°$، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتة، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟ (مهارة سابقة) 6.1 km

أوجد كلًا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$. (الدرس 5-2)



33) $m\angle MJK$ $100°$

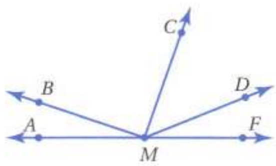
34) $m\angle JML$ $80°$

35) $m\angle JKL$ $80°$

36) $m\angle KJL$ $30°$

استعد للدرس اللاحق

صنِّف كلًا من الزوايا الآتية إلى قائمة أو حادة أو منفرجة، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجة.



37) $\angle AMC$ منفرجة؛ $110°$

38) $\angle FMD$ حادة؛ $20°$

39) $\angle BMD$ منفرجة؛ $140°$

40) $\angle CMB$ قائمة؛ $90°$

4 التقويم

فهم الرياضيات: أنشئ على السبورة رسوماً تمثل إزاحات أو ارسم بعض الإزاحات المختارة من الكتاب واطلب إلى الطلاب أن يصفوها بصوت عال.

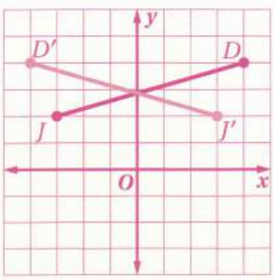
التقويم التكويني

تحقق من استيعاب الطلاب لمفاهيم الدرسين 1–7 و 2–7 بإعطائهم:

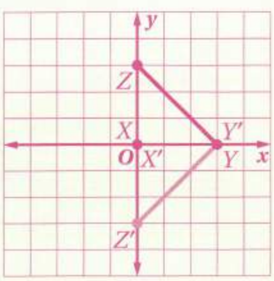
الاختبار القصير 1 صفحة (49).

إجابات:

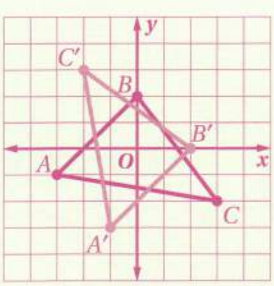
28)



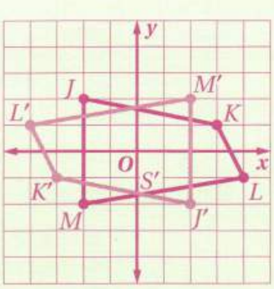
29)



30)



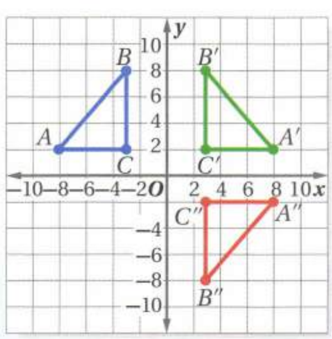
31)



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ما نوع التحويل الهندسي الذي يمثله انعكاسان متتاليان حول محورين متقاطعين؟ استعمل المستوى الإحداثي لتوضيح إجابتك. دوران



1 التركيز

الهدف

استكشاف خصائص الدوران.

المواد اللازمة لكل مجموعة

- أوراق شفافة
- مسطرة
- منقلة

إرشادات للتدريس

إن هدف معمل الهندسة هذا هو توضيح خصائص الدوران. ولكي تكون هذه الخصائص واضحة وظاهرة، وجّه الطلاب ليحرصوا على أن تكون القياسات في الخطوة 4 من النشاط، و في السؤال 1 دقيقة جدًّا.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم حل السؤالين 2–1.

واسأل:

- ماذا تلاحظ حول الأطوال المقاسة في الخطوة 4؟ $AP = A'P,\ BP = B'P,\ CP = C'P,\ DP = D'P$
- أين تضع مركز المنقلة كي تقيس زاوية الدوران °90 في السؤال1؟ أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل في المستوى الإحداثي.
- كيف تحدد الإحداثي x والإحداثي y لرؤوس المثلثين $J'K'L'$ و $J''K''L''$؟ تحدد الإحداثيات بتعيين الصورة على المستوى الإحداثي وإيجاد إحداثيات كل رأس.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حلّ السؤالين 1, 2.

الدوران Rotations

درست سابقًا أن الدوران هو تحويل هندسي يحرك الشكل حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران بزاوية معينة وباتجاه محدد. سوف تستعمل الورق الشفاف في هذا النشاط لاستكشاف خصائص الدوران.

نشاط استكشاف الدوران باستعمال الورق الشفاف


الخطوة 1

الخطوة 1: ارسم على قطعة من الورق الشفاف الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P.

الخطوة 2: انسخ الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P على قطعة أخرى من الورق الشفاف، وسمّ الشكل الجديد $A'B'C'D'$.

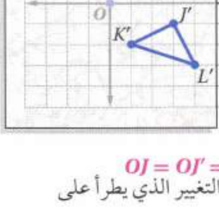
الخطوة 3: ضع الورقتين بحيث تنطبق النقطة P من الأولى على النقطة P من الثانية، ودوّر الورقتين بحيث لا يكون هناك تداخل بين $ABCD$، و $A'B'C'D'$، وألصق الورقتين معًا.


الخطوتان 3 ,2

الخطوة 4: قِس المسافة بين النقطة P وكل رأس من رؤوس الشكلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$. ثم انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

تمارين: $J'(3, -1), K'(1, -2), L'(4, -3)$ (1a



1) مثّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(1, 3)$, $K(2, 1)$, $L(3, 4)$ ثم انسخه على قطعة من الورق الشفاف.
   a) استعمل منقلة لتدوير كل رأس بزاوية °90 باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟
   b) دوِّر $\triangle JKL$ بزاوية °180 حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟ انظر الهامش.
   c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكل من النقاط J, K, L. ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكل من رؤوس المثلثين $J''K''L''$, $J'K'L'$.
   $OJ = OJ' = OJ'' = \sqrt{10}$; $OK = OK' = OK'' = \sqrt{5}$; $OL = OL' = OL'' = 5$
2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة $(4, 2)$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاوية °90 وبزاوية °180، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x وعلى الإحداثي y؟ انظر الهامش.
3) **خمّن:** ما إحداثيا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية °270 باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟ $(-y, x)$
4) **تخمين:** اكتب تخمينًا حول المسافة بين مركز الدوران P و الرؤوس المتناظرة للشكلين $ABCD$, $A'B'C'D'$. انظر الهامش.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين 3 و4 لتقويم فهم الطلاب لخصائص الدوران.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا تمثيلًا جبريًا لما يطرأ على الإحداثي x و الإحداثي y عند تدوير نقطة بزاوية: °180 , °90 و °270 حول نقطة الأصل.

إجابات:

1b) $J''(-1, -3), K''(-2, -1), L''(-3, -4)$

2) يتبدل الإحداثيان x, y عند تدوير النقطة بزاوية °90 وتتغير إشارة الإحداثي x. وعند التدوير بزاوية °180 تتغير إشارة كلا الإحداثيين.

4) بُعد كل نقطة عن مركز الدوران يساوي بُعد صورتها عنه.

7-3 الدوران
Rotations

فيما سبق:
درستُ الدوران كتحويل هندسي.

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكل مستعملًا المنقلة .
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكل في المستوى الإحداثي .

المفردات:
مركز الدوران
center of rotation
زاوية الدوران
angle of rotation

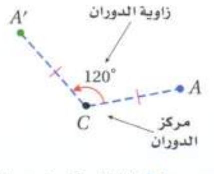
www.obeikaneducation.com

لماذا؟
استعملت الطاقة المتولدة من المراوح الهوائية في الماضي لضخ الماء أو لطحن الحبوب. أما في الوقت الحاضر فيمكن أن تكون مراوح الهواء الحديثة بديلًا مهمًّا عن الوقود الأحفوري. إذ تحول هذه المراوح طاقة الرياح إلى طاقة كهربائية.

رسم الأشكال الناتجة عن الدوران: تعلمت أن الدوران يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وباتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

مفهوم أساسي — الدوران
أضف إلى مطويتك

الدوران حول نقطة ثابتة (تسمى مركز الدوران) بزاوية معينة قياسها $x°$ واتجاه معين يحول النقطة إلى صورتها بحيث:
- **إذا كانت النقطة هي مركز الدوران فإن صورتها هي النقطة نفسها.**
- **إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكلة من النقطة ومركز الدوران والصورة تُسمى زاوية الدوران وقياسها يساوي x .**

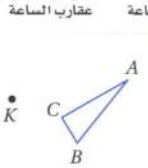


A' هي صورة A الناتجة عن دوران بزاوية $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة C.

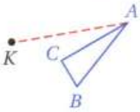
يمكن أن يكون اتجاه الدوران باتجاه حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ومن الآن فصاعدًا سيكون كل دوران عكس اتجاه حركة عقارب الساعة إلا إذا ورد خلاف ذلك.

مثال 1 رسم الشكل الناتج عن الدوران

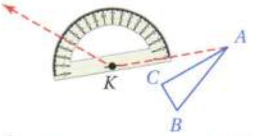
استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن دوران بزاوية $140°$ حول النقطة K.



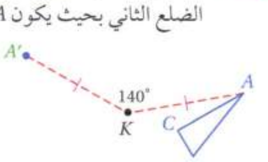
الخطوة 1: ارسم قطعة مستقيمة من الرأس A إلى النقطة K.



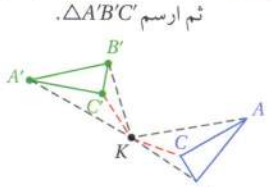
الخطوة 2: ارسم زاوية قياسها $140°$ تكون $\overline{KA}$ أحد ضلعيها .



الخطوة 3: استعمل مسطرة لتعيين A' على الضلع الثاني بحيث يكون $KA' = KA$.



الخطوة 4: كرر الخطوات 3–1 للرأسين B و C ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



7-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-7
رسم الانعكاس حول مستقيم وفي المستوى الإحداثي.
رسم الانسحاب في المستوى وفي المستوى الإحداثي.

الدرس 3-7
رسم الصورة الناتجة عن دوران شكل مستعملًا المنقلة، ورسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 3-7
توسيع خصائص التشابه و تحويلات التشابه واستعمالها لاستكشاف تخمينات حول الأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
و اسأل:
- ما الأشياء التي تدور في مراوح الهواء؟ أذرع المروحة.
- ما المصطلح الهندسي الذي يمكن أن تطلقه على العلبة التي تتصل بها الأذرع؟ مركز الدوران.
- إذا كانت الزوايا بين الأذرع متساوية، فما قياس كل منها؟ $120°$

مصادر الدرس 3-7

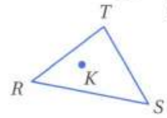
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (132, 133)	• تنويع التعليم ص (132, 133)	• تنويع التعليم ص (132, 133)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (16)	• كتاب التمارين ص (16)	• كتاب التمارين ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

✓ تحقق من فهمك

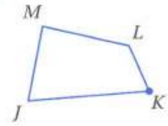
استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

انظر الهامش.

1A) $65°$



1B) $170°$



رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي: يمكنك استعمال القواعد الآتية لتحديد صورة نقطة عندما يتم تدويرها بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — الدوران في المستوى الإحداثي

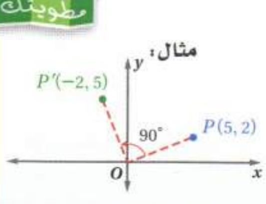
أضف إلى مطويتك

الدوران بزاوية $90°$

عند تدوير نقطة بزاوية $90°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ثم بدّل موقعي الإحداثيين x, y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال:

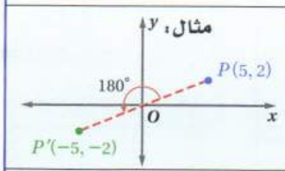


الدوران بزاوية $180°$

عند تدوير نقطة بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلًّا من الإحداثيين x, y في -1.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال:

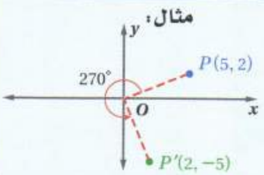


الدوران بزاوية $270°$

عند تدوير نقطة بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدّل موقعي الإحداثيين x, y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال:



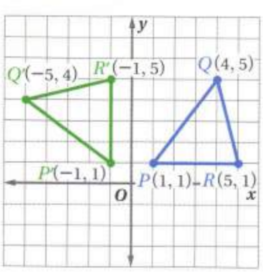
مثال 2 — الدوران في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي $P(1, 1), Q(4, 5), R(5, 1)$. مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 ثم بدّل الإحداثيين.

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$$
$$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$$
$$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$$

ثم مثّل $\triangle PQR$ وصورته $\triangle P'Q'R'$ في المستوى الإحداثي.



✓ تحقق من فهمك

انظر الهامش.

2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي $F(2, 1), G(7, 1), H(6, -3), J(1, -3)$. مثّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

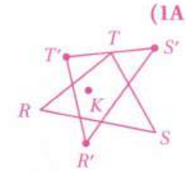
إرشادات للدراسة

الدوران باتجاه حركة عقارب الساعة يشير قياس زاوية الدوران السالب إلى أنه باتجاه حركة عقارب الساعة. فالدوران بزاوية $-90°$ حول نقطة الأصل هو دوران بزاوية $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

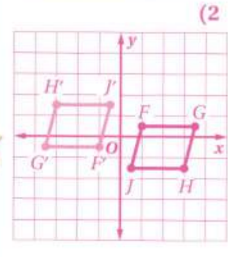
إرشادات للدراسة

الدوران بزاوية $360°$ الدوران بزاوية $360°$ حول نقطة ما يعيد الشكل إلى وضعه الأصلي؛ أي أن الصورة الناتجة عن دوران بزاوية $360°$ هي الشكل الأصلي نفسه.

1A)



2)



رسم الصورة الناتجة عن الدوران

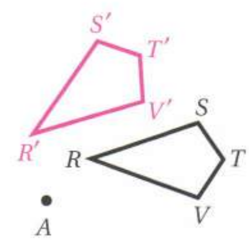
مثال 1 يبيّن كيفية رسم دوران في المستوى.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

انقل الشكل الرباعي $RSTV$ والنقطة A. ثم استعمل منقلة و مسطرة لرسم صورة الشكل بدوران حول A بزاوية $45°$.



التعليم باستعمال التقنيات

برمجية تحرير الصور: قدم للطلاب عدة صور رقمية التقطت أثناء وضع الكاميرا بزوايا مختلفة. واطلب إليهم أن يستعملوا برمجية تحرير الصور لتدوير الصور حتى تأخذ الوضع الصحيح المعتدل. ثم اطلب إليهم أن يربطوا بين الصورة التي يشاهدونها وزاوية الدوران الذي استعملوه و اتجاهه.

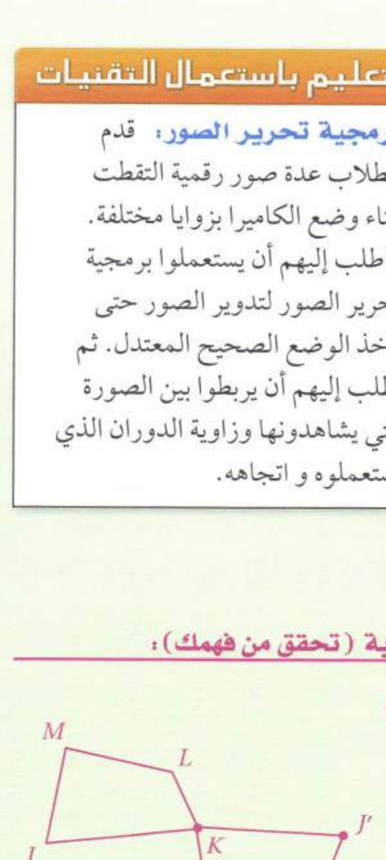
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون / الرياضيون: اطلب إليهم أن يطوروا نظامًا لتدوير الأشكال. يتعين عليهم أولًا أن يقرؤوا المسألة وأن يحددوا أو يرسموا الشكل ليتعرفوا عليه بصريًّا، وأن يلاحظوا المواصفات المحددة وبخاصة اتجاه الدوران. وأخيرًا يمكنهم تطبيق الدوران. ويمكنهم أن يستعملوا المنهجية نفسها أو أن يبتكروا منهجية خاصة بهم.

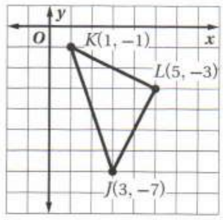
إجابة (تحقق من فهمك):

1B)



مثال 3 من الاختبار المعياري

ما صورة النقطة J الناتجة عن دوران $\triangle JKL$ بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟



A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

اقرأ سؤال الاختبار

لقد أعطيت $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(3, -7), K(1, -1), L(5, -3)$ وطلب إليك أن تحدد إحداثيي صورة النقطة J الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حُل سؤال الاختبار

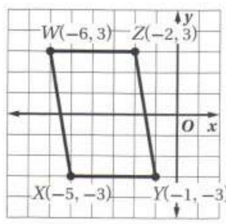
لإيجاد إحداثيي صورة النقطة J الناتجة عن الدوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدّل الإحداثيين x, y.

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $\quad$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

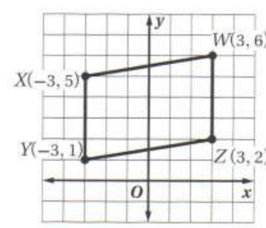
فالإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

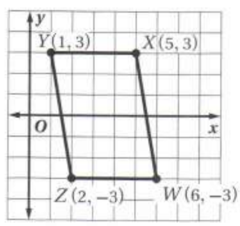
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أي الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟ **H**



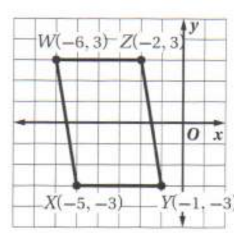
F



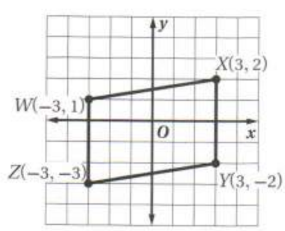
H



G



J



إرشادات للدراسة

الدوران $270°$

يمكن إجراء دوران بزاوية $270°$ بعمل دوران بزاوية $90°$ ثم بزاوية $180°$.

إرشادات للاختبار

حل مسألة أبسط

يمكنك أن تتحقق من صورة نقطة واحدة فقط مثل النقطة X هنا بدلًا من التحقق من صور رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ الأربعة كلها، فإن كانت صحيحة فأكمل للرؤوس الباقية، وإلا فانتقل إلى شكل آخر.

إرشادات للمعلم الجديد

اتجاه الدوران و مركزه:

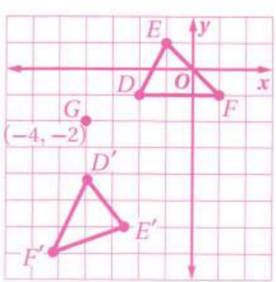
أكّد على أن الدوران يكون حول نقطة الأصل وعكس اتجاه عقارب الساعة إلاّ إذا ورد خلاف ذلك في نص السؤال.

رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي.

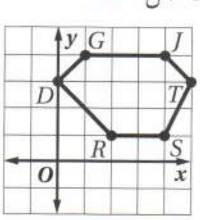
مثالان إضافيان

2 إحداثيات رؤوس المثلث DEF هي $D(-2, -1), E(-1, 1), F(1, -1)$. مثّل بيانيًا $\triangle DEF$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $115°$ مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $G(-4, -2)$.



3 **تدريب على اختبار معياري:**

يبين الشكل الآتي السداسي $DGJTSR$. ما صورة النقطة T الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟ C



A $(5, -3)$

B $(-5, -3)$

C $(-3, 5)$

D $(3, -5)$

تنويع التعليم

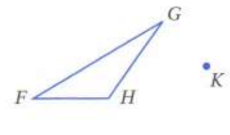
دون ضمن فوق

توسّع: ما زاوية الدوران للصورتين؟ $72°$

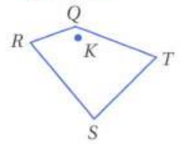
تأكــد

المثال 1 استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

1) $45°$ انظر الهامش .



2) $240°$ انظر الهامش .



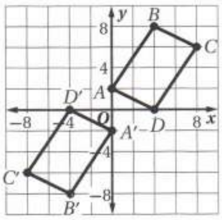
المثال 2 **3)** إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي $D(-2, 6)$ ، $F(2, 8)$ ، $G(2, 3)$. مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل . انظر الهامش .

المثال 3 **4)** **اختيار من متعدد:** يبيّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.

ما قياس زاوية الدوران؟ **B**

A $90°$ **C** $270°$

B $180°$ **D** $360°$

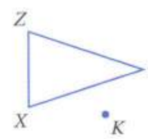


تدرب وحل المسائل

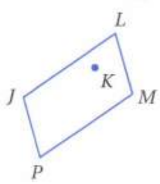
المثال 1 استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل مما يأتي:

5–7) انظر ملحق الإجابات

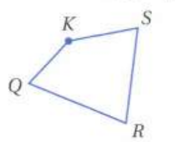
5) $90°$



6) $145°$



7) $260°$



المثالان 2, 3 مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كل مما يأتي:

8–10) انظر ملحق الإجابات

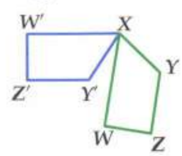
8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه $W(-3, 4), X(0, 7), Y(3, 4), Z(0, 1)$ ، $90°$

9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$ ، $180°$

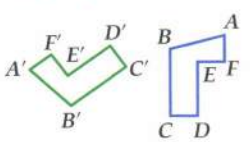
10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه $M(-6, 3), P(-2, 3), Q(-3, -2), V(-7, -2)$ ، $270°$.

يظهر في كل من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P. انقل إلى دفترك كلًّا من الشكلين وحدد موقع النقطة P ، ثم أوجد قياس زاوية الدوران. 11–12) انظر ملحق الإجابات

11)



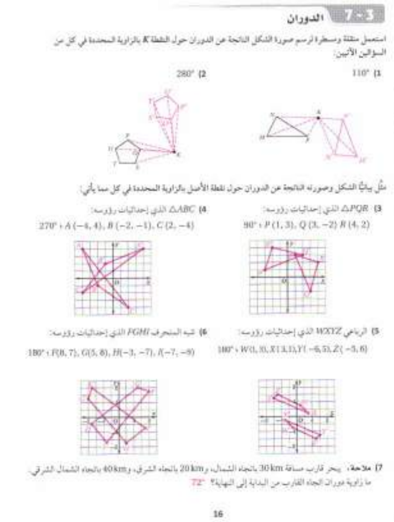
12)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	5–10 ، 22–31
ضمن ضمن المتوسط	5–10 فردي ، 11–21 فردي
فوق فوق المتوسط	11–31 ، (اختياري: 32–34)

كتاب التمارين، ص (16)



3 التدريب

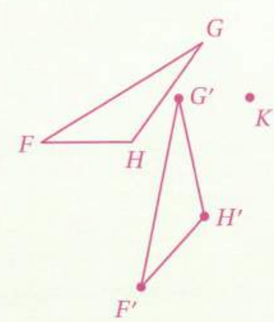
التقويم التكويني

استعمل التمارين 1–4 للتأكد من فهم الطلبة.

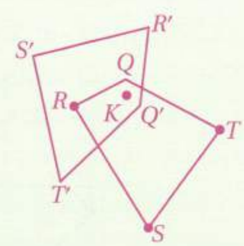
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

الإجابات:

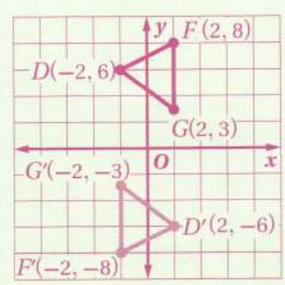
(1



(2

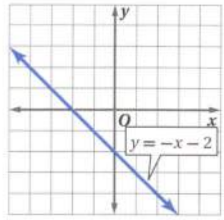


(3



13) $y = x - 2$ ؛ متعامدان
14) $y = -x + 2$ ؛ متوازيان
15) $y = x + 2$ ؛ متعامدان
16) $y = -x - 2$ ؛ على استقامة واحدة

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = -x - 2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صف العلاقة بين معادلة كلٍّ من الشكل الأصلي و الصورة.



13) $90°$ **14)** $180°$

15) $270°$ **16)** $360°$

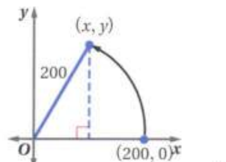
جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم الناتجة عن دورانه بالزاوية المحددة حول نقطة تقاطعه مع المحور x وحول نقطة تقاطعه مع المحور y في كل مما يأتي:

17) $90°$ ، $y = x - 5$ **18)** $180°$ ، $y = 2x + 4$ **19)** $270°$ ، $y = 3x - 2$

الربط مع الحياة

تتحمل إطارات الدراجات ما يصل إلى **400** مرّة من وزنها، ولا تتحطم إلا تحت حمل يعادل **700** مرّة من وزنها.

20) **سباق الدراجات:** يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft.

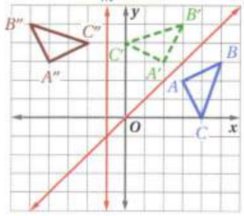


a) إذا بدأ السباق من النقطة (0 ,200) وأتم الاثنان دورة واحدة في 30 ثانية، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟ **(100, 173.2)**

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورة، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقة، فمن الفائز؟ سليمان؛ 26.2 دقيقة > 25 دقيقة

21) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.

a) **هندسيًا:** ارسم في المستوى الإحداثي مثلثًا ومستقيمين متقاطعين. سمّ المثلث ABC وسمّ المستقيمين ℓ, m.
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ.
ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m.
وسمّها $A''B''C''$. انظر ملحق الإجابات



b) **هندسيًا:** كرر العملية السابقة مرتين في ربعين مختلفين. سمّ المثلث الثاني DEF، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين n, p. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r. انظر ملحق الإجابات

c) **جدوليًا:** قس زاوية الدوران لكل مثلث حول نقطة تقاطع المستقيمين. وانقل الجدول الآتي وأكمله.

قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين		قياس زاوية الدوران بين الشكلين	
45°	ℓ, m	90°	$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$
90°	n, p	180°	$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$
45°	q, r	90°	$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$

d) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

17) حول نقطة تقاطعه مع المحور x: $y = -x + 5$؛ حول نقطة تقاطعه مع المحور y: $y = -x - 5$

18) حول نقطة تقاطعه مع المحور x: $y = 2x + 4$؛ حول نقطة تقاطعه مع المحور y: $y = 2x + 4$

19) حول نقطة تقاطعه مع المحور x: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$؛ حول نقطة تقاطعه مع المحور y: $y = -\frac{1}{3}x - 2$

21d) إجابة ممكنة: قياس زاوية الدوران حول نقطة تقاطع المستقيمين يساوي مثلي قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين .

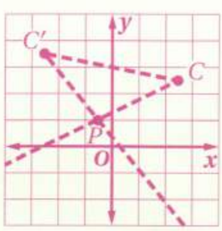
مسائل مهارات التفكير العليا

22) **تحدٍّ:** إحداثيا النقطة C هما $C(5, 5)$. وإحداثيا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$. أوجد إحداثيي مركز الدوران. وضّح إجابتك. انظر الهامش.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب في السؤال 21، التمثيل الهندسي والتمثيل البياني والجداول والوصف اللفظي لاستقصاء انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين.

إجابة:

22) إجابة ممكنة: $(2, -1)$ ؛ بما أن $\triangle CC'P$ متطابق الضلعين وزاوية رأسه تساوي زاوية الدوران، فإن كل من $m\angle PC'C$ و $m\angle PCC'$ يساوي $40°$ لأن زاويتي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان. وعندما ترسم زاوية قياسها $40°$ عند الرأس C وزاوية قياسها $40°$ عند الرأس C' يتقاطع الشعاعان اللذان يكونان هاتين الزاويتين عند مركز الدوران أي عند النقطة $(-1, 2)$.



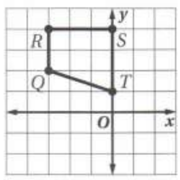
23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي. صف تدويرًا غير صفري تنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي على بعضهما دون تغيير في الاتجاه. انظر الهامش.

24) **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية $180°$ ؟ وضِّح إجابتك. انظر الهامش.

25) **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاط ثابتة أبدًا؟ انظر الهامش.

تدريب على الاختبار المعياري

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟ **D**



A $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

27) يرتكز سلم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عشر قدم؟ **B**

A 10.0 ft **C** 19.7 ft

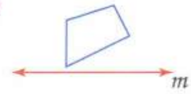
B 16.1 ft **D** 26.0 ft

مراجعة تراكمية

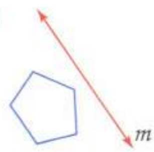
28) **براكين:** تحركت سحب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و 48 km شمالًا. ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حبيبات الغبار، ثم أوجد أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه. (الدرس 2-7) انظر الهامش.

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كل مما يأتي: (الدرس 1-7)

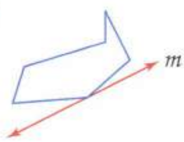
29) انظر الهامش.



30) انظر الهامش.



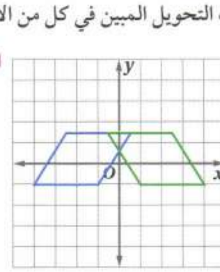
31) انظر الهامش.



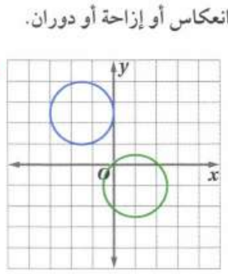
استعد للدرس اللاحق

صنِّف التحويل المبين في كل من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

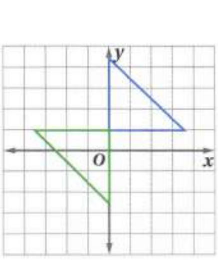
32) انعكاس



33) إزاحة



34) دوران أو انعكاس



4 التقويم

علم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا ... ة توضح كيف ساعدهم درس الإزاحة (السحاب) على استيعاب مفهوم الدوران.

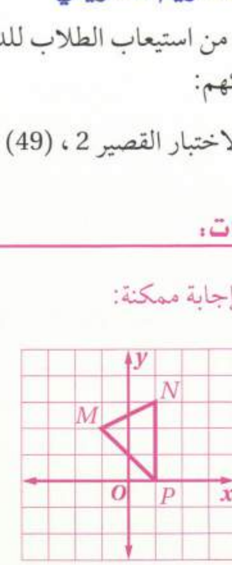
التقويم التكويني

... قق من استيعاب الطلاب للدرس 3–7 ... طائهم:

الاختبار القصير 2 ، (49)

... ابات:

...) إجابة ممكنة:

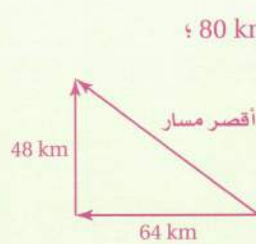


دوران بزاوية $360°$

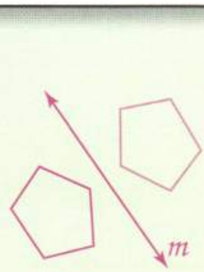
...) لا؛ إجابة ممكنة: عندما يُعكس الشكل حول المحور x يبقى الإحداثي x ثابتًا وتتغير إشارة الإحداثي y وعندما يتم تدوير الشكل نفسه بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل تتغير إشارتا الإحداثيين x و y. لذا فإن هذين التحويلين غير متكافئين.

...) تبقى نقاط ثابتة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: عندما يتم تدوير الشكل حول نقطة من الشكل نفسه تبقى هذه النقطة التي تمثل مركز الدوران ثابتة. وأما إذا تم تدوير الشكل حول نقطة ليست واقعة عليه فلن يبقى نقاط ثابتة نتيجة الدوران.

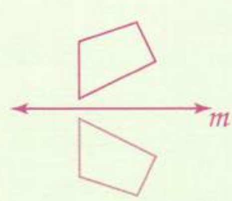
28) 80 km ؛



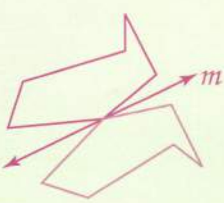
30)



29)



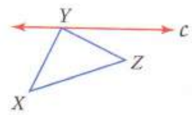
31)

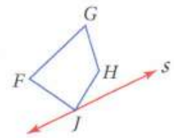


الفصل 7 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-7 إلى 3-7

ارسم صورة كل من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى. (الدرس 1-7) 1–2) انظر ملحق الإجابات

1)


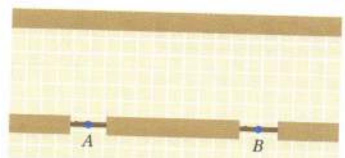
2)


مثل بيانيًا كلًّا من الشكلين الآتيين وارسم صورته بالانعكاس المحدد: (الدرس 1-7) 3–5) انظر ملحق الإجابات

3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$، بالانعكاس حول المحور y.

4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه $Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$، بالانعكاس حول المحور x.

5) **احتفالات:** وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة. (الدرس 1-7)

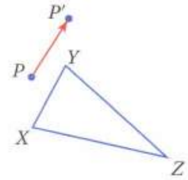


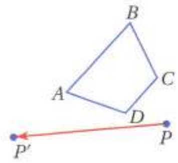
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-7) 6–7) انظر ملحق الإجابات

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

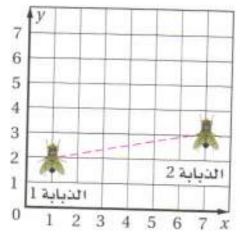
7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$، إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كل من السؤالين الآتيين. (الدرس 2-7) 8–9) انظر ملحق الإجابات

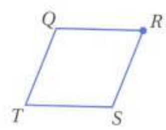
8)


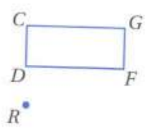
9)


10) **قصص مصورة:** يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا وذبابتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل الذبابة 1 إلى موقع الذبابة 2؟ (الدرس 2-7) 6 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أعلى

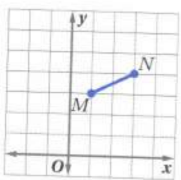


استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7) 11–12) انظر الهامش.

11) $45°$


12) $60°$


13) **اختيار من متعدد:** ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-7) A



A $(-3, 1)$ C $(-1, -3)$

B $(-3, -1)$ D $(3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7) 14–15) انظر الهامش

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه $R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، $90°$.

15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$، $180°$.

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدرس المُشار إليها بعد كل سؤال.

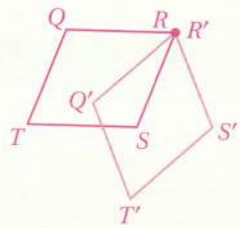
التقويم التكويني

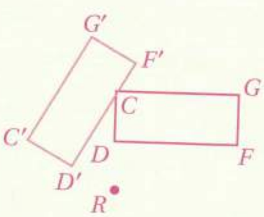
اختبار منتصف الفصل، ص (51)

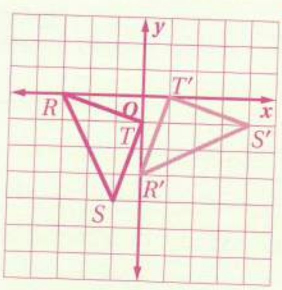
المطويات متابعة المطويات

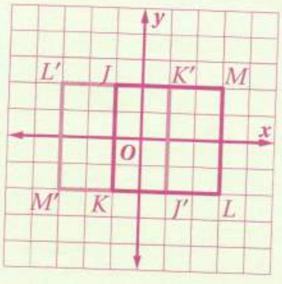
شجع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دونوها في مطوياتهم حول الدروس 1-7 إلى 3-7.

إجابات:

11)


12)


14)


15)


مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-7 إلى 3-7.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف
استكشاف أثر إجراء عدة تحويلات هندسية على شكل هندسي.

المواد اللازمة
- الآلة الحاسبة TI−nspire

إرشادات للتدريس
ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على استعمال الحاسبة TI−nspire. امنح الطلاب الوقت الكافي لاستكشاف الآلة والتدرب عليها. تابع أعمال الطلاب من خلال جهاز الحاسوب المربوط بالآلات، وأرشدهم لتنفيذ خطوات النشاط بالصورة الصحيحة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
اطلب إلى الطلاب أن ينفذوا النشاط بصورة فردية. ثم نظمهم في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات ليقوموا بحل الأسئلة 6−1.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 6−1.

3 التقويم

التقويم التكويني
اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيف يكون تركيب انعكاسين إما إزاحةً أو دورانًا لتقويم مدى استيعاب الطلاب لتركيب انعكاسين.

من المحسوس إلى المجرد
اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا الهندسة الإحداثية للتأكد من أن تركيب انعكاسين في مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة.

استكشاف 7-4 معمل الحاسبة البيانية:

تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

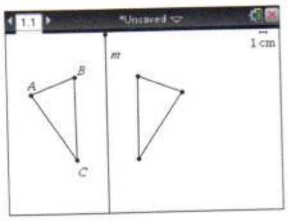
سوف تستعمل الحاسبة البيانية TI−nspire في هذا المعمل لاستكشاف أثر إجراء عدة تحويلات هندسية على شكل هندسي.

نشاط **انعكاس شكل حول محورين رأسيين**

الخطوة 1: ارسم مثلثًا وسمه ABC بالضغط على المفاتيح:

menu 9:Shapes 9:Triangle

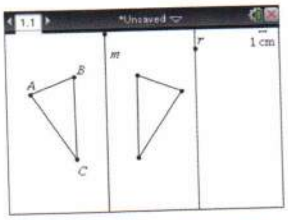
ctrl menu 2:Label



الخطوة 2: ارسم مستقيمًا إلى يمين $\triangle ABC$ وسمه m بالضغط على المفاتيح:

menu 7:Points & Lines 4:Line

ctrl menu 2:Label



الخطوة 3: ارسم انعكاس $\triangle ABC$ حول المستقيم m بالضغط على المفاتيح:

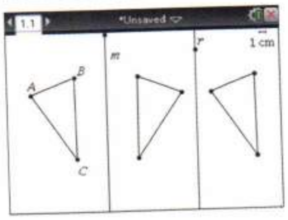
menu B:Transformation 2:Reflection

ثم الضغط على المستقيم والمثلث ليظهر الانعكاس.

الخطوة 4: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ m وسمه r بالضغط على المفاتيح:

menu A:Construction 2:Parallel

والضغط على المستقيم m والنقطة المطلوب رسم r عندها.



الخطوة 5: كرّر العملية التي نفذتها في الخطوة 3 لرسم صورة الشكل الجديد بالانعكاس حول المستقيم r.

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟ إجابة ممكنة: الشكلان متطابقان ولهما الاتجاه نفسه.
2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟ الإزاحة
3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟ 6−3) انظر الهامش
4) **خمّن:** إذا أجري انعكاس لهذا الشكل حول مستقيم ثالث، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.
5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟
6) **خمّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيم ثالث يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

إجابات:

3) إجابة ممكنة: إذا حركت المستقيم m، فستتحرك صورتا الشكل بالانعكاس، أما إذا حركت المستقيم r، فستتحرك الصورة النهائية فقط.

4) إجابة ممكنة: بما أنه سيكون اتجاه الشكل عكس اتجاهه الأصلي فيمكن استعمال انعكاس أو دوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

5) يمكن استعمال دوران بزاوية $180°$ حول نقطة التقاطع لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

6) إجابة ممكنة: سوف يتطلب الأمر أن تستعمل الدوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد لأن اتجاه الشكل النهائي لن يكون مماثلًا لاتجاه الشكل الأصلي.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

فيما سبق:

درستُ رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس والانسحاب والدوران.

والآن:

- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما الانعكاس.
- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.

المفردات:

التحويل الهندسي المركب
composite transformation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يوضح نمط آثار الأقدام على رمال الشاطئ في الصورة المجاورة تركيب تحويلين هندسيين مختلفين هما الإزاحة والانعكاس.

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية يُسمى **تحويلًا هندسيًّا مركبًا**. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الهندسي الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس.

مثال 1 تمثيل تركيب الإزاحة والانعكاس بيانيًّا

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(6, -1), K(10, -2), L(5, -3)$. مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى الأعلى ثم انعكاس حول المحور y .

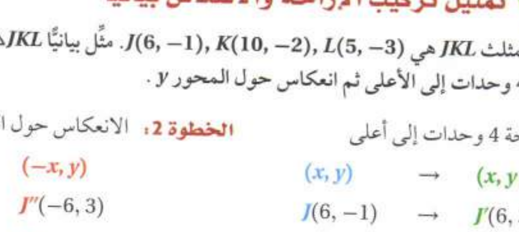
الخطوة 1: الإزاحة 4 وحدات إلى أعلى

(x, y)	$\rightarrow$	$(x, y+4)$
$J(6, -1)$	$\rightarrow$	$J'(6, 3)$
$K(10, -2)$	$\rightarrow$	$K'(10, 2)$
$L(5, -3)$	$\rightarrow$	$L'(5, 1)$

الخطوة 2: الانعكاس حول المحور y

(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, y)$
$J'(6, 3)$	$\rightarrow$	$J''(-6, 3)$
$K'(10, 2)$	$\rightarrow$	$K''(-10, 2)$
$L'(5, 1)$	$\rightarrow$	$L''(-5, 1)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$.



تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي $P(1, 1), Q(2, 5), R(4, 2)$. مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كل من السؤالين الآتيين: 1A–1B انظر ملحق إجابات

1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .

1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

7-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-7

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس و الانسحاب والدوران.

الدرس 4-7

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما الانعكاس.

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.

ما بعد الدرس 4-7

تطبيق خصائص التحويلات الهندسية لتحليل تماثل الأشكال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- لماذا لا يمكن اعتبار آثار الأقدام المتتابعة إزاحة بسيطة؟ ليس لآثار الأقدام المتتابعة الاتجاه نفسه.
- صف تركيب التحويلين الهندسيين اللذين ينتجان نمط آثار الأقدام. يمكن أن ينتج نمط آثار الأقدام المتتابعة من إزاحة ثم انعكاس.
- ما النمط الآخر الذي يمكن أن ينتج من تركيب التحويلين الهندسيين نفسيهما؟ النمط الناشئ عن شخص يسير على يديه على الرمال.

مصادر الدرس 4-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (142)	• تنويع التعليم ص (142 ,144)	• تنويع التعليم ص (142 ,144)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (17)	• كتاب التمارين ص (17)	• كتاب التمارين ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

تلاحظ في المثال 1 أنّ $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$ و كذلك $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$. وبحسب خاصية التعدي للتطابق فإن ، $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقود إلى النظرية الآتية:

أضف إلى مطويتك

نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق

تركيب تحويلي تطابق (أو أكثر) هو تحويل تطابق أيضًا.

سوف تبرهن النظرية 7.1 في السؤال 20

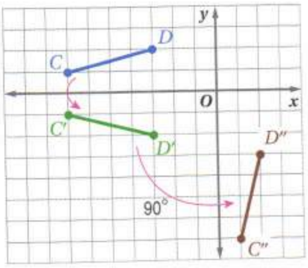
إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق
إنّ الانعكاس والإزاحة والدوران والتحويلات المركبة منها هي تحويلات تطابق أيضًا.

لذا فإن الصورة الناتجة عن تركيب أي تحويلين هندسيين من تحويلات التطابق كالإزاحة أو الانسحاب أو الدوران تكون مطابقة للشكل الأصلي.

مثال 2 تمثيل تركيب تحويلي تطابق بيانيًا

إحداثيات طرفي $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1), D(-3, 2)$. مثِّل بيانيًا $\overline{CD}$ و صورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ودوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.



الخطوة 1: الانعكاس حول المحور x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$
$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $90°$

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$
$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$
$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

قراءة الرياضيات

الشرطتان
تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرأس صورة ناتجة من تحويل هندسي ثان.

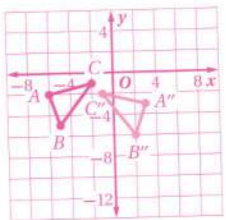
تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي $A(-6, -2), B(-5, -5), C(-2, -1)$. مثِّل بيانيًا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

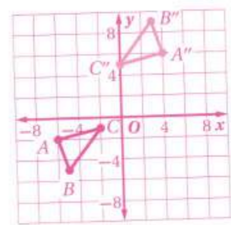
2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y .

2B) دوران: بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

(2A



(2B



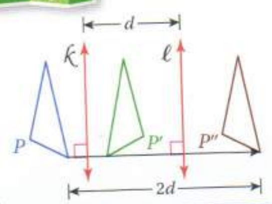
تركيب انعكاسين: إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يعادل إزاحة.

أضف إلى مطويتك

نظرية 7.2 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

- **اتجاهها عموديًا على كل من المستقيمين.**
- **مقدارها يساوي مثلي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.**



سوف تبرهن النظرية 7.2 في السؤال 26

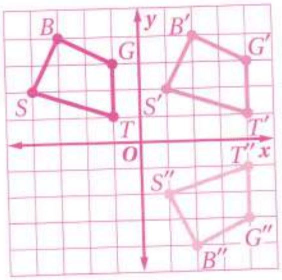
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تمثيل تركيب تحويلين هندسيين أحدهما الانعكاس في المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

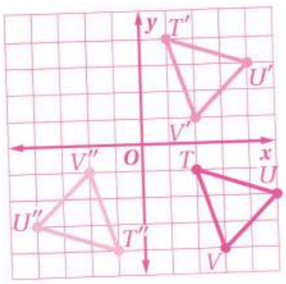
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $BGTS$ هي $B(-3, 4), G(-1, 3)$, $T(-1, 1), S(-4, 2)$ مثّل بيانيًا الشكل الرباعي $BGTS$ وصورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x .



2 إحداثيات رؤوس $\triangle TUV$ هي $T(2, -1), U(5, -2), V(3, -4)$. مثّل بيانيًا $\triangle TUV$ وصورته الناتجة عن إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار و5 وحدات إلى أعلى، ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



تنبيه !

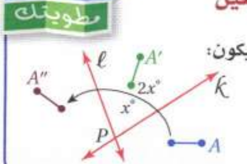
ترتيب التركيب
احرص على تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدد في المسألة.

إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانًا .

نظرية 7.3 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

أضف إلى مطويتك

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:
- **مركزه نقطة تقاطع المستقيمين.**
- **قياس زاوية دورانه يساوي مثلي قياس الزاوية الحادة أو القائمة التي يشكلها تقاطع هذين المستقيمين.**

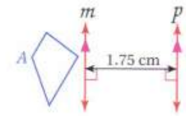


سوف تبرهن النظرية 7.3 في السؤال 27

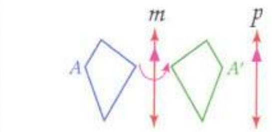
مثال 3 رسم الصورة الناتجة عن انعكاسين حول مستقيمين

ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p . ثم صف تحويلًا هندسيًا واحدًا ينقل A إلى A'' في كل مما يأتي:

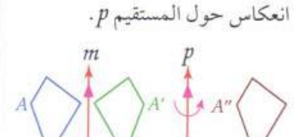
a)



الخطوة 1: ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m .

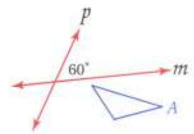


الخطوة 2: ارسم صورة الشكل A' الناتجة عن انعكاس حول المستقيم p .

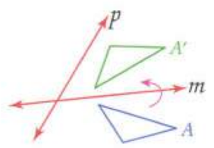


بناءً على النظرية 7.2، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتوازيين m, p يكافئ إزاحة أفقية إلى اليمين مقدارها $2\times1.75 = 3.5$ cm .

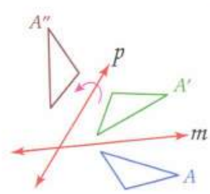
b)



الخطوة 1:



الخطوة 2:

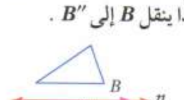


بناءً على النظرية 7.3، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتقاطعين m, p يكافئ دورانًا بزاوية تساوي $2\times60°$ أي $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m, p .

تحقق من فهمك

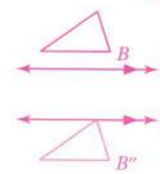
ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q. ثم صف تحويلًا هندسيًا واحدًا ينقل B إلى B'' .

(3A



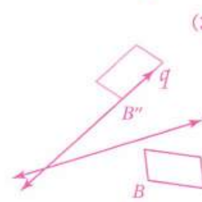
(3B

(3A



إزاحة باتجاه عمودي المستقيمين إلى الأسفل مسافة $\frac{3}{4}$ in .

(3B



دوران بزاوية 50° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين q و n .

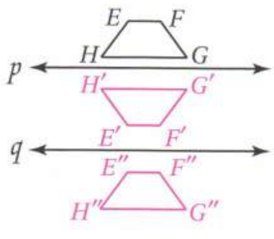
تركيب انعكاسين

المثال 3 يبيّن كيفية رسم صورة شكل بانعكاسين حول مستقيمين متوازيين أو مستقيمين متقاطعين.

المثال 4 يبيّن طريقة تعيين التحويلات الهندسية في أنماط من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 انقل المضلع $EFGH$ وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم p متبوعًا بانعكاس حول المستقيم q. ثم صف تحويلاً هندسيًا واحدًا يحوّل $EFGH$ إلى $E''F''G''H''$.



إجابة ممكنة: إزاحة إلى الأسفل

المحتوى الرياضي

شروط: وضح للطلاب أن تركيب الانعكاسات حول مستقيمات متوازية يكافئ إزاحة إذا كان عدد المستقيمات المتوازية زوجيًا فقط.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مربعًا في المستوى الإحداثي واكتب 3 تحويلات هندسية مختلفة على السبورة (على سبيل المثال: انعكاس حول المحور x، إزاحة 3 وحدات إلى أعلى، ودوران بزاوية 90° باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل) اطلب إلى الطلاب أن يختاروا اثنين من هذه التحويلات وأن يرسموا صورة المربع الناتجة عن تطبيقهما عليه واحدًا تلو الآخر، ثم اختر بعض الطلاب واطلب إليهم أن يرسموا تحويلاتهم ويشرحوها. ناقشهم إن كان لترتيب إجراء التحويلين تأثير على الصورة النهائية أم لا.

يتم إنشاء كثير من الأنماط في الحياة الواقعية باستعمال تركيب التحويلات الهندسية.

الربط مع الحياة

تستعمل تحويلات هندسية مركبة عند تصميم السجاد، لاحظ تكرار الجزء نفسه في إطار السجادة أعلاه.

مثال 4 من واقع الحياة — وصف التحويلات الهندسية

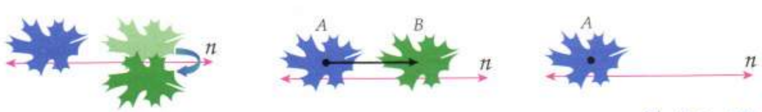
أنماط: صف تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مما يأتي:

(a

تم تكوين هذا النمط بإزاحات متتابعة للأواني الأربعة الأولى؛ إذن يمكن تكوين هذا النمط بتركيب انعكاسين حول المستقيمين m, p كما هو مبين في الشكل أدناه. لاحظ أن المستقيم m يمر في منتصف الشكل الأصلي.

(b

تم تكوين هذا النمط بتركيب إزاحة وانعكاس. أي أنه يمكن تكوينه بتركيب إزاحة موازية للمستقيم n تنقل A إلى B متبوعة بانعكاس حول المستقيم n.

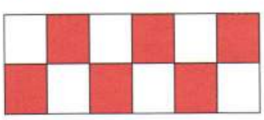


تحقق من فهمك

4) **سجاد:** صف تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مما يأتي: تركيب انعكاس وإزاحة

(A دوران

(B



ملخص المفهوم — تركيب التحويلات الهندسية

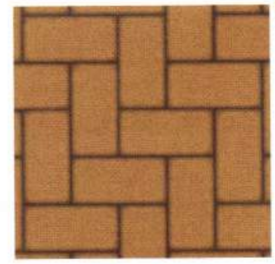
أضف إلى مطويتك

الإزاحة	الدوران
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

مثال إضافي

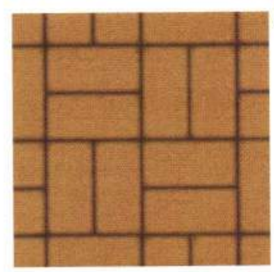
مناظر طبيعية: صف نمط التحويلات الهندسية التي تم تركيبها لإنشاء نمط البلاط المبين في كل من الشكلين الآتيين.

(a



تم تكوين هذا النمط باستعمال إزاحات و دورانات متتابعة.

(b



تم تكوين هذا النمط بدورانات متتابعة لبلاطتين أو بتركيب إزاحات ودورانات بالتناوب.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب أن يجمعوا بين جمال الفن و الهندسة بتصميم شكل ثم إجراء تحويلات هندسية تتضمن تركيب تحويلات هندسية مختلفة عليه وتنفيذ ذلك على قطعة كبيرة من الورق. ثم اطلب إليهم أن يكملوا المشروع الفني بإضافة الألوان و بعض الزينة تبعًا لاختيارهم.

تأكــد

المثال 1 إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي $C(-5, -1), D(-2, -5), E(-1, -1)$. مثِّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كل من السؤالين الآتيين : 3-1) انظر الهامش.

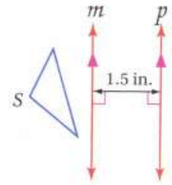
1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x

2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

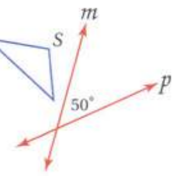
المثال 2 3) إحداثيات طرفي $\overline{JK}$ هما $J(2, 5), K(6, 5)$. مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ودوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

المثال 3 ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صف تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''. 5-4) انظر ملحق الإجابات

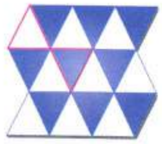
4)



5)



المثال 4 6) **أنماط البلاط:** صنع راشد نمطًا من بلاط على شكل مثلث متطابق الضلعين. صف التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط. انعكاس وإزاحة



تدرب وحل المسائل

المثال 1 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كل مما يأتي: 10-7) انظر ملحق الإجابات

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه $R(1, -4), S(6, -4), T(5, -1)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه $D(2, 8), F(1, 2), G(4, 6)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

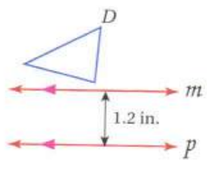
المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كل مما يأتي:

9) $\overline{WX}$ ، حيث $W(-4, 6), X(-4, 1)$. انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل

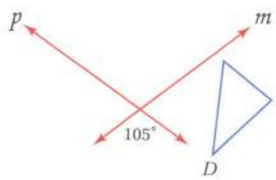
10) $\overline{RS}$ ، حيث $R(2, -1), S(6, -5)$. إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y

المثال 3 ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صف تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''. 11, 12) انظر الهامش

11)



12)



3 التدريب

التقويم التكويني

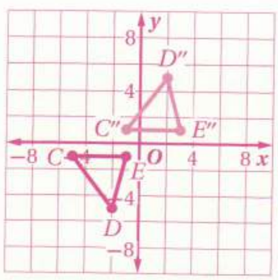
استعمل التمارين 6-1 للتحقق من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل سؤال

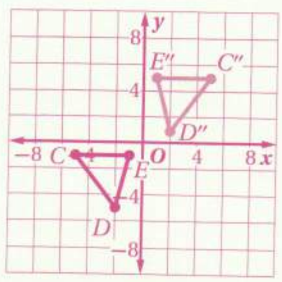
الورق الشفاف: قد يكون من المفيد وجود الورق الشفاف مع الطلاب عند حل الأسئلة 12 ,11 ,5.

إجابات:

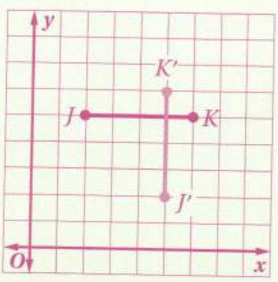
(1



(2



(3

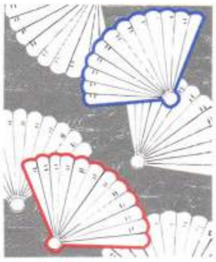


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7–16 ، 32 ، 29–42
ضمن المتوسط	7–19 فردي ، 20–21 ، 25 ، 27 ، 29–42
فوق المتوسط	17–39 ، (اختياري: 40–42)

المثال 4 صف تحويلًا هندسيًا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كل مما يأتي:

(13


(14


(15


13) انسحاب

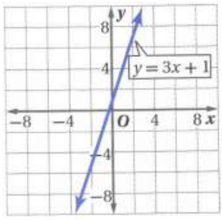
14) انعكاس وإزاحة

15) دوران

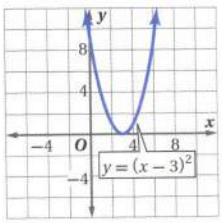
16) **زلاجات:** رسم صالح نمطًا على زلاجته. ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟ إزاحة وانعكاس أو إزاحتين

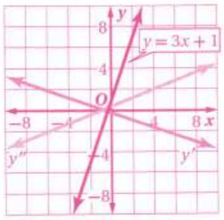
جبر: مثّل بيانيًا صورة كل من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:

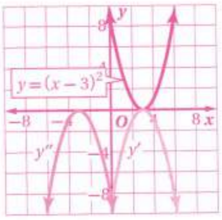
17) دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل
انعكاس حول المحور x



18) انعكاس حول المحور x
انعكاس حول المحور y



(17


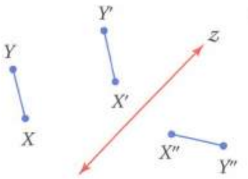
(18


19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$. $), B''(2, 3), C''(1, 0)$

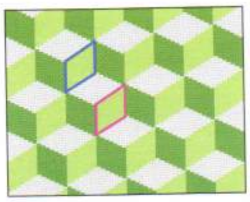
20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق. انظر الهامش

المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدة إلى اليمين و b وحدة إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

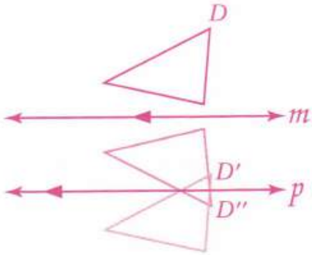
المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$



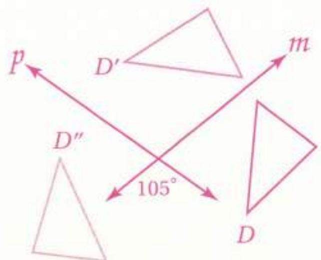
21) **حياكة:** تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور. صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط. تركيب انعكاسين



جابات:

(11


إزاحة باتجاه عمودي على المستقيم m, p إلى الأسفل بمقدار 2.4 بوصة

(12


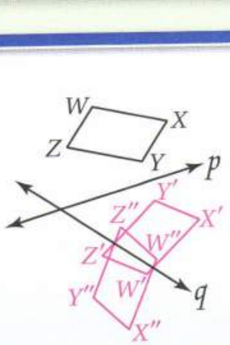
دوران بزاوية $210°$ حول نقطة تقاطع المستقيمين m و p

20) **البرهان:** تعلم أن الإزاحة بمقدار a وحدة إلى اليمين و b وحدة إلى أعلى تنقل X إلى X' وتنقل Y إلى Y'. ومن تعريف الإزاحة نعلم أن النقطتين X و Y تحركتا المسافة نفسها بالاتجاه نفسه ولذلك فإن، $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ كما نعلم أن الانعكاس حول المستقيم z ينقل X' إلى X'' وينقل Y' إلى Y''. وباستعمال تعريف الانعكاس، فإن X' و X'' على بعدين متساويين من المستقيم z، وكذلك Y' و Y'' على بعدين متساويين من المستقيم z. إذن $\overline{X'Y'} \cong \overline{X''Y''}$. ومن خاصية التعدي للتطابق ينتج أن $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أوجد صورة متوازي الأضلاع $WXYZ$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم p متبوعًا بالانعكاس حول المستقيم q.



الربط مع الحياة

طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدم متتاليين. فمتوسط طول خطوة طائر الحبش 11 in تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة 5 in تقريبًا.

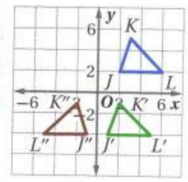
آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، واكتب التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كل من السؤالين الآتيين:

22) طائر الحبش إزاحة بمقدار 5.5 وحدات إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى

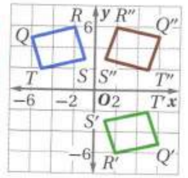
23) البطة إزاحة بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى

صف التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كل من السؤالين الآتيين:

24) إزاحة وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-1, y-6)$ وانعكاس حول المحور y.



25) دوران بزاوية °180 حول نقطة الأصل وانعكاس حول المحور x.



26) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.2. 26, 27) انظر ملحق الإجابات

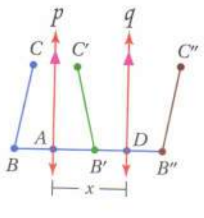
المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$.

وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.

المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $\overline{BB''} = 2x$



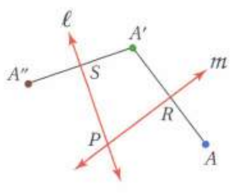
27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.3.

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

A نقطة لا تقع على أي من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: a) إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m، ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ، فإن A'' صورة A بدوران حول النقطة P.

b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$



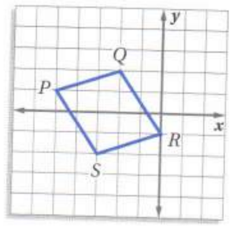
إرشادات للدراسة

مراجعة عُد إلى الدرس 7-1 لمراجعة خصائص تطابق القطع المستقيمة.

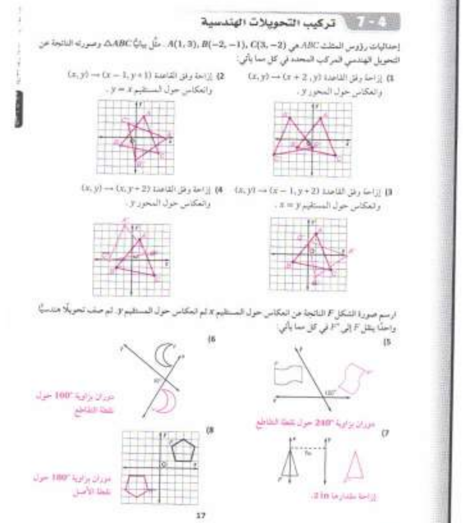
مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل ثم عكست الصورة حول المستقيم $y = -1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية °90 حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟

$P'''(1, -2), Q'''(2, 1), R'''(-1, 3), S'''(-2, 0)$



كتاب التمارين، ص (17)

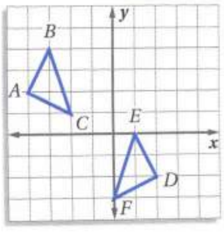


إجابات:

29) نعم؛ إذا أجري انعكاس في المحور x للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها (a, b) و (c, d) فإن إحداثيات طرفي صورتها هي $(a, -b)$, $(c, -d)$. وإذا أجري انعكاس في المستقيم $y = x$ ، للصورة فإن إحداثيات طرفي الصورة النهائية هي $(-b, a), (-d, c)$. وأما إذا أجري الانعكاس في المستقيم $y = x$ أولًا فإن إحداثيات طرفي الصورة الأولى $(b, a), (d, c)$. و إذا أجري لهذه الصورة انعكاس في المحور x فإن إحداثيات طرفي الصورة النهائية هي $(b, -a)$, $(d, -c)$ وهما مختلفتان عن النتيجة النهائية في الحالة الأولى.

29) تبرير: إذا أُجري انعكاس لشكل ما حول المستقيم $y = x$، ثم حول المحور x فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين على الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك. انظر الهامش.

30) مسألة مفتوحة: صف تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.



31) تبرير: إذا أُخضع شكل ما لدورانين فهل لترتيب الدورانين تأثير على موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟ انظر الهامش

32) اكتب: هل تبقى أي نقاط ثابتة في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

30) إجابة ممكنة: يمكن إجراء إزاحة للمثلث $\triangle ABC$ مقدارها 4 وحدات إلى الأسفل ثم انعكاس للصورة حول المستقيم $x = -1$ لتكوين $\triangle DEF$.

تدريب على الاختبار المعياري

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$؟ **B**

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

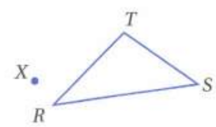
B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

34) إجابة قصيرة: إحداثيات طرفي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$. إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟
$(-2, 9)$

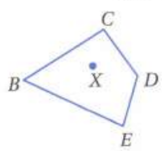
مراجعة تراكمية

استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كل مما يأتي: (الدرس 7-3) (35–37) انظر الهامش.

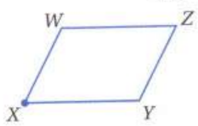
35) $60°$



36) $120°$



37) $180°$



مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كل مما يأتي: (الدرس 7-2) (38, 39) انظر الهامش.

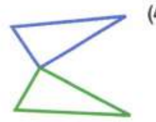
38) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي $F(1, -4), G(3, -1), H(7, -1)$؛ إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.

39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 7), B(-1, 4), C(2, 3), D(2, 7)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.

استعد للدرس اللاحق

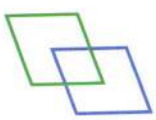
يبين كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاس حول مستقيم ما. ارسم خط الانعكاس. (42–44) انظر الهامش.

40)



41)

42)



4 التقويم

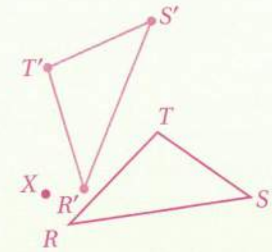
لم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا
رة تبين كيف ساعدتهم دراسة كل من
حويلات الهندسية على تعلم تركيب
حويلات الهندسية.

جابات:

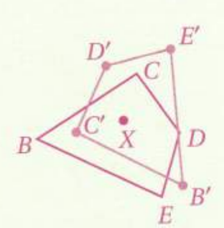
3) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: عندما يُجرى دورانان على شكل ما، فليس لترتيبهما تأثير عندما يكون للدورانين المركز نفسه.

32) إجابة ممكنة: لا توجد نقاط ثابتة في تركيب الانعكاس والإزاحة، لأنّ الإزاحة تحرك جميع النقاط. قد توجد في بعض التحويلات الهندسية المركبة نقاط ثابتة عند تدوير الشكل ثم انعكاسه أو تدويره مرّتين، أو انعكاسه مرّتين.

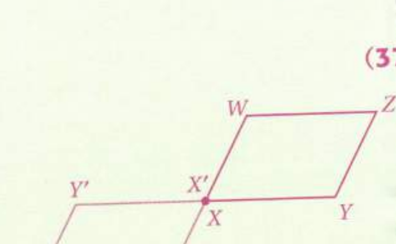
(35



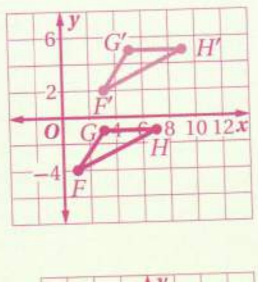
(3



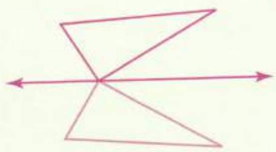
(37



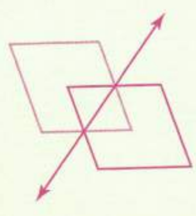
(38



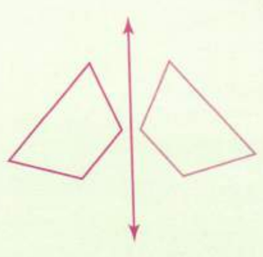
(40



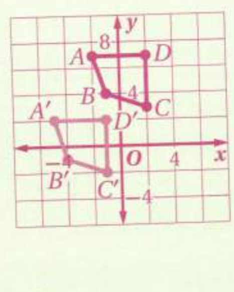
(42



(41

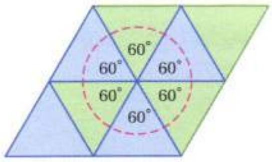


(39



التبليط 7-4
Tessellation

التبليط نمط يتكون من شكل أو أكثر يغطي سطحًا من دون تقاطعات أو فراغات. ويكون مجموع قياسات الزوايا حول كل رأس في التبليط °360.



و **التبليط المنتظم** هو التبليط الذي يستعمل فيه نوع واحد فقط من المضلعات المنتظمة. ويمكن تبليط سطح بمضلع منتظم إذا كان قياس زاويته الداخلية أحد عوامل العدد 360. ويمكن عمل تبليط باستعمال أكثر من نوع واحد من المضلعات المنتظمة، ويسمى التبليط الذي يتكون من مضلعين منتظمين أو أكثر تبليطًا شبه منتظم.

نشاط 1 التبليط المنتظم

حدد ما إذا كان استعمال كل من المضلعين المنتظمين الآتيين لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا، فسِّر إجابتك.

a) مضلع سداسي

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم يساوي x .

$x = \frac{180(n-2)}{n}$	صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم
$= \frac{180(6-2)}{6}$	$n = 6$
$= 120$	بالتبسيط

وبما أن 120 أحد عوامل 360، فيمكن استعمال المضلع السداسي المنتظم لتبليط المستوى.

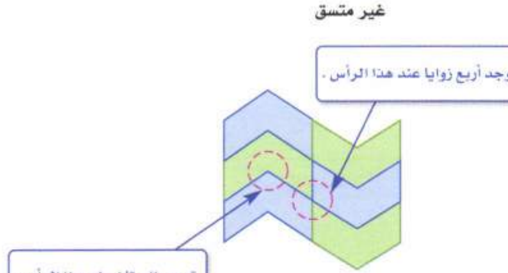
b) مضلع عشاري

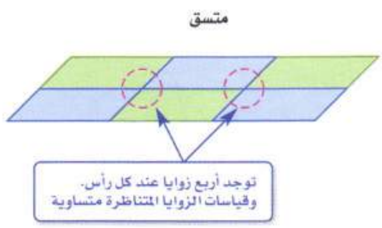
افترض أن قياس الزاوية الداخلية للعشاري المنتظم يساوي x.

$x = \frac{180(n-2)}{n}$	صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم
$= \frac{180(10-2)}{10}$	$n = 10$
$= 144$	بالتبسيط

وبما أن 144 ليست من عوامل 360، فلا يمكن استعمال العشاري المنتظم لتبليط المستوى.

يقال: إن التبليط **متسق** إذا احتوى الترتيب نفسه من الأشكال والزوايا عند كل رأس.





---

1 التركيز

الأهداف
- تعرّف التبليط المنتظم.
- إنشاء نماذج تبليط باستعمال التقنيات ودون استعمالها.

المواد اللازمة
- الآلة الحاسبة TI–nspire

إرشادات للتدريس
قد يصعب على الطلاب إتمام هذا المعمل في حصة واحدة بخاصة إذا لم يكونوا على ألفة بالحاسبة TI–nspire فقد تحتاج حصتين لتنفيذ هذا المعمل.

2 التدريس

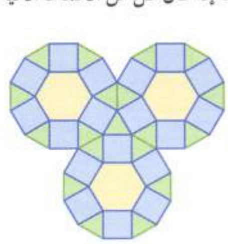
العمل في مجموعات متعاونة
وزع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات ثم اطلب إليهم تنفيذ الأنشطة 3–1. ثم دعهم ينفذون النشاط 4 بصورة فردية.

واسأل:
- لماذا يعد 120 عاملًا للعدد 360؟ 120 عامل للعدد 360 لأن $120(3) = 360$.
- كيف تحدد رؤوس نمط التبليط؟ أعين المضلع المستعمل في التبليط فتكون رؤوس المضلع نفسها هي رؤوس نمط التبليط أيضًا.
- في الخطوة 2، من النشاط 3، هل يمكن استعمال زاوية دوران أخرى لتكوين نمط التبليط؟ لا؛ إذ يمكن أن تتداخل المثلثات.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حلّ الأسئلة 1–9.

نشاط 2 تصنيف التبليط

حدّد ما إذا كان كل من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك فصنّفه إلى منتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم وإلى متسق أو غير متسق.

a) 

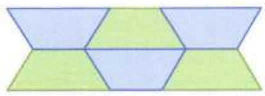
بما أنه لا توجد فراغات في الشكل وليس هنالك تقاطعات فإن هذا النمط يشكل **تبليطًا**.

هذا التبليط يتكون من أشكال سداسية منتظمة ومربعات ومثلثات متطابقة الأضلاع فهو **تبليط شبه منتظم** .

بما أنه يوجد عند بعض الرؤوس 5 زوايا، وعند بعضها 4 زوايا، وعند بعضها الآخر 3 زوايا، فهذا التبليط **غير متسق**.

b) 

توجد فراغات في الشكل فهذا النمط **ليس تبليطًا**.

c) 

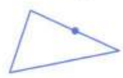
لا توجد فراغات ولا تقاطعات في هذا النمط فهو **تبليط** .
يتكون هذا التبليط من شبه منحرف، وهو مضلع غير منتظم؛ لذا فهذا التبليط غير منتظم، لكنه متسق؛ لأنه يحتوي ترتيبات الأشكال نفسها والزوايا نفسها عند كل رأس.

يمكن استعمال خصائص التبليط لتصميم وإنشاء أشكال تبليط مختلفة.

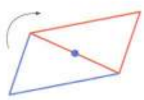
نشاط 3 رسم التبليط

ارسم مثلثًا واستعمله لإنشاء تبليط.

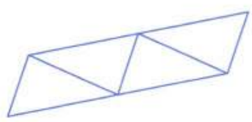
الخطوة 1: ارسم مثلثًا وعيّن نقطة منتصف أحد أضلاعه.



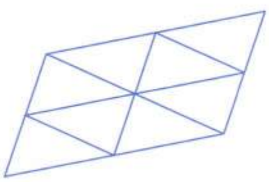
الخطوة 2: دوّر المثلث بزاوية °180 حول تلك النقطة.



الخطوة 3: اعمل إزاحة للمثلثين لتكوّن صفًّا.



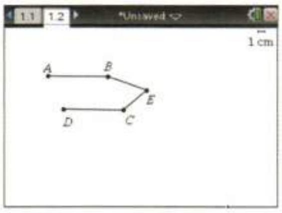
الخطوة 4: اعمل إزاحة للصف لتكون تبليطًا.



المحتوى الرياضي

الأشكال غير المنتظمة: يمكن استعمال الأشكال غير المنتظمة في التبليط. وفي هذه الحالة يصنف التبليط المتكوّن بأنه ليس منتظمًا وليس شبه منتظم.

نشاط 4 إنشاء تبليط باستعمال الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire



الخطوة 1: ارسم قطعة مستقيمة وسمها AB بالضغط على المفاتيح:

on menu 7:Points & Lines 5:Segment ctrl 2:Label

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ AB ويمر بنقطة سمها C بالضغط على المفاتيح:

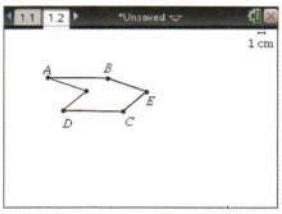
menu A:Construction 2:Parallel ctrl 2:Label C

الخطوة 3: صل BC ، ثم ارسم مستقيمًا موازيًا له يمر في A وسمه AD بالضغط على المفاتيح:

menu 7:Points & Lines 5:Segment B, C

menu A:Construction 2:Parallel BC, A

menu 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)



الخطوة 4: احذف القطعة المستقيمة $\overline{AD}$ بالضغط على الخط ثم 4:Hide menu ctrl

ارسم نقطة خارج BC وسمها E، بالضغط على:

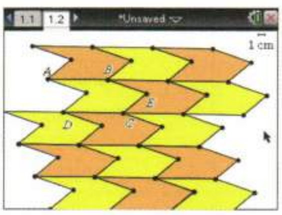
menu 7:Points & Lines 1:Point ctrl menu 2:Label E

الخطوة 5: ارسم إزاحة لـ $\overline{BE}$ تمر في A وإزاحة لـ $\overline{CE}$ تمر في D،

وحدد نقطة التقاطع بالضغط على المفاتيح:

menu A:Construction 2:Parallel BE, A, CE, D

menu 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)



الخطوة 6: كوّن مضلعًا سداسيًا باختيار جميع الرؤوس

menu 9:Shapes 4:Polygon

الخطوة 7: اعمل إزاحة للمضلع بالضغط على:

menu B:Transformation 3:Translation

والضغط على أحد الرؤوس ثم سحب المضلع وتكرار ذلك أكثر من مرّة وتابع هذا النمط من التبليط

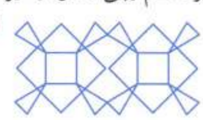
الخطوة 8: لتكوين نمط، حدد المضلع ثم اضغط المفاتيح: B:Color 1:Fill Color menu ctrl واختر لونًا.

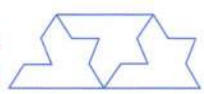
تمارين:

حدّد ما إذا كان استعمال أي من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا". 1–3) انظر الهامش.

1) مثلث **2)** مضلع خماسي **3)** مضلع له 16 ضلعًا

حدّد ما إذا كان كل من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظم أو شبه منتظم أو غير منتظم وإلى متسق أو غير متسق.

4)  لا

5)  نعم؛ غير منتظم؛ غير متسق

6)  نعم؛ منتظم؛ متسق

ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي: 7–9) انظر الهامش.

7) مضلع ثماني منتظم ومربع **8)** مثلث قائم الزاوية **9)** شبه منحرف ومتوازي أضلاع

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–6 لتقويم فهم الطلاب لخصائص التبليط.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا معادلة جبرية بدلالة n (عدد أضلاع المضلع) تستعمل لتحديد ما إذا كان ممكنًا استعمال المضلع للتبليط في المستوى.

على سبيل المثال:

$$\frac{360}{\frac{180(n-1)}{n}} = \frac{2n}{n-2}$$

فإذا كان $\frac{2n}{n-2}$ ، عددًا صحيحًا فإنه يمكن استعمال المضلع لتكوين تبليط منتظم في المستوى.

إجابات:

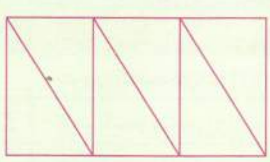
1) نعم؛ إجابة ممكنة: إن قياس الزاوية الداخلية للمثلث المتطابق الأضلاع °60، وهو من عوامل العدد 360.

2) لا؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم °108، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

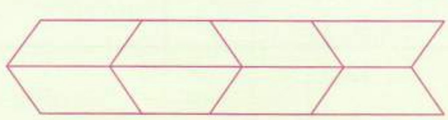
3) لا؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للمضلع ذي الـ 16 ضلعًا يساوي °157.5، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

7) إجابة ممكنة:

8) إجابة ممكنة:



9) إجابة ممكنة:



7-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 7-5

رسم صورة الشكل الناتجة عن الانعكاس والناتجة عن الدوران.

الدرس 7-5

تحديد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.

تحديد مستويات التماثل، والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

ما بعد الدرس 7-5

استعمال تحويلات التطابق لصياغة تخمينات حول خصائص الأشكال الهندسية بما فيها الأشكال في المستوى الإحداثي و تبرير هذه التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- استعمل صورة الخنفساء لتخمين معنى التماثل حول محور. انظر إجابات الطلاب.
- استعمل صورة السمكة الهلامية لتخمين معنى التماثل الدوراني. انظر إجابات الطلاب.
- ما نوع التماثل الذي يتصف به البشر؟ تماثل حول محور

7-5 التماثل
Symmetry

فيما سبق:

درستُ رسم صورة ناتجة عن الانعكاس و الدوران .

والآن:

- أحدّد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.
- أحدّد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

المفردات:

التماثل
symmetry

التماثل حول محور
line symmetry

محور التماثل
line of symmetry

التماثل الدوراني
rotational symmetry

مركز التماثل
center of symmetry

رتبة التماثل
order of symmetry

مقدار التماثل
magnitude of symmetry

www.obeikaneducation.com

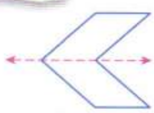
لماذا؟

يُعد تماثل الجسم صفة مميزة لمخلوقات المملكة الحيوانية، فالمخلوقات ذات الأجسام المتماثلة حول مستقيم كالحشرات مثلًا تظهر أنماط عيش أكثر تعقيدًا من المخلوقات ذات الأجسام المتماثلة دورانيًا مثل السمك الهلامي.

التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد: يكون الشكل **متماثلًا** إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. أحد أنواع التماثل هو التماثل حول محور.

مفهوم أساسي — **التماثل حول محور** — أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلًا حول محور إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور تماثل.



مثال 1 من واقع الحياة — **تعيين محاور التماثل**

مخلوقات بحرية: بيّن ما إذا كان للمخلوق البحري محور تماثل أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كل مما يأتي:

a) 

نعم، لهذا المخلوق محور تماثل واحد .

b) 

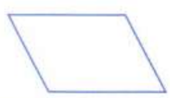
نعم؛ لهذا المخلوق 5 محاور تماثل .

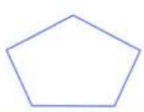
c) 

لا؛ لا يوجد لهذا المخلوق محاور تماثل .

تحقق من فهمك

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا. وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كل مما يأتي: (1B–C) انظر ملحق الإجابات

1A) لا 

1B) 

1C) 

مصادر الدرس 7-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (152)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (18)	• كتاب التمارين ص (18)	• كتاب التمارين ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

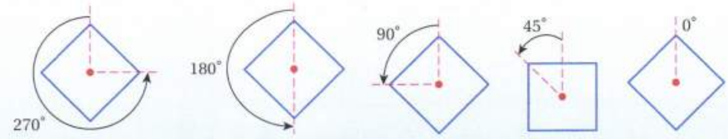
و هناك نوع آخر من التماثل هو التماثل الدوراني .

مفهوم أساسي — التماثل الدوراني

أضف إلى مطويتك

يكون للشكل الثنائي الأبعاد تماثل دوراني (أو تماثل نصف قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه. ويسمّى مركز الدوران في هذه الحالة مركز التماثل (أو نقطة التماثل).

أمثلة : **الشكل الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكل من الزوايا $90°$، $180°$، $270°$ ينتج عنه الشكل نفسه.**



يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من $0°$ إلى $360°$ اسم **رتبة التماثل**. أما **مقدار التماثل** (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، ويرتبط مقدار التماثل ورتبته بالعلاقة:

مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة $360°$ على رتبة التماثل.

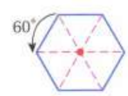
ففي الشكل أعلاه، رتبة التماثل الدوراني 4، ومقدار التماثل $90°$.

مثال 2 تعيين التماثل الدوراني

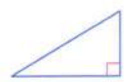
بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كل مما يأتي:

(a

نعم؛ للسداسي المنتظم تماثل دوراني رتبته 6، ومقداره $360° \div 6 = 60°$. ومركز التماثل هو نقطة تقاطع أقطاره.



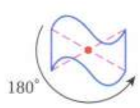
(b



لا؛ لا يوجد دوران بزاوية بين $0°$ و $360°$ تنطبق فيه صورة المثلث القائم الزاوية على نفسه.

(c

نعم؛ لهذا الشكل تماثل دوراني رتبته 2، ومقداره $360° \div 2 = 180°$. ومركز التماثل هو نقطة تقاطع قطريه.



تحقق من فهمك

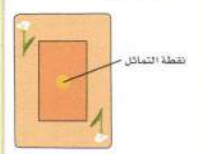
أزهار: **بيّن ما إذا كان يبدو للزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كل مما يأتي:** **(2A–B** انظر ملحق الإجابات

(2A

(2B

إرشادات للدراسة

التماثل حول نقطة
يكون الشكل متماثلًا حول نقطة إذا كانت صورته الناتجة عن الدوران حول تلك النقطة بزاوية $180°$ هي الشكل نفسه. يحقق المستطيل خاصية التماثل حول نقطة.



التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد

المثالان 1, 2 يبيّنان طريقة التعرف على الشكل الذي يحقق خاصية التماثل حول محور و/أو التماثل الدوراني.

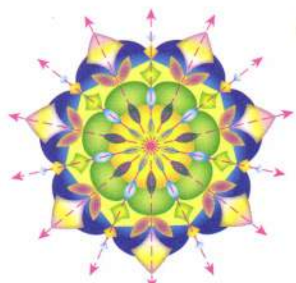
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم

مثال إضافي

1 **المنظار السحري:** بيّن ما إذا كان يبدو أن للصور الآتية محور تماثل أم لا. و إذا كان كذلك انقل الشكل وارسم محاور التماثل وحدد عددها.

(a

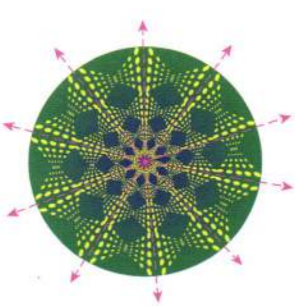


نعم؛ 7 محاور

(b

لا

(c



نعم؛ 5 محاور

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم شكلاً على السبورة ودوّره لتوضيح التماثل الدوراني. واطلب إلى الطلاب أن يحددوا رتبة التماثل في كل شكل يحقق التماثل الدوراني.

إرشادات للمعلم الجديد

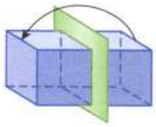
الحس الرياضي: نبّه الطلاب إلى أن استعمال "يبدو أن" عند السؤال عن تماثل بعض الأجسام جاء لأن كثيرًا من الأجسام تبدو متماثلة مثل وجه الانسان ولكنها في الحقيقة ليست متماثلة إذا طبق التعريف الرياضي للتماثل.

التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد: يمكن أن تكون الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا متماثلة.

مفاهيم أساسية — التماثلات في الأشكال الثلاثية الأبعاد

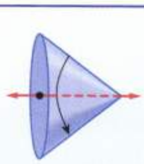
أضف إلى مطويتك

التماثل حول مستوى



يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول مستوى** إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس في ذلك المستوى هي الشكل نفسه.

التماثل حول محور

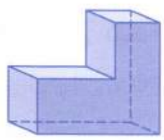


يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول محور** إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول هذا المحور بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

مثال 3 — التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد

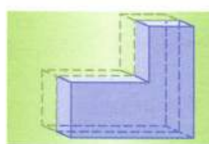
بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كل مما يأتي:

a) منشور على هيئة حرف L

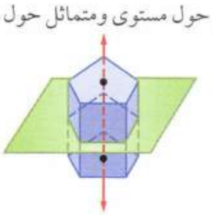


b) منشور خماسي منتظم

متماثل حول مستوى



متماثل حول مستوى ومتماثل حول محور



مراجعة المفردات

المنشور مجسم كثير السطوح له قاعدتان متطابقتان وأوجهه على هيئة متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كل مما يأتي:

3A)

كلاهما

3B)

غير ذلك

3C)

كلاهما

3D)

كلاهما

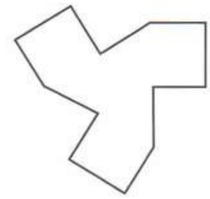
مثال إضافي

بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا. إذا كان كذلك انقل الشكل وعيّن مركز التماثل و حدد رتبته ومقداره.

a)

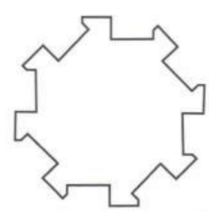
نعم؛ مركز التماثل هو مركز النجمة. ورتبة التماثل 5 ومقداره $72°$.

b)



نعم؛ مركز التماثل هو مركز المروحة ورتبة التماثل 3 ومقداره $120°$.

c)



نعم؛ مركز التماثل هو مركز الترس ورتبة التماثل 8 ومقداره $45°$.

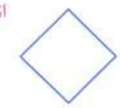
تنويع التعليم

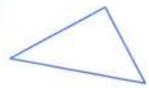
دون ضمن فوق

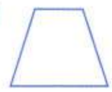
المتعلمون الطبيعيون: هناك أمثلة كثيرة في الطبيعة لأجسام متماثلة. اطلب إلى الطلاب أن يرسموا أو يجمعوا أشياء من الطبيعة يبينون فيها أنواع التماثلات التي تمت مناقشتها في هذا الدرس.

تأكــد

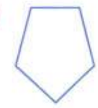
المثال 1 بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كل مما يأتي:

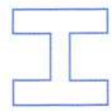
1)  انظر الهامش.

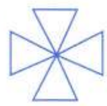
2)  لا

3)  انظر الهامش.

المثال 2 بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كل مما يأتي:

4)  لا

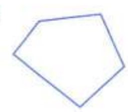
5)  انظر الهامش.

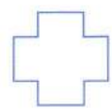
6)  انظر الهامش.

المثال 3 7) بين ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك. كلاهما

تدرب وحل المسائل

المثال 1 بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كل مما يأتي: (9, 10) انظر ملحق الإجابات

8)  لا

9) 

10) 

أعلام: بيّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كل مما يأتي:

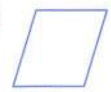
(11, 13) انظر ملحق الإجابات

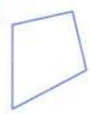
11) 

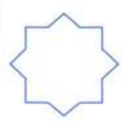
12)  لا

13) 

المثال 2 بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كل مما يأتي:

14)  نعم؛ 2؛ °180

15)  لا

16)  نعم؛ 8؛ °45

إطارات: بيّن ما إذا كان لغطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره.

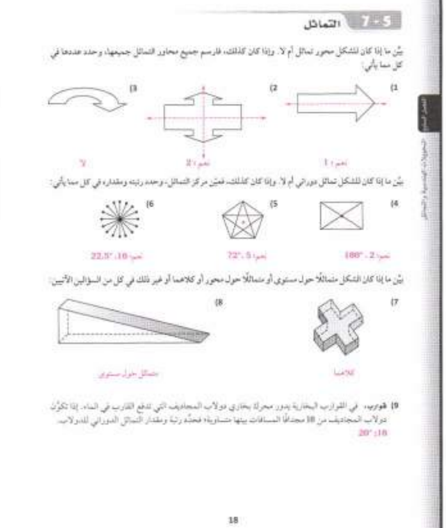
17) 

18) 

19) 

17) نعم؛ 7؛ °51.4
18) نعم؛ 6؛ °60
19) نعم؛ 10؛ °36

كتاب التمارين، ص (18)



التماثل في الأشكال الثلاثي الأبعاد

المثال 3 يبين طريقة تحديد إن كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلاً حول محور

مثال إضافي

3 بيّن إن كان الشكل متماثلاً حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

a) 

متماثل حول مستوى و متماثل حول محور

b) 

غير متماثل حول مستوى و لا حول محور

3 التدريب

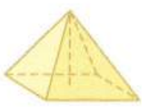
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1 للتأكد من الفهم. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	22–8 ، 36 ، 48–38
ضمن المتوسط	25–8 فردي ، 36–26 ، 48–38
فوق المتوسط	44–23 ، (اختياري: 48–45)

المثال 3 بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كل مما يأتي:

(20  كلاهما

(21  غير ذلك

(22  كلاهما

عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية ومستويات التماثل الرأسية لكل من العبوات الآتية:

(23  لا يوجد مستويات تماثل أفقية، وهناك عدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

(24  لا يوجد مستويات تماثل أفقية؛ مستوى تماثل رأسي واحد.

(25  مستوى تماثل أفقي واحد وعدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

(26 $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$ له محور تماثل وتماثل دوراني.

(27 $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$ له محور تماثل.

(28 $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$ له محور تماثل وتماثل دوراني.

جبر: مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره واكتب معادلة كل محور تماثل. 31–29) انظر الهامش

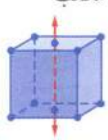
(29 $y = x$

(30 $y = x^2 + 1$

(31 $y = -x^3$

حدّد ما إذا كانت البلورة متماثلة حول مستوى أو متماثلة حول محور، وإذا كانت كذلك، فحدد مقدار التماثل في كل مما يأتي:

(32 مكعب

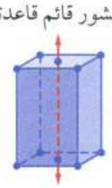


متماثل حول مستوى وحول محور؛ $90°$

(33 مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين

متماثل حول مستوى و حول محور؛ $180°$

(34 منشور قائم قاعدته معين



متماثل حول مستوى وحول محور؛ $180°$

الربط مع الحياة

تعتمد الخصائص الفيزيائية للمادة الصلبة على ترتيب بلوراتها. فبلورات الماس تأخذ شكل المكعب، وروابطها قوية جدًا يصعب قطعها. وهذا ما يجعل الماس مادة قاسية جدًا.

(35 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة.

a) **هندسيًا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله. a–c) انظر الهامش

b) **هندسيًا:** كرّر العملية في الفرع **a** على مربع ومضلع خماسي منتظم ومضلع سداسي منتظم.

c) **جدوليًا:** نظّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكل من هذه المضلعات.

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.
إجابة ممكنة: رتبة تماثل المضلع المنتظم تساوي عدد أضلاعه.

تنبيه لحل سؤال

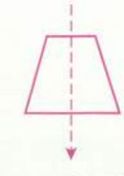
ورق الشفاف: قد يكون من المفيد وجود الورق الشفاف مع الطلاب عند حل أسئلة 10–8 والأسئلة 16–14.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب في السؤال 35 جدول قيم لاستقصاء العلاقة بين رتبة التماثل للمضلع و عدد أضلاعه.

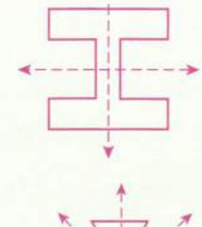
إجابات:

) نعم؛ 4

) نعم؛ 1

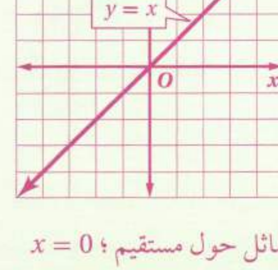


) نعم؛ 2؛ $180°$

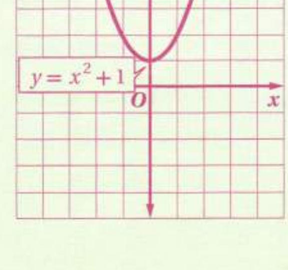


) نعم؛ $4; 90°$

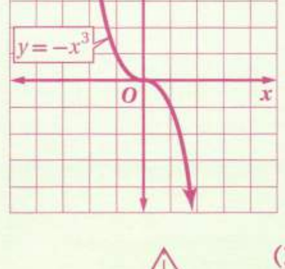
(29 تماثل دوراني؛ $180°$ ؛ 2 ؛ وتماثل حول المستقيم $y = -x$



(30 تماثل حول مستقيم ؛ $x = 0$



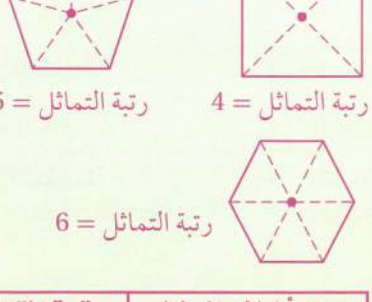
(31 تماثل دوراني؛ 2 ؛ $180°$



(35a

رتبة التماثل = 3

(35b



رتبة التماثل = 4 رتبة التماثل = 5

رتبة التماثل = 6

(35c

عدد أضلاع المضلع	رتبة التماثل
3	3
4	4
5	5
6	6

مسائل مهارات التفكير العليا

الشكل A

36) اكتشف الخطأ: يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط، في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط. هل أي منهما على صواب؟ اشرح تبريرك. انظر الهامش

37) تحدٍّ: يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما $y = x - 1$ ، $y = -x + 2$. أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل. ثم مثّل الشكل و محوري التماثل بيانيًّا. إجابة ممكنة: $(-1, 0), (2, 3), (4, 1), (1, -2)$ ، انظر الهامش للرسم.

38) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك. انظر الهامش

39) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

39) إجابة ممكنة: في كلا النوعين من التماثل حول محور والدوراني ينطبق الشكل على نفسه، ففي التماثل حول محور ينطبق الشكل على نفسه بالانعكاس حول المحور. وفي التماثل الدوراني ينطبق الشكل على نفسه من خلال دوران حول مركز التماثل. ويمكن أن يكون للشكل نفسه تماثل حول محور وتماثل دوراني.

تدريب على الاختبار المعياري

40) إجابة قصيرة: ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟ 1

41) إجابة شبكية: ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟ 8

مراجعة تراكمية

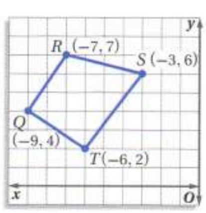
إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(1, 5), K(3, 1), L(5, 7)$. مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-7) (42, 43) انظر الهامش.

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x.

43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y.

44) يبيِّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي. ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-7)

$(7, -7)$

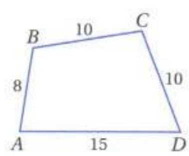


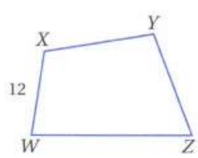
استعد للدرس اللاحق

إذا كان $ABCD \sim WXYZ$ ، فأوجد كلًّا مما يلي:

45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$ $\frac{2}{3}$

46) XY 15 **47)** YZ 15 **48)** WZ 22.5





4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم الدرس السابق تحويلات التطابق على تعلم الدرس الحالي عن التماثل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 4-7 و 5-7 بإعطائهم:

باستعمال الاختبار القصير 3، ص (50)

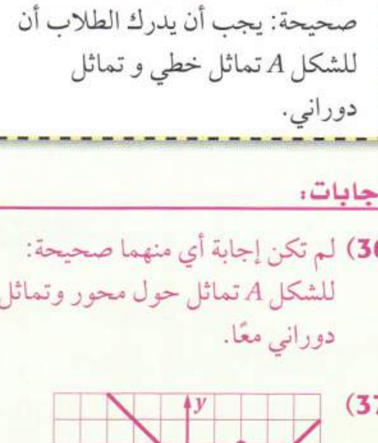
تنبيه!

اكتشف الخطأ: لم تكن إجابة أي من جمال أو ناصر عن السؤال 36 صحيحة: يجب أن يدرك الطلاب أن للشكل A تماثل خطي و تماثل دوراني.

إجابات:

36) لم تكن إجابة أي منهما صحيحة: للشكل A تماثل حول محور وتماثل دوراني معًا.

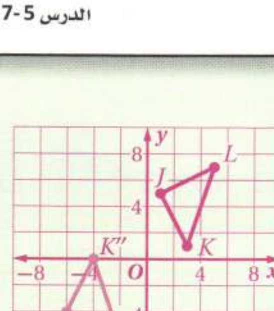
37)



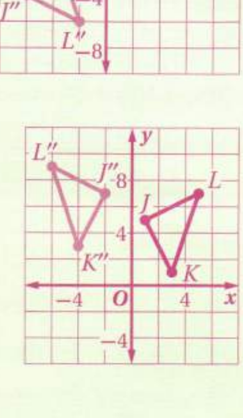
38) إجابة ممكنة:

المثلث المتطابق الضلعين متماثل حول المستقيم المرسوم من الرأس إلى منتصف القاعدة وليس له تماثل دوراني لأنه لا ينطبق على نفسه عند تدويره بزاوية بين $0°$ و$360°$ حول أي نقطة.

42)



43)



48) هرم ثلاثي قاعدته مثلث متطابق الأضلاع؛ إجابة ممكنة بما أن الشكل متماثل حول محور من الرتبة 3 فيجب أن تكون قاعدته مثلث متطابق الأضلاع و بما أنه ليس متماثلاً حول مستوى فهو هرم و ليس منشورًا. ولذا يجب أن يكون هرمًا ثلاثيًا متطابق الأضلاع.

7-6 التمدد
Dilations

فيما سبق:

درستُ الانعكاس والإزاحة والدوران.

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

المفردات:

التمدد dilation

تحويل التشابه similarity transformation

معامل التمدد scale factor of dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بينما يستعمل كثيرون آلات التصوير الرقمية إلا أنه لا زال بعض المصورين يفضلون استعمال الفيلم وآلات التصوير التقليدية لإنتاج مسودات الصور ومن هذه المسودات يكوّن المصورون صورًا بقياسات مختلفة.

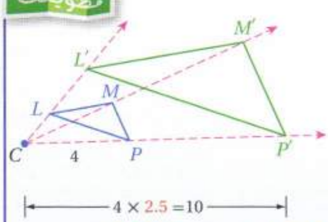
رسم التمدد: **التمدد** هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة طول صورة الشكل إلى طوله. وتسمى هذه النسبة **معامل التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشابه الشكل الأصلي مع اختلاف الموقع فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامل التمدد.

مفاهيم أساسية — التمدد

أضف إلى مطويتك

التمدد الذي مركزه C ومعامله العدد الموجب k ، حيث $k \neq 1$ ، ينقل النقطة P في شكل ما إلى صورتها P' ،

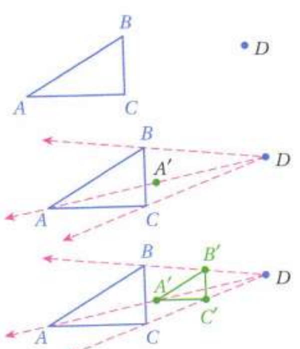
- إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C فإن صورتها هي النقطة P نفسها.
- إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C فإن صورتها P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ ويكون $CP' = k(CP)$.



$\triangle L'M'P$ هو صورة $\triangle LMP$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5 .

مثال 1 رسم التمدد

استعمل مسطرة لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة D ، ومعامله $\frac{1}{2}$.



الخطوة 1: ارسم من D أنصاف المستقيمات $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

الخطوة 2: عيّن A' على $\overrightarrow{DA}$ ، بحيث يكون $DA' = \frac{1}{2} DA$.

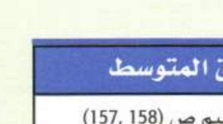
الخطوة 3: عيّن B' على $\overrightarrow{DB}$ و C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة نفسها ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J ، ومعامله العدد k المحدد في كل مما يأتي:

1A) $k = \frac{3}{2}$

1B) $k = 0.75$



7-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

تعيين المثلثات المتشابهة.

إيجاد معامل التشابه بين مضلعين متشابهين.

الدرس 7-6

رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.

رسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-6

استعمال تحويلات التطابق لصياغة تخمينات حول خصائص الأشكال الهندسية بما فيها الأشكال في المستوى الإحداثي وتبرير هذه التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما العلاقة بين المسودة وصورة مكبرة أو مصغرة عنها؟ إنهما متشابهتان.
- كيف تثبت أن الصورة مشابهة للمسودة؟ أثبت أن زواياهما المتناظرة متطابقة، وأن أطوال أضلاعهما المتناظرة متشابهة.

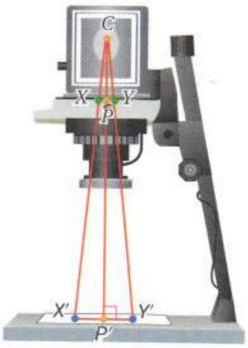
مصادر الدرس 7-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (157)	• تنويع التعليم ص (157, 158)	• تنويع التعليم ص (157, 158)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (19)	• كتاب التمارين ص (19)	• كتاب التمارين ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

من تعريف معامل التمدد تجد أنه إذا كان معامل التمدد k أكبر من 1 ، فإن طول الصورة أكبر من طول الشكل الأصلي وعندها يكون التمدد تكبيرًا. وإذا كان $0<k<1$ فإن طول الصورة أصغر من طول الشكل الأصلي، وعندها يكون التمدد تصغيرًا. وبما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن التمدد في المثال 1 تصغير .

ويسمّى التمدد الذي معامله 1 تمددًا مطابقًا؛ إذ يكون الشكل الأصلي، وصورته متطابقين.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد معامل التمدد



تصوير: لإنتاج صور مكبرة، يمكن أن تعدل المسافة بين مسودة الصورة والصورة المكبرة باستعمال جهاز تكبير الصور.
افترض أن المسافة CP بين مصدر الضوء C ومسودة الصورة تساوي 45 mm. ما المسافة PP' التي تعدل إليها جهاز تكبير الصور للحصول على صورة عرضها $X'Y' = 22.75\text{cm}$ من مسودة عرضها $XY = 35\text{ mm}$؟

افهم: تتضمن هذه المسألة تمددًا مركزه C، وتعلم أن $XY = 35\text{ mm}$ ، $X'Y' = 22.75\text{ cm} = 227.5\text{ mm}$ ، $CP = 45\text{ mm}$.
والمطلوب إيجاد PP'.

خطط: أوجد معامل التمدد من الشكل الأصلي XY إلى الصورة $X'Y'$، واستعمله لإيجاد CP' ، ثم استعمل CP و CP' لإيجاد PP'.

حُلّ: معامل التمدد هو نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر في الشكل الأصلي .

$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$	معامل تمدد الصورة
$= \frac{X'Y'}{XY}$	طول الصورة يساوي $X'Y'$ ، طول الأصل يساوي XY
$= \frac{227.5}{35} = 6.5$	بالقسمة

استعمل معامل التمدد لإيجاد CP'.

$CP' = k(CP)$	تعريف التمدد
$= 6.5(45)$	$k = 6.5 , CP = 45$
$= 292.5$	بالضرب

استعمل CP' و CP لإيجاد PP'.

$CP + PP' = CP'$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$45 + PP' = 292.5$	$CP = 45 , CP' = 292.5$
$PP' = 247.5$	بطرح 45 من الطرفين

يجب أن يُعدل جهاز تكبير الصور بحيث تكون المسافة PP' بين المسودة والصورة المكبرة 247.5 mm أو 24.75 cm.

تحقق: بما أن هذا التمدد تكبير فيجب أن يكون معامله أكبر من 1، وبما أن $6.5 > 1$ ، فإن معامل التمدد معقول . ✔

إرشادات لحل المسألة

استعمال التقدير
لتجنب الأخطاء غير المقصودة في حساباتك، قدّر إجابة السؤال قبل الشروع في الحل. يمكنك أن تقدّر معامل التمدد في المثال 2 بحوالي $\frac{240}{40}$ أو 6 .
وبذلك يكون CP' 50×6 أي 300 تقريبًا. ويكون PP' $300 - 50$ أي 250 mm تقريبًا، أو 25 cm. والإجابة 24.7 cm قريبة من الإجابة المقدّرة؛ لذا فإن الإجابة معقولة.

رسم التمدد

المثال 1 يبيّن كيفية رسم الصورة الناتجة عن التمدد.

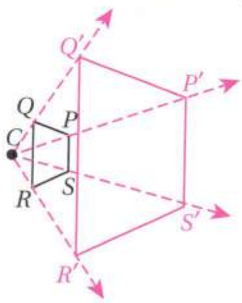
المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد معامل التمدد.

التقويم التكويني

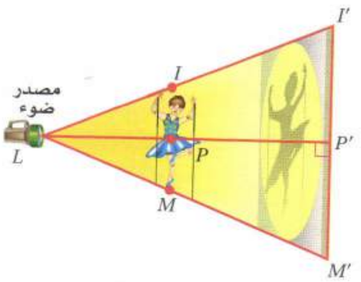
استعمل أسئلة تحقق من فهمك بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 انقل شبه المنحرف $PQRS$ والنقطة C. ثم استعمل مسطرة لرسم صورة شبه المنحرف $PQRS$ بالتمدد الذي مركزه C ومعامله 3.



2 **دمى:** للإيهام بأن الصورة بالحجم الطبيعي يستعمل محركو الدمى مصدرًا ضوئيًا لعرض صورة مكبرة للدمية على شاشة أو حائط. افرض أن المسافة بين مصدر الضوء L والدمية (LP) هي 24 in. على أي بعد عن الشاشة تضع دمية طولها 9 in ليكون طول ظلها ($I'M'$) يساوي 49.5 in ؟



108 in أو 9 ft

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

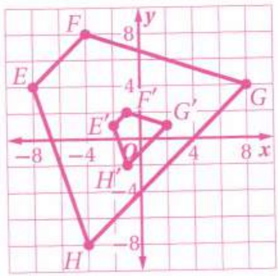
المتعلمون السمعيون: يمكن ربط التمدد مع الصوتيات من خلال تكبير الصوت أو تصغيره، حيث يُستعمل معامل التمدد (أكبر من 1) عند تكبير الصوت، ومعامل التمدد (أصغر من 1) عند تصغير الصوت. يستطيع الطلاب تجربة ذلك باستعمال جهاز صوتي.

التمدد في المستوى الإحداثي

المثال 3 يبيّن كيفية رسم صورة شكل الناتجة عن تمدد في المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

3 إحداثيات رؤوس شبه المنحرف $EFGH$ هي $E(-8, 4)$, $F(-4, 8)$, $G(8, 4)$, $H(-4, -8)$. مثل بيانيًا صورة $EFGH$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{4}$.



تنبيه!

مركز التمدد: انتبه للطلاب الذين يبدؤون رسم التمدد من نقطة على الشكل و يقيسون من نقطة بعيدة عن مركز التمدد. أكد على أن معامل التمدد يقاس بدءًا من مركز التمدد.

المحتوى الرياضي

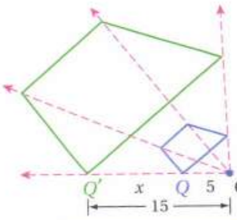
الاتجاه: بيّن للطلاب أن التمدد يحفظ قياس الزوايا والاتجاه ولكنه لا يحفظ الأطوال.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعرض المستوى الإحداثي على السبورة. ارسم شكلًا في المستوى و أعط الطلاب معامل التمدد واطلب إليهم أن يحددوا إحداثيات رؤوس صورة الشكل الناتجة عن التمدد و أن يعيّنوا هذه النقاط ويرسموا صورة الشكل.

تحقق من فهمك

2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا. ثم أوجد معامل التمدد وقيمة x. **تكبير؛ 3؛ 10**



إرشادات للدراسة

معامل التمدد السالب يمكن أن يكون معامل التمدد سالبًا. وسوف تستقصي هذا النوع من التمدد في السؤال 26.

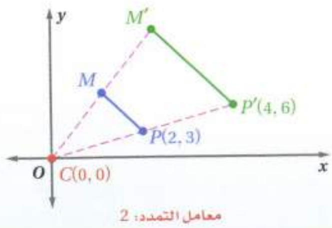
التمدد في المستوى الإحداثي: يمكن أن تستعمل القواعد الآتية لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — التمدد في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل اضرب الإحداثيين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل التمدد k.

مثال:



الرموز: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

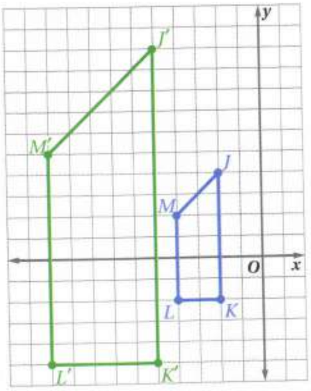
مثال 3 التمدد في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي **JKLM** هي $J(-2, 4)$, $K(-2, -2)$, $L(-4, -2)$, $M(-4, 2)$. مثّل بيانيًا **JKLM** وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله **2.5** .

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5 .

(x, y)	$\rightarrow$	$(2.5x, 2.5y)$
$J(-2, 4)$	$\rightarrow$	$J'(-5, 10)$
$K(-2, -2)$	$\rightarrow$	$K'(-5, -5)$
$L(-4, -2)$	$\rightarrow$	$L'(-10, -5)$
$M(-4, 2)$	$\rightarrow$	$M'(-10, 5)$

مثِّل بيانيًا $JKLM$ وصورته $J'K'L'M'$.



تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كل من السؤالين الآتيين: **(3A, 3B) انظر الهامش .**

3A) $Q(0, 6)$, $R(-6, -3)$, $S(6, -3)$ ؛ $k = \frac{1}{3}$

3B) $A(2, 1)$, $B(0, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(0, 1)$ ؛ $k = 2$

تنويع التعليم

ضمن فوق

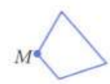
توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا الخطوات المتبعة في رسم الصورة الناتجة عن التمدد. يتعين على الطلاب أن يقدموا أمثلة توضح هذه الخطوات و أن يكتبوا خصائص التمدد. اقبل جميع الإجابات المعقولة.

تأكـد

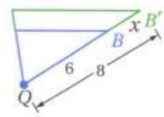
المثال 1 استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كل من السؤالين الآتيين: **2–1) انظر الهامش.**

1) $k = \frac{1}{4}$

2) $k = 2$

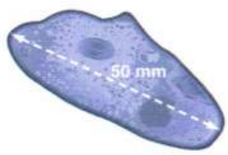


المثال 2 **3)** حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا. ثم أوجد معامله وقيمة x. **تكبير؛ $\frac{4}{3}$؛ 2**



4) **علم الأحياء:** طول مخلوق حيّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm. إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل التمدد) المستعملة؟ وضّح إجابتك.

4) 250 مرة؛ طول الكائن الحي بالملمتر يساوي $1000 \div 200$ أو 0.2 mm. معامل التمدد يساوي $\frac{50}{0.2}$ أو 250.



المثال 3 مثّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كل من الأسئلة الآتية: **8–5) انظر ملحق الإجابات**

5) $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$؛ $k = 1.5$

6) $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$؛ $k = \frac{1}{2}$

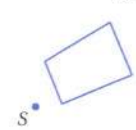
7) $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$؛ $k = 2$

8) $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$؛ $k = \frac{3}{4}$

تدرب وحل المسائل

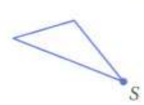
المثال 1 استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كل من الأسئلة الآتية: **11–9) انظر ملحق الإجابات**

9) $k = \frac{5}{2}$



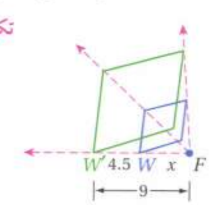
10) $k = \frac{1}{3}$

11) $k = 2.25$

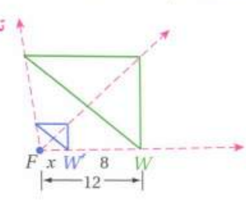


المثال 2 حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x .

12) **تكبير؛ 2؛ 4.5**



13) **تصغير؛ $\frac{1}{3}$؛ 4**



3 التدريب

التقويم التكويني

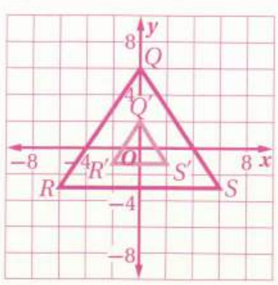
استعمل الأسئلة 8–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل بعض الأسئلة

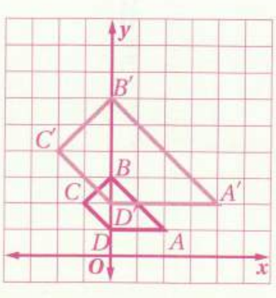
الورق الشفاف: قد يجد الطلاب أنه من المفيد وجود الورق الشفاف عند حل الأسئلة 11–9.

إجابة (تحقق من فهمك):

(3A

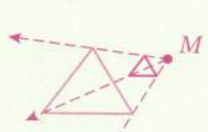


(3B

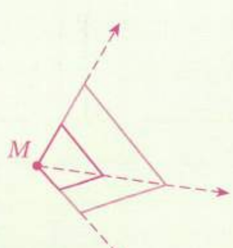


إجابات:

(1



(2



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	18–9 ، 42–29
ضمن المتوسط	19–9 فردي ، 20 ، 25–21 فردي ، 26 ، 42–29
فوق المتوسط	38–19 ، (اختياري: 42–39)

حشرات: طول كل من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المستعملة. ووضّح إجابتك.

(14

(15

14) 15مرة؛ طول صورة الحشرة بالملمترات هو 3.75×10 أو 37.5 mm ومعامل التمدد يساوي $\frac{37.5}{2.5}$ أو 15.

15) 96 مرة؛ طول الحشرة بالملمترات هو 4.8×10 أو 48 mm. ومعامل التمدد يساوي $\frac{48}{0.5}$ أو 96.

المثال 3 مثّل بيانيًا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد K المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية: 16–18) انظر ملحق الإجابات

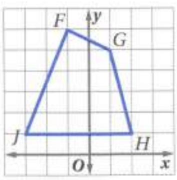
16) $k = 0.5$ ؛ $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$

17) $k = 0.75$ ؛ $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$

18) $k = 3$ ؛ $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$

a–b) انظر الهامش.

19) هندسة إحداثية: استعن بالتمثيل البياني للمضلع $FGHJ$.



a) مثّل بيانيًا صورة $FGHJ$ الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y.

b) نفّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.

c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا على الصورة النهائية؟ لا

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد و الانعكاس على الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟. انظر الهامش.

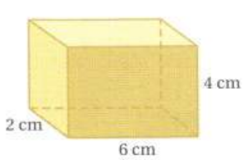
20) رسم: يرسم سليمان صورة باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية طول وحدتها $\frac{1}{4}$ in فوق صورة أبعادها 5 in × 7 in، ويضع شبكة أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ in على ورقة رسم أبعادها 10 in × 14 in، ثم يرسم مايحتويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.

a) ما معامل هذا التمدد؟ 2 : 1

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعين عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟ 2.5 in

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج من صورة أبعادها 5 in x 7 in عند استعمال شبكة وحدتها 2 in على لوحة الرسم؟ $2240\ in^2$

21) تغيير الأبعاد: يمكن إجراء تمدد على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.



a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.

b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمدد معامله 2، وأوجد حجمه.

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$، وأوجد حجمه.

d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي. ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمدد إلى حجم المنشور الأصلي. انظر الهامش.

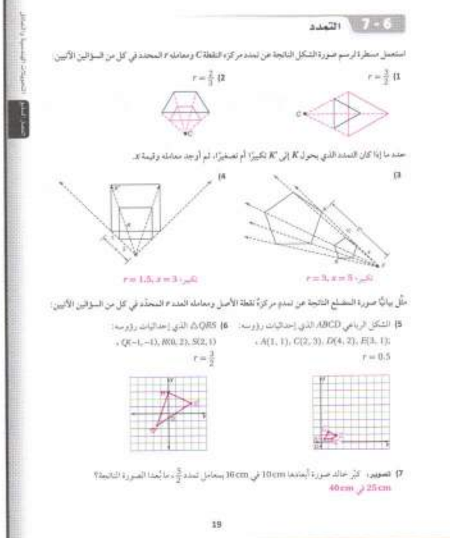
e) ضع تخمينًا حول أثر التمدد ذي المعامل الموجب على مساحة سطح المنشور وعلى حجمه. انظر الهامش.

21a) مساحة سطح المنشور: $88\ cm^2$؛ وحجمه: $48\ cm^3$

21b) مساحة سطحه: $352\ cm^2$؛ وحجمه: $384\ cm^3$

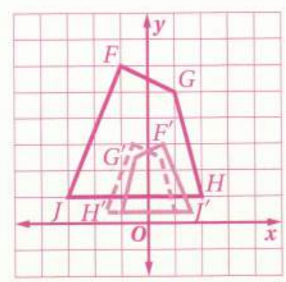
21c) مساحة سطحه: $22\ cm^2$؛ وحجمه: $6\ cm^3$

كتاب التمارين، ص (19)

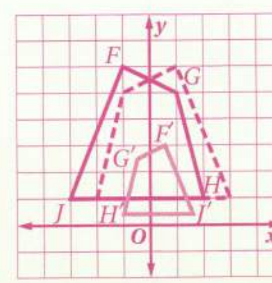


إجابات:

(19a



(19b



19d) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا يكون لترتيب تركيب التمدد الذي مركزه نقطة الأصل و الانعكاس أهمية إذا كان محور الانعكاس يحتوي نقطة الأصل أي إذا كانت معادلته على الصورة $y = mx$.

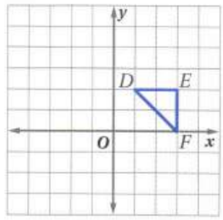
21d) مساحة السطح 4 أمثال المساحة الأصلية عندما يكون معامل التمدد 2 وتساوي $\frac{1}{4}$ المساحة الأصلية إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$. حجم المنشور الجديد 8 أمثال حجم المنشور الأصلي عندما يكون معامل التمدد 2 ويساوي $\frac{1}{8}$ الحجم الأصلي إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$.

21e) تضرب مساحة سطح الشكل الأصلي في r^2. ويضرب حجم الشكل الأصلي في r^3.

22) **هندسة إحداثية :** استعن بالتمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي: a–b) انظر الهامش.

a) مثّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3.

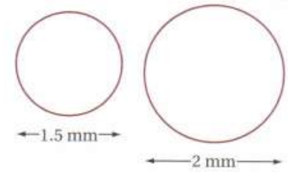
b) عبّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3.



23) **صحة :** استعن بفقرة الربط مع الحياة جانبًا للإجابة عن السؤالين الآتيين.

a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبّرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.
أوجد معامل هذا التمدد. $1\frac{1}{3}$

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ و بعده . $3.14\ mm^2$ ؛ $1.77\ mm^2$



أُعطي في كل من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P. عيّن موقع النقطة P، وقدر معامل التمدد . 24, 25) انظر الهامش .

25) 24)

26) **تمثيلات متعددة :** سوف تستقصي في هذه المسألة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب. a–c) انظر الهامش .

a) **هندسيًّا :** مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0), B(2, -4), C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقط الأصل ومعامله -2 .

b) **هندسيًّا :** ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ وآخر معامله -3 .

c) **جدوليًّا :** اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

d) **لفظيًّا :** ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

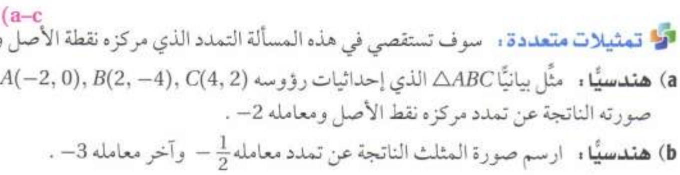
e) **تحليليًّا :** اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل و معامله $-k$. $(x, y) \to (-kx, -ky)$

f) **لفظيًّا :** عبّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

مسائل مهارات التفكير العليا

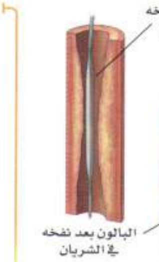
27) **اكتشف الخطأ :** يحاول كل من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$. فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.

سعود؛ لأن متعب استعمل معامل تمدد موجبًا.



28) **تحدٍّ :** أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5. $y = 4x - 3$

29) **اكتب :** هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة ؟ اشرح إجابتك . انظر الهامش .



الربط مع الحياة

عندما يضيق الشريان التاجي الذي ينقل الدم إلى القلب بسبب تراكم الكوليسترول يمكن توسيعه باستعمال أنبوب أجوف مرن في نهايته بالون صغير، وتسمّى هذه العملية قسطرة البالون.

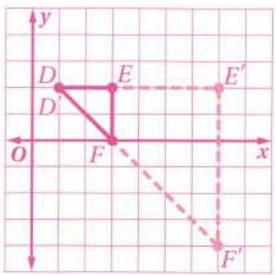
26d) إجابة ممكنة: يضرب كل إحداثي في معامل التمدد السالب .

26f) إجابة ممكنة: يمكن وصف التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$ بأنه تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ودوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

تمثيلات متعددة : يستعمل الطلاب في السؤال 26، الرسوم الهندسية والجداول والتعابير الجبرية و الوصف اللفظي لاستقصاء التمدد الذي مركزه نقطة الأصل و معامله سالب.

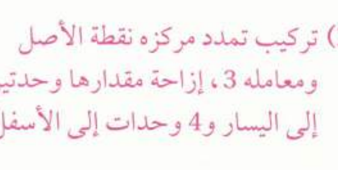
إجابات:

(22a



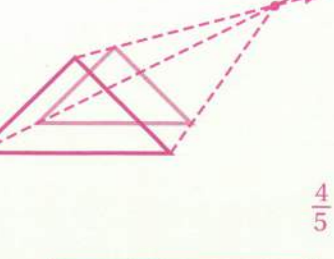
22b) تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3 ، إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى الأسفل.

(24



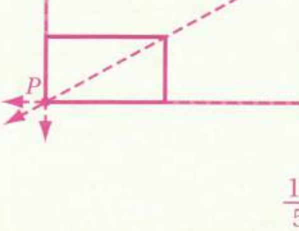
$\frac{4}{5}$

(25



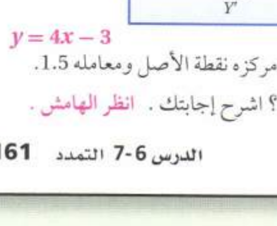
$\frac{11}{5}$

(26a

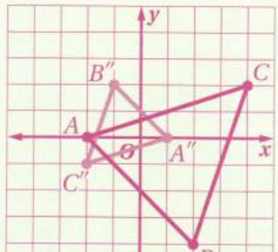


عندما $k = -2$

(26b



عندما $k = -\frac{1}{2}$



عندما $k = -3$

(26c

معامل التمدد	A	B	C
	الإحداثيات		
-2	$(4, 0)$	$(-4, 8)$	$(-8, -4)$
$-\frac{1}{2}$	$(1, 0)$	$(-1, 2)$	$(-2, -1)$
-3	$(6, 0)$	$(-6, 12)$	$(-12, -6)$

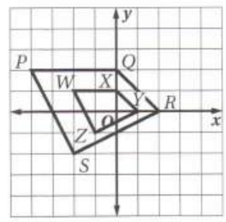
29) إجابة ممكنة: نعم؛ تتكون أشكال متطابقة نتيجة الانعكاس والإزاحة و الدوران، مما يعني أن جميع الأضلاع المتوازية قبل التحويل الهندسي تبقى متوازية بعده، وأن النقاط الواقعة على استقامة واحدة قبل التحويل الهندسي تبقى على استقامة واحدة بعده. كما يحفظ التمدد التوازي و الاستقامة لأن الأشكال الناتجة تكون مشابهة للأصل أي أن لها الشكل نفسه ولكن بنسب مختلفة.

30) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثًا في المستوى الإحداثي، ثم كبِّره بحيث تصبح مساحة صورته الناتجة عن التمدد أربعة أمثال مساحته الأصلية، وحدّد معامل التمدد ومركزه. انظر الهامش.

31) اكتب: حدّد التحويلات الهندسية التي تكون نتيجتها مطابقة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها مشابهة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها الشكل الأصلي نفسه. اشرح إجابتك. انظر الهامش.

تدريب على الاختبار المعياري

32) مامعامل التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟ 2



33) يرسم توفيق نسخة من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، و طولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمته؟ J

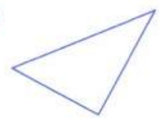
F $4 \text{ in} \times 8 \text{ in}$ **G** $6 \text{ in} \times 12 \text{ in}$

H $8 \text{ in} \times 16 \text{ in}$ **J** $10 \text{ in} \times 20 \text{ in}$

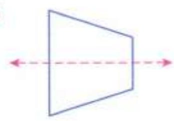
مراجعة تراكمية

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا. وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كل مما يأتي: (الدرس 7-5)

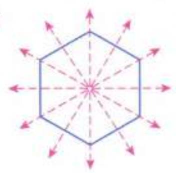
34) لا



35) نعم؛ 1

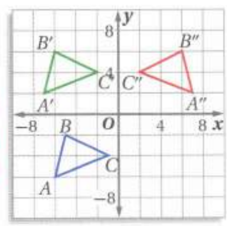


36) نعم؛ 6



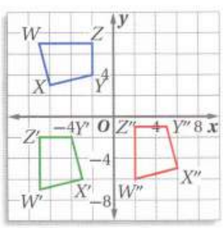
صف التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 7-4)

37)



إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليسار و 8 وحدات إلى أعلى ثم انعكاس في المحور y.

38)



دوران بزاوية °90 حول نقطة الأصل وإزاحة مقدارها 9 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية:

39) $58.9 = 2x$ 29.45

40) $\frac{108.6}{\pi} = x$ 34.57

41) $228.4 = \pi x$ 72.7

42) $\frac{336.4}{x} = \pi$ 107.08

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يقيسوا جسمًا في غرفة الفصل و أن ينفذوا تمددًا لتصغيره ويكونوا نموذجًا عنه على لوحة أو/و على ورق الرسم. و اطلب إليهم أن يسلموا النماذج التي أعدوها قبل مغادرة الفصل.

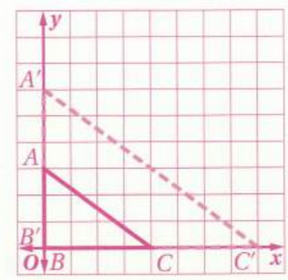
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 6–7 باعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

30)



$k = 2$، ومركز التمدد النقطة B.

31) إجابة ممكنة: يُنتج كل من الانعكاس والإزاحة والدوران أشكالًا مطابقة للشكل الأصلي، لأن زوايا و أضلاع الشكل الأصلي تطابق الزوايا و الأضلاع المناظرة لها في الصورة. ويُنتج التمدد أشكالاً مشابهة للشكل الأصلي لأن زوايا الشكل الأصلي تطابق الزوايا المناظرة لها في الصورة وأطوال أضلاع الشكل الأصلي متناسبة مع أطوال الأضلاع المناظرة لها في الصورة. و يُنتج التمدد الذي معامله 1 الشكل الأصلي نفسه لأن كل جزء من الشكل الناتج من التمدد ينطبق على الجزء المناظر له في الشكل الأصلي.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 7-1)

- الانعكاس هو تحويل هندسي يمثّل قلب الشكل حول مستقيم يُسمّى خط الانعكاس.

الإزاحة (الانسحاب) (الدرس 7-2)

- الإزاحة (الانسحاب) هي تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وبالاتجاه نفسه .

الدوران (الدرس 7-3)

- يحرِّك الدوران كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وباتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات الهندسية (الدرس 7-4)

- يمكن تمثيل الإزاحة بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متوازيين. ويمكن تمثيل الدوران بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين .

التماثل (الدرس 7-5)

- محور التماثل للشكل الثنائي الأبعاد هو المستقيم الذي يمكن طي الشكل عنده للحصول على نصفين متطابقين تمامًا.
- رتبة التماثل هي عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$.
- مقدار التماثل هو قياس أصغر زاوية يدور بها الشكل حتى ينطبق على نفسه.

التمدد (الدرس 7-6)

- يكبّر التمدد الشكل أو يصغّره بنسبة محدّدة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

مفردات أساسية

خط الانعكاس (ص. 116)	**التماثل الدوراني** (ص. 151)
مركز الدوران (ص. 131)	**مركز التماثل** (ص. 151)
زاوية الدوران (ص. 131)	**رتبة التماثل** (ص. 151)
التحويل الهندسي المركب (ص. 139)	**مقدار التماثل** (ص. 151)
التماثل (ص. 150)	**التمدد** (ص. 156)
التماثل حول محور (ص. 150)	**تحويل التشابه** (ص. 156)
محور التماثل (ص. 150)	**معامل التمدد** (ص. 156)

اختبار المفردات:

اختر المفردة التي تجعل الجملة صحيحة:

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته فإن هذه العملية تسمى (تحويلًا هندسيًا مركبًا ، رتبة الدوران).
2) إذا طوي شكل حول خط مستقيم، وانطبق نصفاه على بعضهما تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محور الانعكاس ، محور التماثل).
3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).
4) يطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$ اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).
5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل و صورتها.
6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.
7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.
8) لتدوير نقطة ما بزاوية ($90°$ ، $180°$) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 وبدّل الإحداثيين x , y.
9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.
10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية : يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة.

فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-10 فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات ، ص (52)

أحاجي المفردات:

تُعزَّز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال تلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

مراجعة الدروس

7-1 الانعكاس (ص. 116-123)

11–14) انظر الهامش.

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي و صورته بالانعكاس المحدد.

11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$؛ الانعكاس حول المحور x.

12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه $X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$؛ الانعكاس حول المحور y.

13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه $Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$؛ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

14) **فن:** يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبي ممر في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انقل الشكل إلى دفترك، وارسم خط الانعكاس.

مثال 1

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(1, 4), K(2, 1), L(6, 2)$، ومثِّل صورته بالانعكاس حول المحور x.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1.

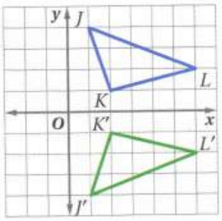
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$

$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$

$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$

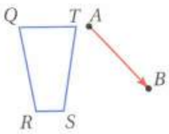
ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J'K'L'$.



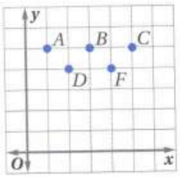
7-2 الإزاحة (الانسحاب) (ص. 124-129)

15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أعلى. 15–17) انظر الهامش

16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B.



17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعب. تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى الأسفل، في حين تحرك اللاعب A 5 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين.



مثال 2

مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه $X(2, 2), Y(5, 5), Z(5, 3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى أسفل.

يمكن تمثيل هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$.

أوجد صورة كل رأس.

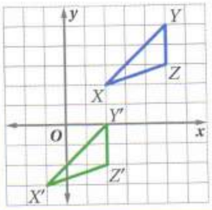
$(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$

$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$

$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$

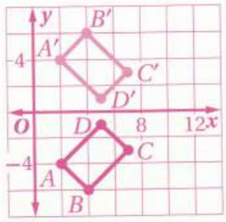
$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$

ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ وصورته $\triangle X'Y'Z'$.

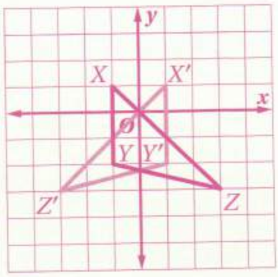


إجابات:

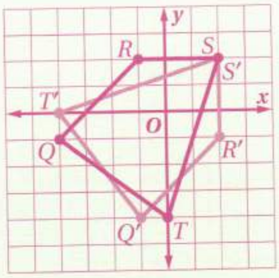
(11



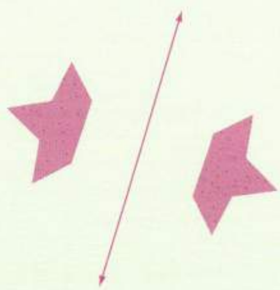
(12



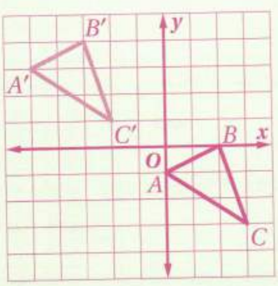
(13



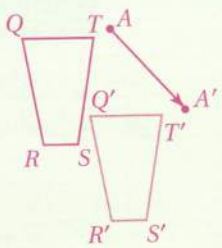
(14



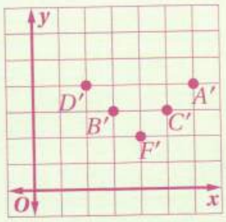
(15



(16

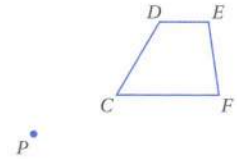


(17



7-3 الدوران (ص. 131-136)

18) استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P. **18–20)** انظر الهامش



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كل مما يأتي:

19) $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه $M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$

20) $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه $D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$

مثال 3

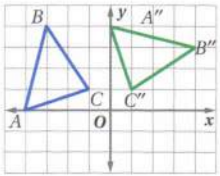
مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل، حيث $A(-4, 0), B(-3, 4), C(-1, 1)$.

إحدى طرائق حل هذه المسألة هي إجراء دوران بزاوية $180°$ ثم دوران آخر بزاوية $90°$. لذا، اضرب الإحداثيين x, y في -1.

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$$
$$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$$
$$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$$

ثم اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 و بدّل الإحداثيين x, y.

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$$
$$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$$
$$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$$



ثم مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.

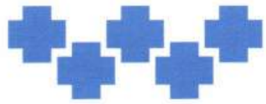
7-4 تركيب التحويلات الهندسية (ص. 139-146)

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كل مما يأتي: **21–23)** انظر الهامش

21) $\overline{CD}$، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$، انعكاس حول المستقيم $y = x$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.

22) $\overline{GH}$، حيث $G(-2, -3), H(1, 1)$، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.

23) **أنماط:** كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة. صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.



مثال 4

إحداثيات طرفي $\overline{RS}$ هما $R(4, 3)$, $S(1, 1)$.
مثِّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$.

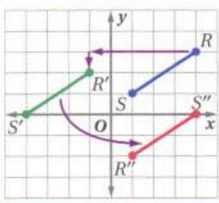
الخطوة 1: يمكن التعبير عن الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$

$$(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$$
$$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$$
$$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

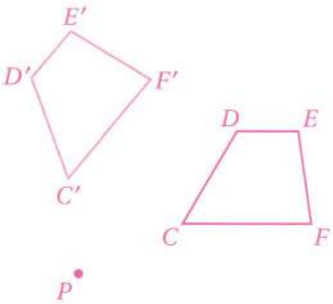
$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$$
$$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$$

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا $\overline{RS}$ و صورتها $\overline{R''S''}$.

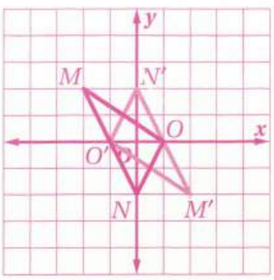


إجابات:

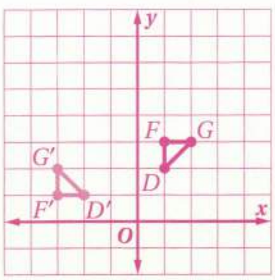
(18



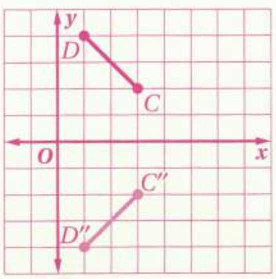
(19



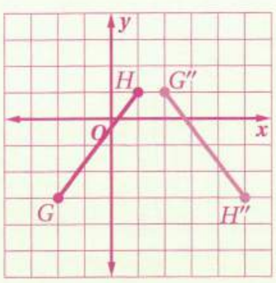
(20



(21



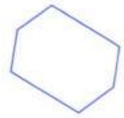
(22



23) إجابة ممكنة: إزاحة إلى اليمين وإلى الأسفل ثم إزاحة للشكل الناتج إلى اليمين وإلى الأعلى.

7-5 التماثل (ص. 155-150)

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها. 26–24) انظر الهامش

(24


(25


بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كل مما يأتي:

(26

26) انظر الهامش

(27

لا

مثال 5

بيِّن ما إذا كان الشكل الآتي متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك .

المصباح متماثل حول مستوى وكذلك حول محور.

7-6 التمدد (ص. 162-156)

28) استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.
انظر الهامش

29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا. ثم أوجد معامل التمدد و قيمة x.

تصغير ؛
8.25, 0.45

30) **نوادِ علمية :** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار. إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in، وعرض صورتها على الجدار 4 ft، فما معامل التكبير؟ 8

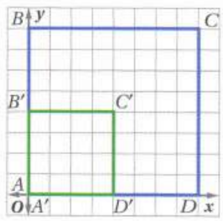
مثال 6

أوجد صورة $ABCD$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 0.5، إذا كانت $A(0, 0), B(0, 8), C(8, 8), D(8, 0)$.

اضرب الإحداثيين x, y لكل رأس بمعامل التمدد 0.5.

$$(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$$
$$A(0, 0) \rightarrow A'(0, 0)$$
$$B(0, 8) \rightarrow B'(0, 4)$$
$$C(8, 8) \rightarrow C'(4, 4)$$
$$D(8, 0) \rightarrow D'(4, 0)$$

مثِّل $ABCD$ و صورته $A'B'C'D'$ بيانيًّا.

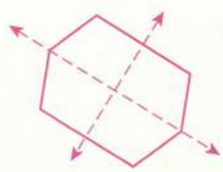


نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ، ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل 7 عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

24) نعم؛ 2



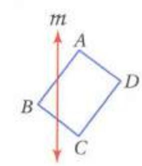
25) نعم؛ 1

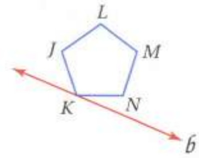
26) نعم؛ 4; 90°

(28

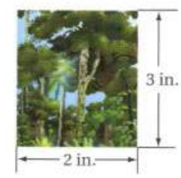
الفصل 7 اختبار الفصل

ارسم صورة كل من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى: 1–2) انظر الهامش

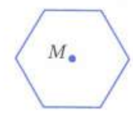
1) 

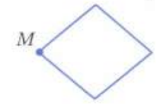
2) 

3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة لتصبح أبعادها 4 in في 6 in، مستعملًا آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in، ولا تزيد عن ذلك. 150% و 133%



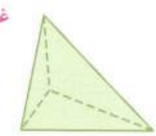
استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله r المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: 4–5) انظر الهامش

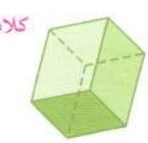
4) $r = 1.5$ 

5) $r = \frac{1}{3}$ 

6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها 60° كل ثانيتين. بعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟ 12 ثانية

بيِّن ما إذا كان كل من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7) غير ذلك 

8) كلاهما 

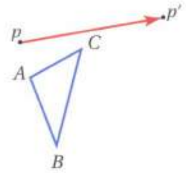
مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كل مما يأتي: 9–11) انظر الهامش

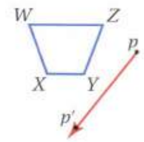
9) $\square FGHJ$، حيث $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$؛ انعكاس حول المحور x.

10) $\triangle ABC$، حيث $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

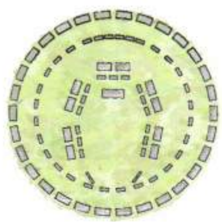
11) الشكل الرباعي $WXYZ$، حيث $W(2, 3), X(1, 1), Y(3, 0), Z(5, 2)$؛ دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل p إلى p' في كل من السؤالين الآتيين: 12–13) انظر ملحق الإجابات

12) 

13) 

14) **آثار:** يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري. ما رتبة تماثل الحلقة الخارجية وما مقداره؟ 30; 12°



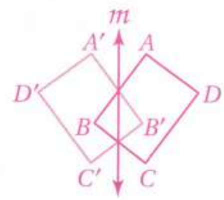
15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثّله الشكل الآتي؟ B

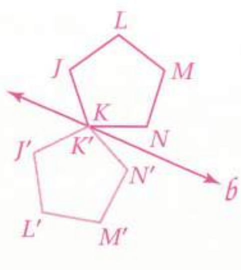
A تمدد
B إزاحة ثم انعكاس
C دوران
D إزاحة

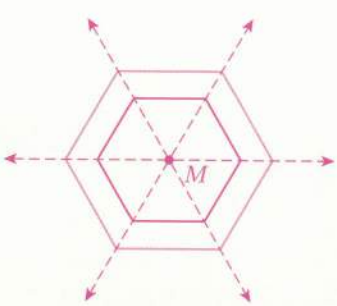
مخطط المعالجة

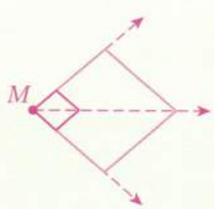
المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	فاختر أحد المصدرين الآتيين:
الدروس: 1-7 إلى 6-7	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7, 11, 12, 16, 17, 21, 22, 26, 27, 31, 32)
تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)	www.obeikaneducation.com
www.obeikaneducation.com	

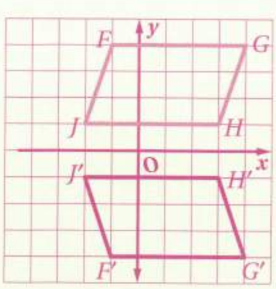
إجابات:

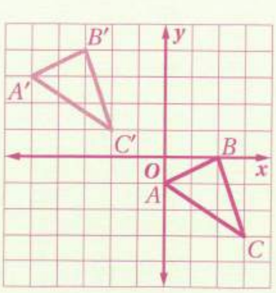
1) 

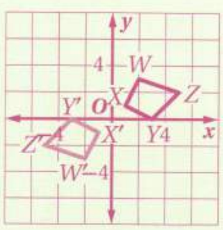
2) 

4) 

5) 

9) 

10) 

11) 

1 التركيز

الهدف: الحل عكسيًّا عندما تكون النتيجة النهائية معلومة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما المفردات التي تدل على أنه يتعين عليك أن تحل المسألة عكسيًّا؟
- أعط مثالًا لسؤال من هذا الفصل يمكن حله عكسيًّا.
- ما وجه الشبه بين هذه الطريقة واستراتيجيات كتابة البرهان ذي العمودين؟

الحل عكسيًّا

تُعطى في معظم المسائل مجموعة من الشروط أو الحقائق، ويُطلب إليك إيجاد النتيجة النهائية. ومع ذلك قد تُعطى في بعض المسائل النتيجة النهائية ويطلب إليك إيجاد أمر ما وقع مبكرًا في موقف المسألة. لحل مثل هذه المسائل يتعين عليك أن تستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجيات الحل عكسيًّا

الخطوة 1

ابحث عن كلمات مفتاحيه تشير إلى أنه يلزم أن تحل المسألة عكسيًّا.
بعض الكلمات المفتاحية الممكنة:

- ماذا كان المقدار **الأصلي** ...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل** ...؟
- ماذا كان المقدار **في البداية** ...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة.

- اكتب قائمة بالخطوات المتتابعة من البداية وصولًا إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ من النتيجة النهائية، وتتبع الخطوات بترتيب عكسي.
- "تراجع" عن كل خطوة باستعمال العمليات العكسية حتى تصل إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من الحل إذا سمح الوقت.

- تأكد من أن إجابتك منطقية.
- ابدأ من إجابتك واتبع الخطوات بالترتيب المُعطى في المسألة؛ لتتأكد من الوصول إلى النتيجة النهائية نفسها.

مثال

حُلَّ المسألة الآتية، وبيِّن خطوات الحل. سوف تصحح الإجابة وتحدد الدرجة المستحقة باستعمال سلم تقدير الإجابات القصيرة المجاور.

تستعمل سعاد برمجية حاسوبية لتتدرب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي. بدأت من نقطة وأزاحتها 4 وحدات إلى أعلى و 8 وحدات إلى اليسار. ثم أجرت انعكاسًا للصورة الناتجة حول المحور x. وأخيرًا أجرت تمددًا للصورة الناتجة معامله 0.5، ومركزه نقطة الأصل، فكانت إحداثيات الصورة النهائية $(-1, -4)$. ماذا كانت الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة؟

سلم تقدير	
المعيار	**الدرجة**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة ومعها تفسير تام يوضح كل خطوة من خطوات الحل.	2
درجة جزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير تام. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
لا درجة: لا توجد إجابة أو أنها غير منطقية.	0

اقرأ المسألة بعناية. لقد أعطيت مجموعة تحويلات هندسية متعاقبة لنقطة في المستوى الإحداثي، وتعلم إحداثيات الصورة النهائية لهذه النقطة، وطلب إليك أن تجد الإحداثيات الأصلية. حُلّ المسألة بالعمل عكسيًّا؛ تراجع عن كل تحويل هندسي بترتيب عكسي؛ كي تجد الإحداثيات الأصلية.

مثال للإجابة التي تستحق درجتين:

> النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تمدد ← النتيجة النهائية.
> ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحُلّ عكسيًّا.
> للتراجع عن التمدد الذي معامله 0.5 ، نفّذ تمددًا معامله 2 :
> $(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$
> للتراجع عن الانعكاس الأول، أوجد صورة النقطة بالانعكاس حول المحور x :
> $(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$
> وللتراجع عن الإزاحة الأولى نفّذ إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى أسفل و8 وحدات إلى اليمين:
> $(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$
> إذن الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة هي $(6, 4)$.

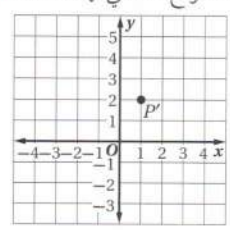
لقد كانت الخطوات والحسابات والتبريرات كلها واضحة في هذه الإجابة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، ولذلك تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

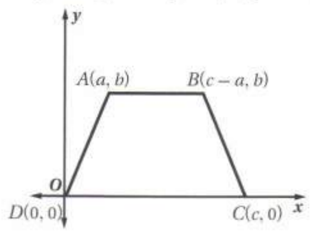
حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، سوف تصحح الإجابات وتحدد الدرجة المستحقة باستعمال سلم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين. ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(-1, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟ **$(5, -3)$**

2) تظهر في الشبكة الإحداثية الآتية الصورة النهائية لنقطة تم تدويرها بزاوية $90°$ باتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2 ، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟ **$(-1, -3)$**



3) الشكل $ABCD$ هو شبه منحرف متطابق الساقين .



أي مما يأتي إحداثيات أحد طرفي القطعة المتوسطة للشكل $ABCD$؟ **B**

A $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ **C** $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

B $\left(\frac{2c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ **D** $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

4) إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم $108°$، فما اسم هذا المضلع؟ **H**

F ثماني **H** خماسي

G سداسي **J** مثلث

مثال إضافي

1 تدريب على اختبار معياري: يستعمل زياد برمجية هندسية للتدريب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي. فبدأ من نقطة ما و سحبها 3 وحدات إلى الأسفل و 5 وحدات إلى اليمين ثم أجرى انعكاسًا للصورة الناتجة في المحور y وأخيرًا نفّذ تمددًا للصورة الثانية معامله 3 فكانت الصورة النهائية عند $(6, 6)$. ما إحداثيات النقطة الأصلية؟ **$(-7, 5)$**

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1 لتقويم فهم الطلاب.

الفصل 7 الإعداد للاختبارات المعيارية 169

تشخيص أخطاء الطلاب

أوجد أخطاء الطلاب عن كل سؤال؛ قد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A انعكاس حول المستقيم $y = x$
B تخمين
C انعكاس حول المحور x
D الإجابة الصحيحة

2) F الإجابة الصحيحة
G إزاحة إلى الأسفل
H تتضمن دورانًا
J تتضمن دورانًا

3) A تخمين بالنظر
B خطأ حسابي
C الإجابة الصحيحة
D خطأ حسابي

4) F استعمال تعريف خطأ
G استعمال تعريف خطأ
H الإجابة الصحيحة
J استعمال تعريف خطأ

5) A تخمين
B تخمين
C تخمين
D الإجابة الصحيحة

6) F قيمة x
G خطأ حسابي
H خطأ حسابي
J الإجابة الصحيحة

7) A الإجابة الصحيحة
B لم يعتبر كون الأضلاع المتطابقة متتالية
C لم يعتبر كون الأضلاع المتطابقة متتالية
D تخمين

الفصل 7 اختبار معياري
تراكمي، الفصول 1-7

أسئلة الاختيار من متعدد

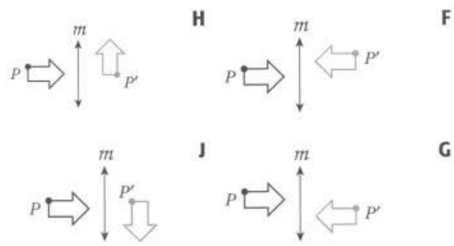
اقرأ كل سؤال مما يأتي ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

1) إحداثيات النقطة N هي $(-3, 4)$. ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y ؟ **D**

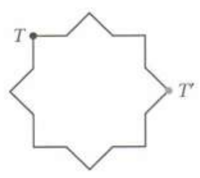
A $N'(-3, 4)$ **C** $N'(4, 3)$

B $N'(-4, 3)$ **D** $N'(-4, -3)$

2) أي الأشكال الآتية يبيّن نتيجة الانعكاس حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟ **F**



3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي حول مركزه حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T' ؟ **C**



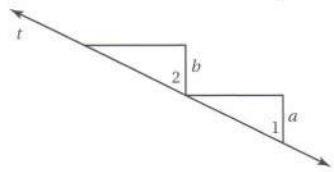
A 90° **C** 135°

B 120° **D** 145°

إرشادات للاختبار

السؤال 3: كم رأسًا لهذه النجمة؟ اقسم °360 على عدد الرؤوس لإيجاد زاوية الدوران من نقطة إلى النقطة التالية.

4) المعطيات: $a \parallel b$



أي العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟ **H**

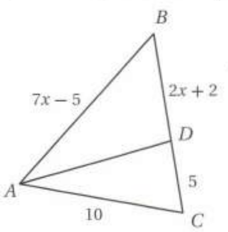
F إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان.

G إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

H إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة.

J إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان.

5) في $\triangle ABC$، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$. ماقيمة x ؟ **D**



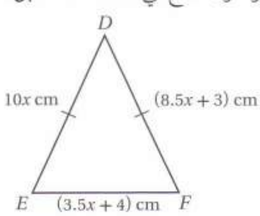
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أي ما يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟ **J**



F 2 cm **H** 9 cm

G 8 cm **J** 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟ **A**

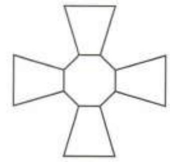
A شكل الطائرة الورقية **C** المعين

B متوازي الأضلاع **D** شبه المنحرف

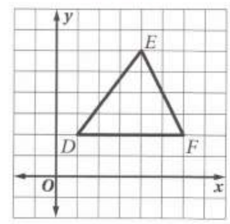
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة. نعم؛ الرتبة 4، المقدار 90. انظر إجابات الطلاب

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



9) مثِّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5. انظر الهامش .



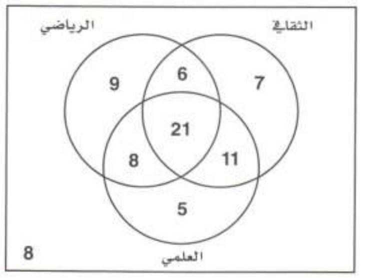
10) أكمل العبارة الآتية: انظر الهامش .

"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية فإنها ....

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟ $(1, 2)$

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟ $108°$

13) إجابة شبكية : سُئل 75 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومثلت النتائج بشكل فن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين الثقافي والعلمي ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟ 11

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.
(14a–e) انظر الهامش .

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه $Q(2, 2)$, $R(-2, 4)$, $S(-3, -3)$, $T(3, -4)$. ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.

d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.

e) فسّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة دون استعمال المستوى الإحداثي.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	7–1	7–4	7–3	2–1	6–4	3–1	5–6	7–5	7–6	4–1	7–2	5–1	1–2	7–3

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدم الطلاب في الفصل 7 من خلال:

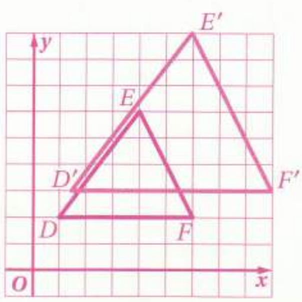
- اختبار معياري تراكمي: ص (170, 171)
- اختبار تراكمي، ص (62–64)

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 8: حدِّد الأسئلة ص (173) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات :

9)

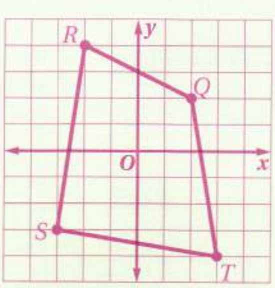


10) إجابة ممكنة: تكون على بعدين متساويين عن ضلعي الزاوية.

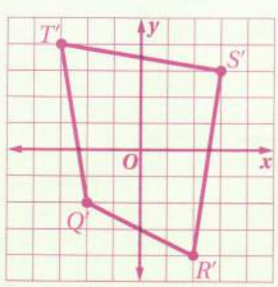
14a) على أحمد أن يقوم بتدوير الشكل $QRST$ بزاوية قياسها $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ليصبح الشمال في الأعلى والمحافظة على اتجاه النقاط.

14b) سيضع الانعكاس الشمال أعلى الرسم لكنه سيغير اتجاه النقاط، لذا لا يصلح إلا الدوران.

14c)



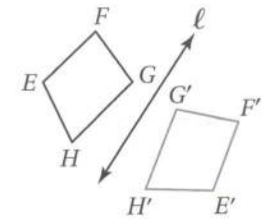
14d)



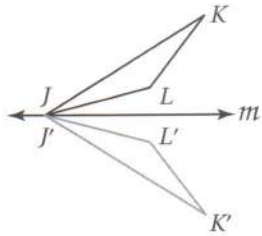
14e) لإيجاد إحداثيي كل نقطة بعد دوران $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، يمكن استعمال القاعدة التالية:
$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ ، لذا،
فالنقطة $Q(2, 2)$ تصبح $Q'(-2, -2)$،
والنقطة $R(-2, 4)$ تصبح $R'(2, -4)$ ،
والنقطة $S(-3, -3)$، تصبح $S'(3, 3)$ ،
والنقطة $T(3, -4)$ تصبح $T'(-3, 4)$.

الصفحة 115، الدرس 1-7 (تحقق من فهمك)

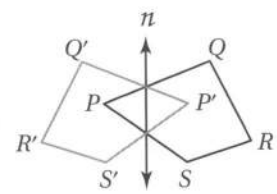
(1A



(1B

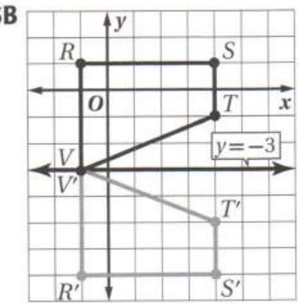


(1C

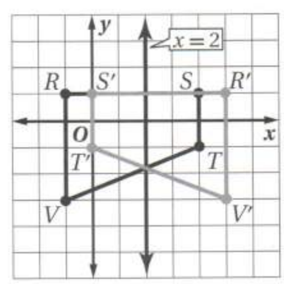


الصفحة 118، الدرس 1-7 (تحقق من فهمك)

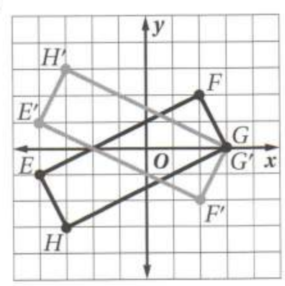
(3A



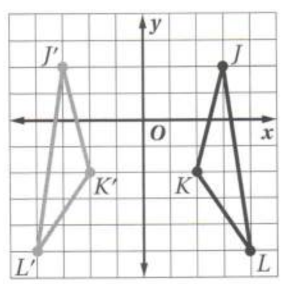
(3B



(4A

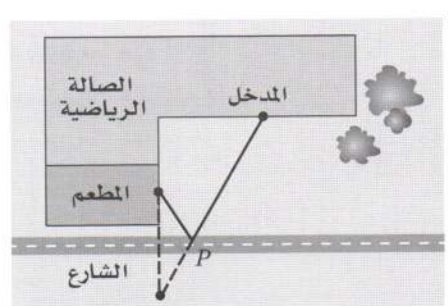


(4B

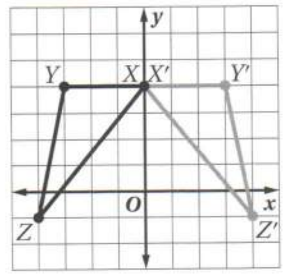


الصفحات 120–123، الدرس 1-7

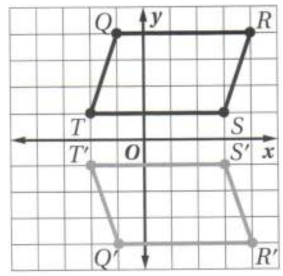
4) إجابة ممكنة:



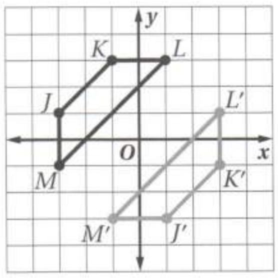
(7



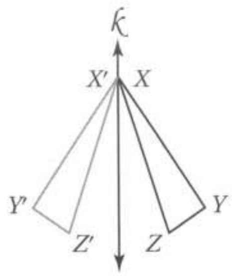
(8



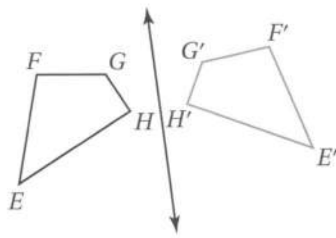
(9



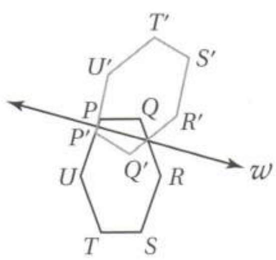
(10



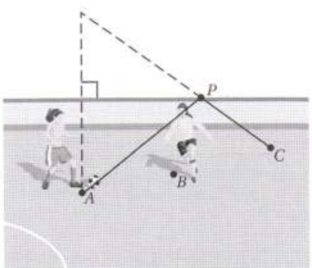
(11



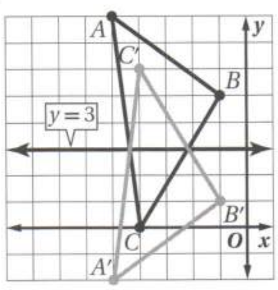
(12



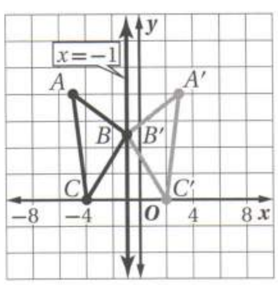
(13



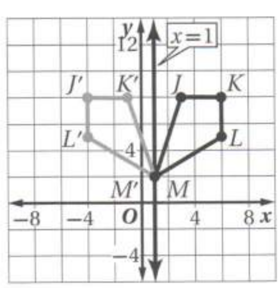
(14



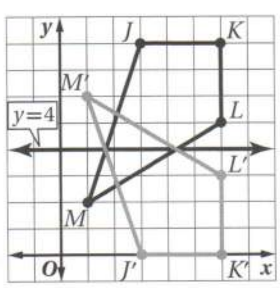
(17



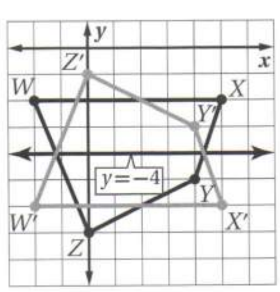
(15



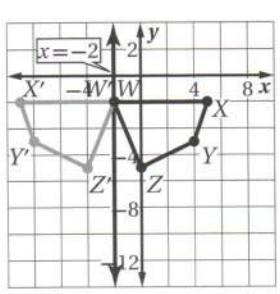
(18



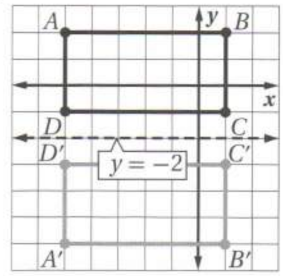
(16



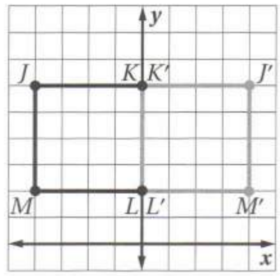
(19



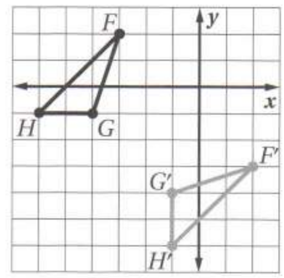
(20



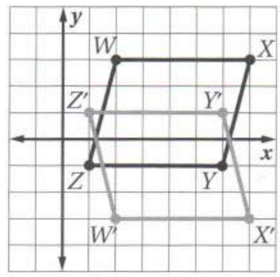
(21



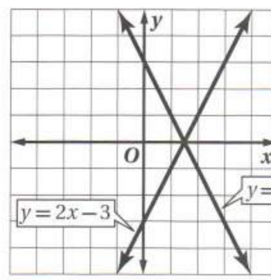
(22



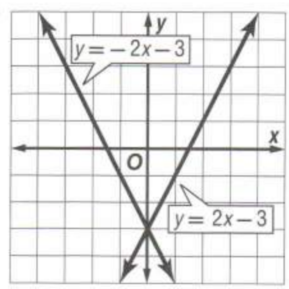
(23



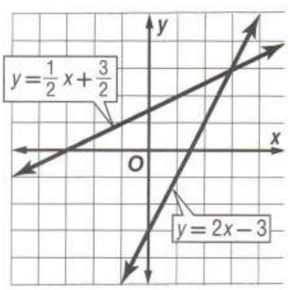
(28



(29

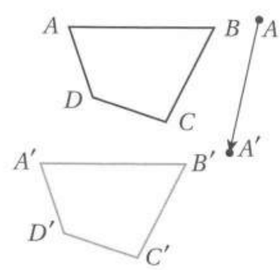


(30

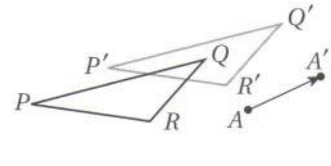


الصفحتان 124–125 الدرس 7-2 (تحقق من فهمك)

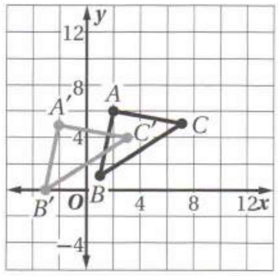
(1B



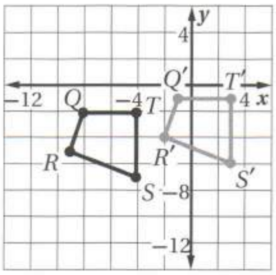
(1A



(2A

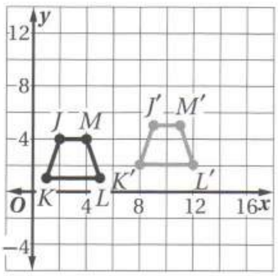


(2B

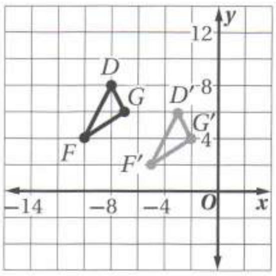


الصفحات 127–129، الدرس 7-2

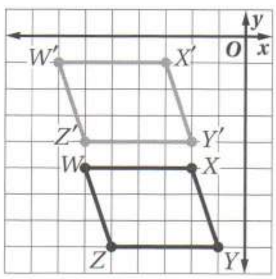
(4



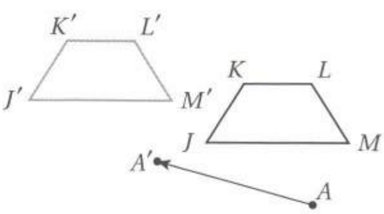
(5



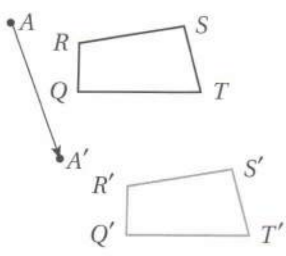
(6



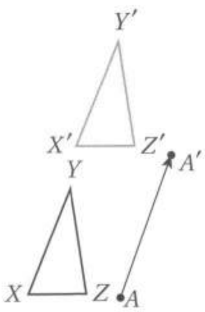
(8



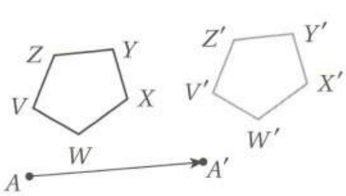
(9



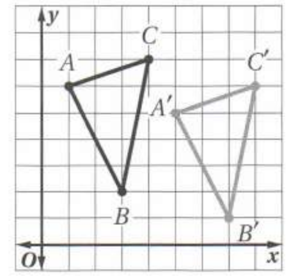
(11



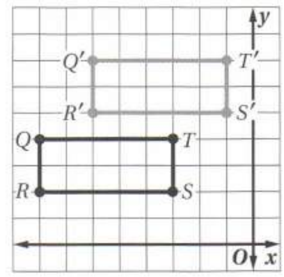
(10



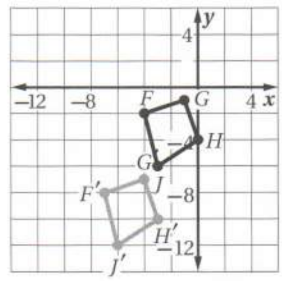
(11



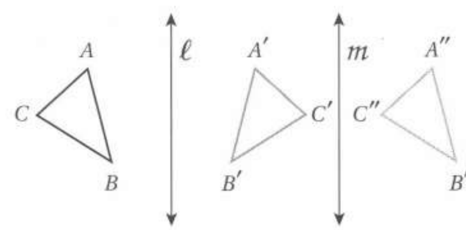
(12



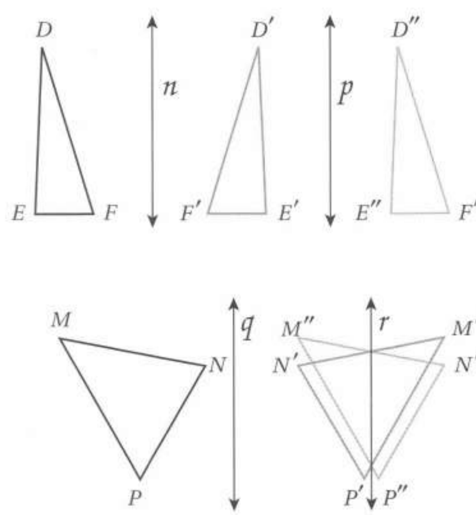
(13



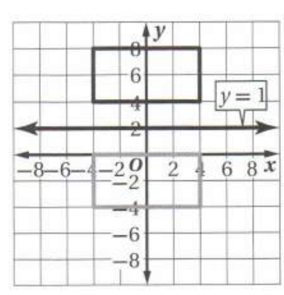
(20a



(20b



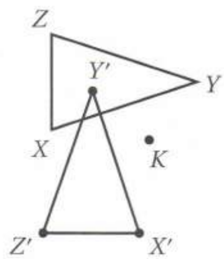
(23



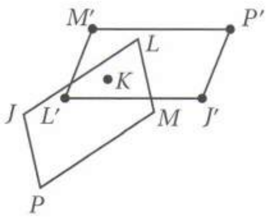
إجابة ممكنة: حتى يبقى الشكل بعد الانعكاس على هيئته نفسها يجب أن ينطبق نصفاه على بعضهما تمامًا عند طيه أفقيًا نصفين.

الصفحات 136–134، الدرس 3-7

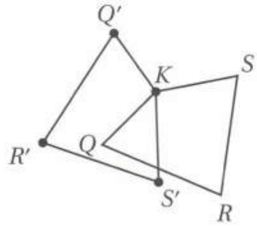
(5



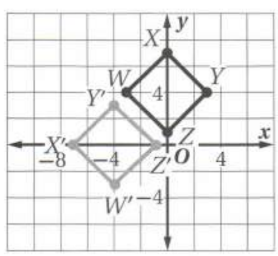
(6



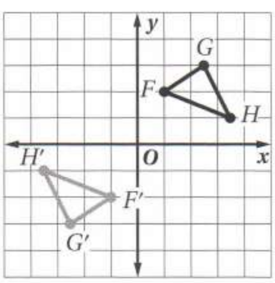
(7



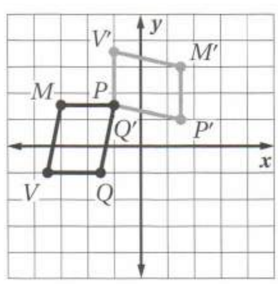
(8



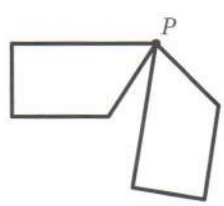
(9



(10

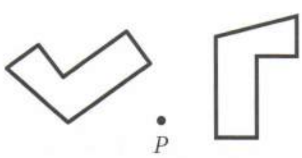


(11



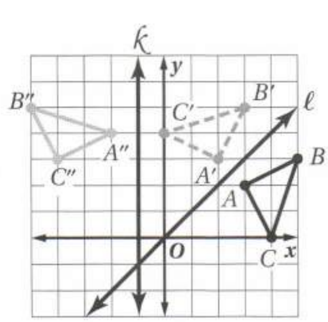
80°

(12

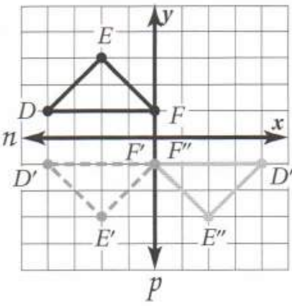


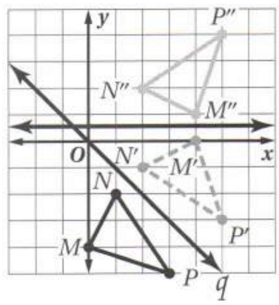
125°

(21a



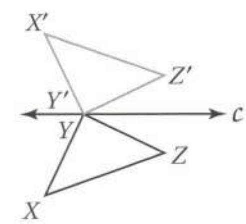
(21b



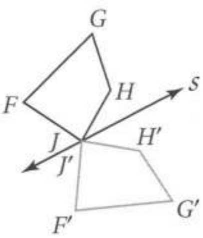


الصفحة 137، اختبار منتصف الفصل

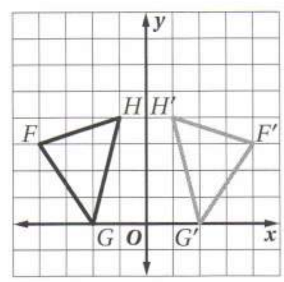
(1



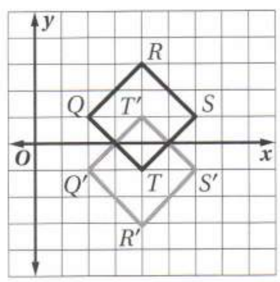
(2



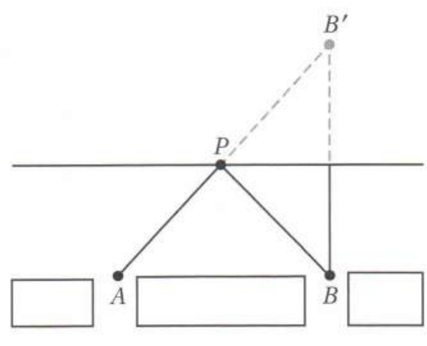
(3



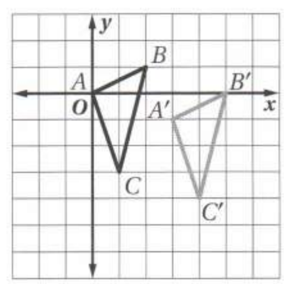
(4



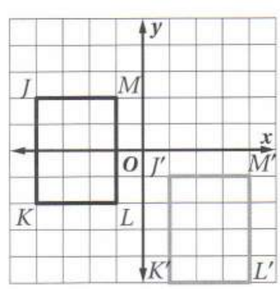
(5



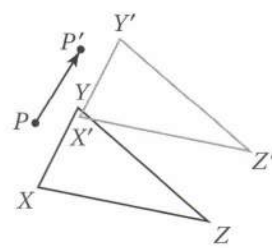
(6



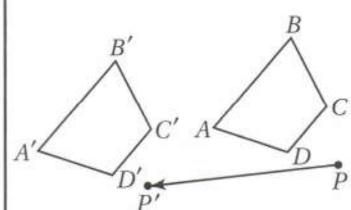
(7



(8

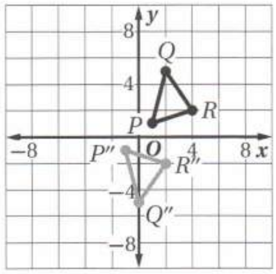


(9

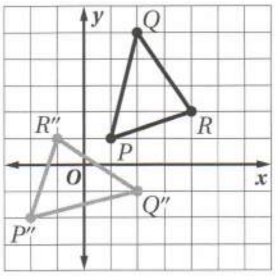


الصفحة 139، الدرس 7-4 (تحقق من فهمك)

(1A

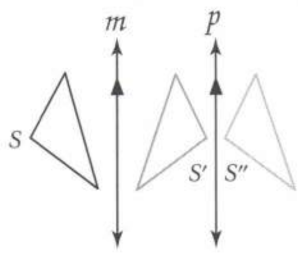


(1B



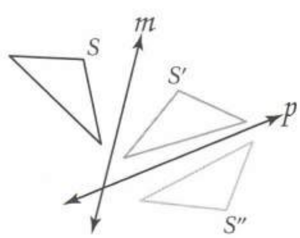
الصفحة 146–143 الدرس 7-4

(4



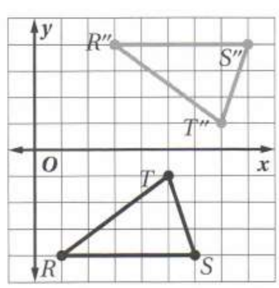
إزاحة أفقية بمقدار 3 بوصات إلى اليمين.

(5

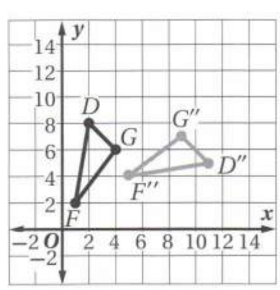


دوران بزاوية °100 حول نقطة تقاطع المستقيمين m و p

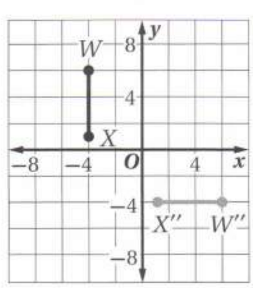
(7



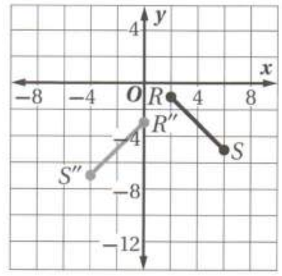
(8



(9



(10



26) **البرهان:**

العبارات (المبررات):

1) ينقل الانعكاس حول المستقيم p النقطة B إلى B'؛ وينقل الانعكاس حول المستقيم q النقطة B' إلى B''؛ وبما أن $p \parallel q$؛ فإن $\overleftrightarrow{BB'}$ يعامد كلًّا من المستقيمين p, q أي أن B, B', B'' واقعة على استقامة واحدة. ومن تعريف الانعكاس نعلم أن A نقطة منتصف $\overline{BB'}$ و $\overline{B'B''}$، إذن $\overline{BA} \cong \overline{AB'}$; $\overline{B'D} \cong \overline{DB''}$ أي أن $BA = AB'; B'D = DB''$ حسب تعريف التطابق، ولكن $BB'' = BA + AB' + B'D + DB''$ حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض

$$BB'' = AB' + AB' + B'D + B'D$$

$$BB'' = 2\,AB' + 2\,B'D$$

$$BB'' = 2(AB' + B'D)$$

وبما أن $AB' + B'D = x$ فإن $BB'' = 2x$

27) **البرهان:** نعلم أن المستقيمين ℓ و m يتقاطعان في النقطة P. وأن النقطة A لا تقع على أي من المستقيمين ℓ أو m. عيّن A' صورة النقطة A بانعكاس حول المستقيم m وعيّن A'' صورة A' بانعكاس حول المستقيم ℓ. ومن تعريف الانعكاس يكون المستقيم m العمود المنصف للقطعة $\overline{AA'}$ عند النقطة R، ويكون المستقيم ℓ العمود المنصف للقطعة $\overline{A'A''}$ عند النقطة S. $\overline{AR} \cong \overline{A'R}$ و $\overline{A'S} \cong \overline{A''S}$ من تعريف العمود المنصف، وبما أنه يوجد مستقيم واحد يمر بأي نقطتين فيمكن أن ترسم القطع المساعدة $\overline{AP}, \overline{A'P}, \overline{A''P}$ وإن الزوايا $\angle ARP, \angle A'RP, \angle A'SP$ و $\angle A''SP$ زوايا قائمة من تعريف العمود المنصف. وكذلك $\overline{RP} \cong \overline{RP}$ و $\overline{SP} \cong \overline{SP}$ حسب خاصية الانعكاس. إذن. $\triangle ARP \cong \triangle A'RP$ و $\triangle A'SP \cong \triangle A''SP$ حسب مسلمة التطابق SAS. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن $\overline{AP} \cong \overline{A'P}$, $\overline{A'P} \cong \overline{A''P}$ ولذلك $\overline{AP} \cong \overline{A''P}$ حسب خاصية التعدي. ومن تعريف الدوران فإن A'' هي صورة A بدوران مركزه P.

وكذلك $\angle APR \cong \angle A'PR$ و $\angle A'PS \cong \angle A''PS$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. ومن تعريف التطابق يكون $m\angle APR = m\angle A'PR,\ m\angle A'PS = m\angle A''PS$ لكن

$$m\angle APA'' = m\angle APR + m\angle A'PR + m\angle A'PS + m\angle A''PS$$

و $m\angle A'PS + m\angle A'PR = m\angle SPR$ حسب مسلّمة جمع الزوايا إذن

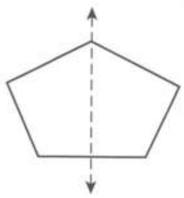
$$m\angle A'PS + m\angle A'PS + m\angle A'PR + m\angle A'PR = m\angle APA''$$

بالتعويض وهذا يعني أن $m\angle APA'' = 2(m\angle A'PR + m\angle A'PS)$.

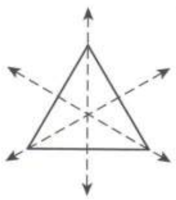
بالتعويض ينتج أن $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$.

الصفحتان 151 ,150، الدرس 5-7 (تحقق من فهمك)

1B) نعم؛ 1



1C) نعم؛ 3

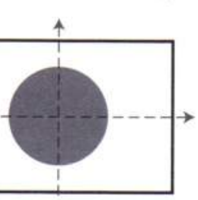


2A) نعم؛5؛ $72° = 5 \div 360°$

2B) نعم؛ 8؛ $45° = 8 \div 360°$

الصفحة 153، الدرس 5-7

9) نعم؛4



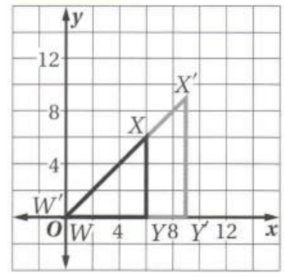
10) نعم؛6

11) نعم؛ 2

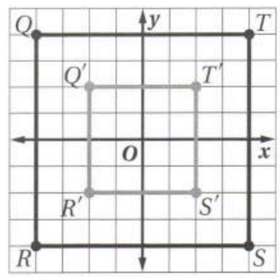
12) نعم؛ 2

الصفحات 159–162، الدرس 7-6

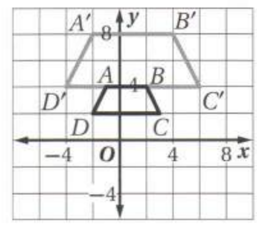
(5



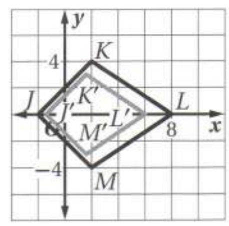
(6



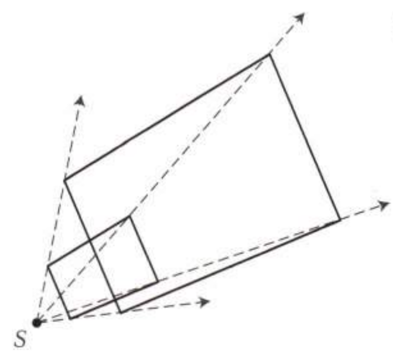
(7



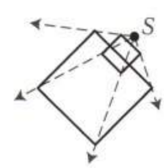
(8



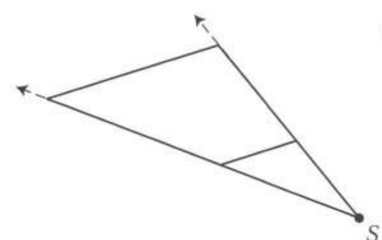
(9



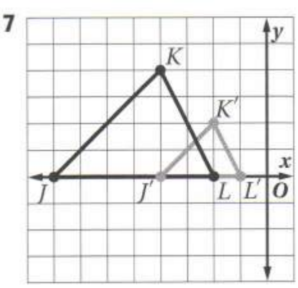
(10



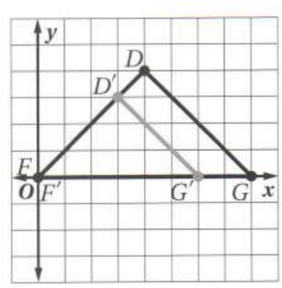
(11



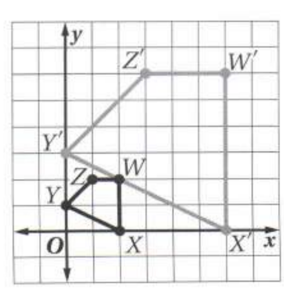
(16



(17

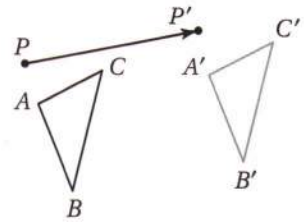


(18

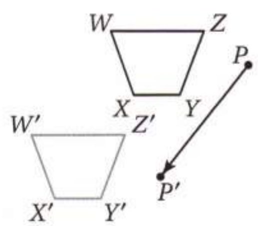


الصفحة 167، اختبار الفصل

(12



(13



الفصل 8

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (173)

	الدرس 8-1 حصتان	الدرس 8-2 حصتان	الدرس 8-3 حصتان	الدرس 8-4 حصتان
العنوان	**الدائرة ومحيطها**	**قياس الزوايا والأقواس**	**الأقواس والأوتار**	**الزوايا المحيطية**
الاهداف	• تعرُّف عناصر الدائرة واستعمالها . • حل مسائل تتضمن محيط الدائرة.	• تعيين الزاوية المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ونصف الدائرة وإيجاد قياسها. • إيجاد طول القوس.	• تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار واستعمالها . • تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار واستعمالها.	• إيجاد قياسات الزوايا المحيطية. • إيجاد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.
المفردات	الدائرة المركز نصف القطر الوتر القطر الدوائر المتطابقة الدوائر المتحدة في المركز محيط الدائرة باي(π) مُحاط بدائرة الدائرة المحيطة	الزاوية المركزية القوس القوس الأصغر القوس الأكبر نصف دائرة الأقواس المتطابقة الأقواس المتجاورة طول القوس		الزاوية المحيطية القوس المقابل
التمثيلات المتعددة	ص (179)	ص (188)		ص (203)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (175)	السبورة التفاعلية، ص (183)	السبورة التفاعلية، ص (191)	انترنت، ص (200)
تنويع التعليم	ص (176, 177)	ص (187, 185, 188)	ص (196)	ص (198, 199, 203)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (204)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(17) حصة	(4) حصص	(21) حصة

الدرس 8-5 حصتان	الدرس 8-6 حصتان	الدرس 8-7 حصتان	استكشاف 8-8 حصة واحدة	الدرس 8-8 حصتان
المماسات	**القاطع والمماس وقياس الزوايا**	**قطع مستقيمة خاصة في الدائرة**	**معمل الحاسبة البيانية : معادلة الدائرة**	**معادلة الدائرة**
• استعمال خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة. • حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.	• إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها. • إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.	• إيجاد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة. • إيجاد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.	• استعمال TI-nspire لاستكشاف معادلة الدائرة.	• كتابة معادلة الدائرة • تمثيل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.
المماس نقطة التماس المماس المشترك	القاطع			المحل الهندسي المركب
	ص (218)			ص (231)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (24) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (25) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (26) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الحاسبة البيانية TI-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (27) دون ضمن فوق
مدونة، ص (208)	تسجيل مرئي، ص (215)	مدونة، ص (223)		السبورة التفاعلية، ص (228)
ص (207, 208)	ص (213, 214, 219)	ص (221, 222)		ص (229, 231)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (232-236)
- اختبار الفصل، ص (237)

الفصل 8

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 8**	
	التهيئة للفصل 8 ، ص (173)	مخطط المعالجة، ص (173)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص(68, 69) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 8-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(204) اختبار منتصف الفصل، ص(70) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 8-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(232-236) اختبار الفصل، ص(237) اختبار معياري تراكمي، ص(240, 241) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 8-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 8**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(72-77) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(78-79) اختبار المفردات ، ص(71) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(80) الاختبار التراكمي (الفصول 8-1) ، ص(81-83) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون / التفاعليون: ارسم دوائر كبيرة على أرضية مواقف السيارات أو على أيّ منطقة سوداء اللون في ساحات المدرسة. ولرسم دائرة مكتملة اربط طبشورة بحبل واطلب إلى أحد الطلاب الإمساك بالحبل جيدًا وتثبيته عند نقطة تمثل مركز الدائرة. ويمسك طالب آخر الطبشورة في الطرف الآخر للحبل ويتحرك بشكل دائري محافظًا على الحبل مشدودًا.

إذا كان بالإمكان ارسم عدة دوائر. وسمها A, B, C, D وهكذا. اطلب إلى الطلاب العمل معًا لإيجاد محيط كل دائرة. يدوّن الطلبة نتائجهم على أوراق مثبتة على لوح صغير. واطلب إليهم عرض نتائجهم والإستراتيجيات التي استعملوها أمام زملائهم عند عودتهم إلى غرفة الصف.

المتعلمون الحركيون / المنطقيون: هيّء للطلاب فرصة ليس لرسم دائرة باستعمال الفرجار فقط، وإنما لفهم تعريف الدائرة من خلال استعماله. واطلب إليهم أن يكونوا مبدعين ويفكروا في أدوات يمكن استعمالها لرسم دائرة تامة دون استعمال الفرجار. واطلب إليهم استعمال هذه الأدوات قبل بداية الفصل ووضع تعريف خاص بهم لمصطلح الدائرة.

البديل 2 دون المتوسط دون

نظّم الطلاب في مجموعات صغيرة متفاوتة القدرات. استعمل لوحًا من الفلّين، ودبابيس، ودوائر مقصوصة وحلقات مطاطية لنمذجة الزوايا المحيطية. ضع الدائرة على لوح الفلّين وضع عليها الدبّوسين لتمثيل طرفي القوس المحدود بالزاوية المحيطية ثم قم بلَفّ حلقة المطاط حول الدبّوسين ثم استعمل قلم الرصاص واسحب حلقة المطاط إلى الجهة المقابلة من الدائرة لتمثيل رأس الزاوية المحيطية. يمكن للطلاب تحريك القلم على الدائرة واستعمال المنقلة لقياس الزاوية في كل مرة، سيجدون أن قياس الزاوية يبقى ثابتًا.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب رسم دائرة على قطعة من الورق باستعمال قرص مدمج. ثم اطلب إليهم وضع مسطرتين بمحاذاة الدائرة من أجل تمثيل مماسين. واطلب إليهم تقريب المسطرتين بحيث تتقاطعان خارج الدائرة مع بقائهما مماسين لها، وأن يرسموا المماسين من نقطة التقاطع إلى الدائرة وأن يقيسوا المسافتين من الدائرة إلى نقطة التقاطع لإثبات أن القياسين متساويان.

قراءة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

عندما تبدأ بتدريس درس أو فصل جديد، من المفيد للطلاب أن يكملوا جدولًا مثل الجدول المجاور. اطلب إليهم أن يتصفحوا الدرس بشكل سريع وملاحظة الأهداف والمفردات لتكوين فكرة عمّا سيدرسونه. ثم بعد ذلك اطلب إليهم تدوين ما يعرفونه وما يرغبون أو يتوقعون أن يتعلموه. وبعد انتهائهم من دراسة الدرس، اطلب إليهم إجراء أي تصويبات لمحتويات عمود "ما أعرفه" وتسجيلها في عمود "ما تعلمته"، بالإضافة إلى الإجابات عن أسئلة "ما أريد أن أعرفه".

يحتوي الجدول على المعلومات التي سجلها الطالب قبل دراسة الدرس 1-8 وبعدها حول الدائرة ومحيطها

ما أعرفه	ما أريد أن أعرفه	ما تعلمته
• يوجد للدائرة مركز. • تسمّى المسافة بين المركز ونقطة على الدائرة نصف القطر (r). • القطر هو المسافة عبر الدائرة مرورًا بالمركز ويساوي $2r$. محيط الدائرة يساوي πd^2، حيث $\pi = 3.14$. • أعتقد أن الوتر هو جزء من الدائرة. • الدائرة تتكون من $360°$.	ما الفرق بين محاط بدائرة والدائرة المحيطة؟	• وجدت أن $C = \pi d$ وليس πd^2. الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة. ولكنه ليس جزءاً من الدائرة. • تقع الدوائر المتحدة في المركز في المستوى نفسه ولها المركز نفسه. • المثلث مُحاط بدائرة. والدائرة تحيط بالمثلث.

يسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 8

- تقريب قيمة الأعداد غير النسبية أينما وردت (مثل $\sqrt{2}$، π).
- التعبير عن الأفكار الرياضية باستعمال اللغة والأدوات الفعّالة والوحدات المناسبة والتمثيل البياني أو العددي أو الماديّ أو النماذج الجبرية.

الفصل 8

موضوعات ذات علاقة من الهندسة

- إيجاد مساحة القِطاعات الدائرية وأطوال الأقواس في الدائرة باستعمال التبرير التناسبي .
- استعمال الأنماط العددية والهندسية لصياغة تعميمات حول الخصائص الهندسية التي تتضمن خصائص علاقات الزوايا في الدائرة.

مابعد الفصل 8

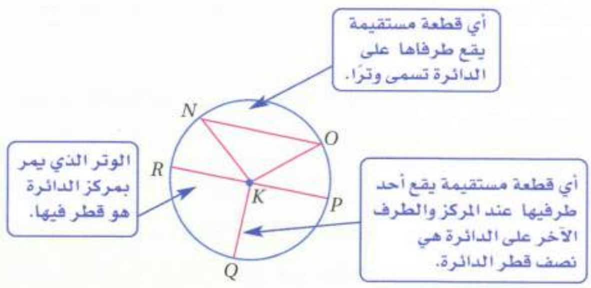
الإعداد للجبر 2

- استعمال خصائص الدالة التربيعية المولدة (الأم) لرسم الدوال المرتبطة بها. والربط بين صورتي الدالة التربيعية الآتيتين: $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x-h)^2 + k$.
- استعمال الدالة التربيعية المولدة (الأم) لاستقصاء ووصف وتوقع تأثير التغيير في قيم a, h, k على منحنى الدالة التربيعية $y = a(x-h)^2 + k$ في المواقف الرياضية البحتة والتطبيقية .

ملخص الدروس

8-1 الدائرة ومحيطها

الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة في المستوى والتي تبعد مسافات متساوية عن نقطة معطاة تُسمى المركز. وتُسمى الدائرة بمركزها. وأي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة تسمى وترًا. والوتر الذي يمر بالمركز يكون قطرًا للدائرة، وأي قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها في مركز الدائرة والطرف الآخر على الدائرة تُسمى نصف قطر لها. وأنصاف أقطار الدائرة الواحدة جميعها متطابقة وكذلك أقطارها.



محيط الدائرة هو طول الخط الممثل للدائرة، والنسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها تساوي دائمًا π. فللدائرة التي محيطها C وحدة وطول قطرها d وحدة، وطول نصف قطرها r وحدة، يكون $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$.

8-2 قياس الزوايا والأقواس

الزاوية المركزية في دائرة هي زاوية رأسها مركز الدائرة، وضلعاها يحويان نصفا قطرين في الدائرة. ومجموع قياسات الزوايا المركزية للدائرة، والتي لا تحوي نقاطاً داخلية مشتركة بينها، يساوي $360°$. والزاوية المركزية تقسم الدائرة إلى قسمين، يُسمى كل قسم قوسًا. وقياس كل من هذين القوسين يرتبط بقياس زاويته المركزية. فقياس القوس الأصغر بالدرجات يساوي قياس زاويته المركزية ويكون أقل من $180°$.

وقياس القوس الأكبر بالدرجات يساوي 360 مطروحًا منه قياس القوس الأصغر، ويكون قياس القوس الأكبر أكبر من $180°$. يمكن اعتبار نصف الدائرة قوسًا قياسه $180°$.

وفي الدائرة نفسها أو الدوائر المتطابقة، يكون القوسان متطابقين "إذا وفقط إذا" كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.

وفي التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية، تقسم الزوايا المركزية الدائرة إلى قطاعات لتمثيل بيانات معينة، تُمثَّل عادةً بنسب مئوية. وقياس الزاوية المركزية يتناسب مع النسبة المئوية الممثلة لها. ويمكن إيجاد قياس الزاوية المركزية بضرب نسبتها المئوية في $360°$. وهناك طريقة أخرى لإيجاد قياس القوس وهي بحساب طوله. وبما أن القوس هو جزء من الدائرة فإن طول هذا القوس هو جزء من محيطها.

والنسبة بين قياس القوس بالدرجات إلى 360 يساوي النسبة بين طول القوس إلى محيط الدائرة. ويمكن استعمال هذه النسبة لإيجاد طول القوس.

الدائرة

8-3 الأقواس والأوتار

في أي دائرة، يكون طرفا وتر فيها هما طرفي قوس أيضًا.

ويرتبط الوتر والقوس بعلاقة خاصة.

ففي الدائرة نفسها أو الدوائر المتطابقة، يكون القوسان الأصغران متطابقين "إذا وفقط إذا" كان الوتران المناظران لهما متطابقين، ويكون الوتران متطابقين "إذا وفقط إذا" كانا على بعدين متساويين من مركز الدائرة.

ويمكن أن تكوّن الأوتار للأقواس المتجاورة مضلعًا. وهذا النوع من المضلعات يُسمى مضلعًا محصورًا داخل دائرة، وذلك لأن رؤوسه تقع على الدائرة. وفي هذه الحالة يقال إن الدائرة تحيط بهذا المضلع.

وينتج عن الأقطار المتعامدة مع الأوتار علاقات بين القطع المستقيمة الخاصة والأقواس. ففي الدائرة، إذا كان القطر أو نصف القطر عموديًّا على وتر، فإنه ينصّف ذلك الوتر وقوسه.

8-4 الزوايا المحيطية

الزاوية المحيطية في دائرة هي زاوية يقع رأسها على تلك الدائرة، وضلعاها يحويان وترين في الدائرة. فإذا رُسمت زاوية محيطية داخل دائرة، فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله (أو قياس القوس الذي تقابله يساوي مثلي قياس تلك الزاوية). وإذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة (أو في دوائر متطابقة) قوسين متطابقين أو القوس نفسه، فإن الزاويتين متطابقتان. والمضلع المحصور داخل دائرة له خصائص خاصة أيضاً. فالمثلث المحصور داخل دائرة والذي يكون أحد أضلاعه قطراً في الدائرة هو نوع خاص من المثلثات. وإذا قابلت زاوية محيطية نصف دائرة، فإن قياس هذه الزاوية يساوي $90°$. وإذا رُسم شكل رباعي داخل دائرة، فإن زواياه المتقابلة تكون متكاملة.

8-5 المماسات

يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة فقط تُسمّى نقطة التماس. ومماس الدائرة يكون عمودياً على نصف قطرها المار بنقطة التماس. وعكس هذه العبارة صحيح أيضاً؛ أيْ أن المستقيم العمودي على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقاء نصف القطر مع الدائرة يكون مماسًّا للدائرة عند تلك النقطة. ويمكن أيضاً أن يكون للدائرة الواحدة أكثر من مماس.

القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها متطابقتان. وبما أنه يمكن رسم مضلع داخل دائرة، فإنه يمكن أيضًا رسم دائرة داخل مضلع. وإذا رُسمت دائرة داخل مضلع، فإن أضلاع المضلع تكون مماسات لتلك الدائرة. ويمكنك استعمال ما تعرفه عن المماسات لحل مسائل تتضمن مضلعات تحيط بدائرة.

8-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين بالضبط يُسمى قاطعًا، وإذا تقاطع قاطعان داخل دائرة، فإن الزوايا الناتجة عن التقاطع ترتبط بعلاقة مع الأقواس التي تقتطعها هذه الزوايا. فإذا تقاطع قاطعان داخل دائرة، فإن قياس إحدى الزاويتين الناتجتين من تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية، والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس.

ويمكن أن يتقاطع قاطع مع مماس عند نقطة التماس، وفي هذه الحالة يكون قياس كل من الزوايا الناتجة من التقاطع نصف قياس القوس الذي تحصره. ويمكن أيضاً للماس والقاطع أن يتقاطعا خارج الدائرة، فإذا تقاطع قاطعان، أو مماسان أو مماس وقاطع خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي قطعتي كل وتر يكون متساويًا، ويمكن استعمال الأوتار المتقاطعة لقياس الأقواس أيضًا.

إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

وإذا رُسم قاطع ومماس من نقطة خارج دائرة، فإن مربع طول المماس يُساوي حاصل ضرب طول القاطع في الجزء الخارجي منه.

8-8 معادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r وحدة، هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. ويمكنك تحليل معادلة دائرة لتجد المعلومات التي تساعدك على رسم الدائرة في المستوى الإحداثي. فإذا علمت إحداثيات مركز الدائرة وطول نصف قطرها يمكنك رسم تلك الدائرة في المستوى الإحداثي. وفي الحقيقة إذا علمت ثلاث نقاط على دائرة يمكنك رسمها بيانيًّا وكتابة معادلة تلك الدائرة.

فإذا اعتبرت هذه النقاط الثلاث رؤوس مثلث ورسمت عمودين منصّفين لضلعين من أضلاعه فإن نقطة تقاطعهما تكون مركز الدائرة. وبعدها استعمل قانون المسافة بين نقطتين لحساب طول نصف القطر. وأخيرًا يمكنك كتابة معادلة تلك الدائرة.

الفصل 8 الدائرة
Circle

فيما سبق:
درستُ أنواعًا من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

والآن:
- أتعرّف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أتعرّف القاطع والمماس وأستعملهما.
- أتعرّف الدائرة أو أصفها؛ مستعملاً معادلتها.

لماذا؟
علوم: الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوسًا.

المطويات منظم أفكار

الدائرة: اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 8. مبتدئًا بتسعة أوراق A4 .

1. ارسم دائرة قطرها 18 cm على كل ورقة باستعمال الفرجار.
2. قُصّ هذه الدوائر.
3. ثبّت الأوراق من الجهة اليمنى كما في الشكل.
4. اكتب عنوان الفصل على الورقة الأولى، وأرقام الدروس على بقية الأوراق.

تقديم الفصل

رشاشات الري المحورية

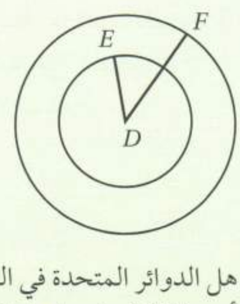
يستعمل الطلبة ما تعلموه عن خصائص الدائرة لرسم دوائر تمثل محاصيل يتم ريّها باستعمال رشاشات محورية.

- تعد الرشاشات المحورية من أهم أنظمة الري الحديثة، حيث يمكن من خلالها ري مساحات كبيرة من الأراضي وبكميات محدودة من المياه.
اطلب إلى الطلبة أن يبحثوا عن تاريخ استعمال هذه التقنية في الزراعة، واسأل:
ما أنواع المحاصيل الزراعية التي تُروى باستعمال الرشاشات المحورية؟
إلى أيّ مدى يصل طول الرشاشات المحورية؟
- اطلب إلى الطلبة رسم دوائر تمثل محاصيل متجاورة ومتفاوتة الأقطار على ورقة مقواة باستعمال القلم والخيط والمسطرة، واسأل:
كيف يمكنك أن تستعمل الخيط والقلم لرسم دوائر بأقطار مختلفة؟ كيف يمكنك استعمال المماسات والمثلثات لتحديد مراكز دوائر جديدة في تصميمك؟
- اطلب إليهم عرض تصاميم دوائر المحاصيل التي رسموها، وتوضيح كيف استعملوا الخصائص الهندسية للدائرة في إنشاء هذا التصميم.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي.

التعريف: الدوائر المتحدة في المركز هي دوائر تقع في المستوى نفسه ولها المركز نفسه.

مثال:



سؤال: هل الدوائر المتحدة في المركز متشابهة أم متطابقة؟ وضح إجابتك.
متشابهة؛ لأن لها الشكل نفسه. ولكن هذه الدوائر ليست متطابقة لأن لها أنصاف أقطار مختلفة.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يكتب الطلاب حول الدوائر والزوايا والمستقيمات المرتبطة بها.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم كما هو موضح، وعنونتها كما هو موضح.

ثم اطلب إليهم تدوين الملاحظات عن الدوائر والزوايا والأقواس والأوتار والمماسات والقواطع و القطع المستقيمة الخاصة بالدائرة. وشجّعهم على تطبيق هذه المفاهيم برسم الأمثلة وتطبيق المفاهيم الرياضية المرتبطة بها.

وقت استعمالها: شجّع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، وأن يُدّعموها برسوم توضيحية لكل مفردة.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66) .
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(يستعمل مع الدرس 8-2)

أوجد النسبة المئوية من العدد المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1) 26% من 500 **130**

2) 79% من 623 **492.17**

3) 19% من 82 **15.58**

4) 10% من 180 **18**

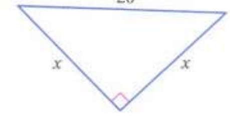
5) 92% من 90 **82.8**

6) 65% من 360 **234**

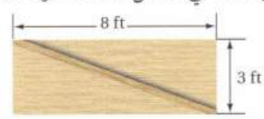
7) **مطاعم:** يُضيف مطعم رسم توصيل قدره 5% على كل طلب. ما رسم خدمة توصيل وجبة غداء سعرها 65 ريالًا؟ **3.25 ريالات**

(يستعمل مع الدرس 8-5)

8) أوجد قيمة x، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عشر. **14.1**



9) **نجارة:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل أدناه. ما طول هذه الدعامة؟ **8.5 ft**



(يستعمل مع الدرس 8-7)

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام مقربًّا إجابتك إلى أقرب عُشر.

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$ **1.6, −2.4**

11) $x^2 = x + 12$ **−3, 4**

12) **ألعاب نارية:** أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني، ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، فارتدت إلى الأرض، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية وصلت سطح الأرض؟ **5 ثوانٍ**

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة 15% من 35 .

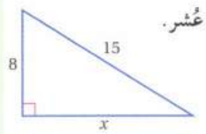
$= (0.15)(35)$ تغيير النسبة إلى كسر عشري

$= 5.25$ بالضرب

إذن 15% من 35 تساوي 5.25 .

مثال 2

أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر.



$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 8^2 = 15^2$ بالتعويض

$x^2 + 64 = 225$ بالتبسيط

$x^2 = 161$ بالطرح

$x = \sqrt{161} \simeq 12.7$

مثال 3

حُلّ المعادلة $x^2 + 3x - 40 = 0$ باستعمال القانون العام مقربًّا إجابتك إلى أقرب عُشر.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$ بالتعويض

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$ بالتبسيط

$= -8$ أو 5 بالتبسيط

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 8

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فقم بمراجعة الطلبة في حساب النسبة المئوية من عدد، وفي تطبيقات نظرية فيثاغورس.

www.obeikaneducation.com

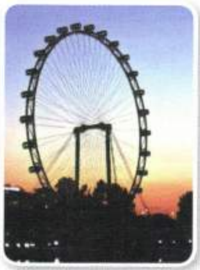
المستوى 2 دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

www.obeikaneducation.com

8-1 الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference



لماذا؟

إذا ركبت العجلة الدوارة، فإن بُعدك عن مركز دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك ومركزها 44 ft، فيمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في دورة واحدة.

فيما سبق:
درستُ عناصر الأشكال الرباعية واستعملتها.

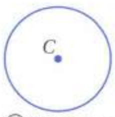
والآن:
- أتعرف عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمن محيط الدائرة.

المفردات:
الدائرة circle
المركز center
نصف القطر radius
الوتر chord
القطر diameter
الدوائر المتطابقة congruent circles
الدوائر المتحدة في المركز concentric circles
محيط الدائرة circumference
باي (π) pi
مُحاط بدائرة inscribed with a circle
الدائرة المحيطة circumscribed

www.obeikaneducation.com

القطع المستقيمة في الدائرة **الدائرة** هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة معلومة تُسمّى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يبين الدائرة C التي يمكن أن يرمز لها بالرمز $\odot C$.

وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.



الدائرة C أو $\odot C$

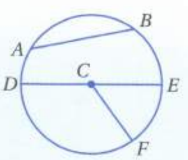
مفهوم أساسي — قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أضف إلى مطويتك

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها في المركز والطرف الآخر على الدائرة.
أمثلة: $\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}$ أنصاف أقطار في $\odot C$.

الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.
أمثلة: $\overline{AB}, \overline{DE}$ وتران في $\odot C$.

القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.
مثال: $\overline{DE}$ قطر في $\odot C$. ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطرين $\overline{CD}, \overline{CE}$ الواقعين على استقامة واحدة.



مثال 1 تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

a) سمِّ الدائرة، وعيّن نصف قطر فيها.

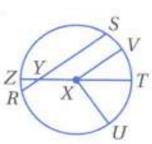
مركز الدائرة هو P؛ إذن يمكن تسميتها الدائرة P، أو $\odot P$. تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي: $\overline{PL}, \overline{PN}, \overline{PM}$.

b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.

يظهر في هذه الدائرة وتران هما: $\overline{HG}$، $\overline{JK}$، ويمر $\overline{HG}$ بالمركز؛ إذن $\overline{HG}$ قطر.

تحقق من فهمك

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها. الدائرة X؛ نصف القطر $\overline{XV}, \overline{XT}, \overline{XU}, \overline{XZ}$؛ الوتر $\overline{RS}, \overline{TZ}$؛ القطر $\overline{TZ}$



مصادر الدرس 8-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (177)	• تنويع التعليم ص (176, 177)	• تنويع التعليم ص (176)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (20)	• كتاب التمارين ص (20)	• كتاب التمارين ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

8- ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

قبل الدرس 8-1
رُّف عناصر متوازي الأضلاع
ستعمالها .

درس 8-1
رُّف عناصر الدائرة واستعمالها .
ل مسائل تتضمن محيط الدائرة.

بعد الدرس 8-1
يين زوايا وأقواس الدائرة وإيجاد
اساتها.

2 التدريس

ئلة التعزيز

ب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ل:

اذا تمثل المسافة الذي يقطعها راكب
عجلة الدوارة في الدورة الواحدة؟
حيط الدائرة

يف يمكننا استعمال العجلة الدوارة
قياس المسافة؟ أوجد محيط العجلة
الدوارة واضربه في عدد الدورات التي
دورها لقطع المسافة المراد قياسها.

يف تُستعمل فكرة قياس المسافة
استعمال العجلة الدوارة في الحياة؟
جابة ممكنة: في جهاز قياس المسافة في
السيارة تستعمل دورات عجلات السيارة
قياس المسافة المقطوعة، ويستعمل
المساحون أيضًا عجلة لقياس المسافة
وهكذا.

ماذا يكون استعمال العجلة في القياس
فضل من القياس باستعمال المتر أو
شريط القياس؟
جابة ممكنة: يكون القياس بالعجلة
متصلًا، أما المتر أو شريط القياس فيجب
رفعه ونقله. ويمكن إيجاد قياسات
المسافات التي يوجد فيها انحناءات
بواسطة العجلة، ولكن القياس بواسطة
شريط القياس أو المتر لا يكون دقيقًا
حول المنحنيات.

قراءة الرياضيات

القطر ونصف القطر
تستعمل الكلمتان: القطر ونصف القطر للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة. وبما أن للدائرة عدة أنصاف أقطار وعدة أقطار أيضًا، فإن قولنا نصف قطر أو قطر يعني القياس، وليس القطعة المستقيمة.

ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأيّ نقطة عليها ثابتة دائمًا؛ إذن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة. وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين؛ فإن أقطار الدائرة جميعها متطابقة.

مفهوم أساسي: العلاقة بين القطر ونصف القطر

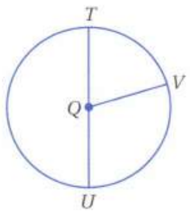
أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d، فإن:

صيغة نصف القطر: $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$

صيغة القطر: $d = 2r$

مثال 2: إيجاد نصف القطر والقطر



إذا كان $QV = 8\,\text{cm}$ فما قطر $\odot Q$؟

$d = 2r$ صيغة القطر

$= 2(8) = 16$ بالتعويض والتبسيط

القطر في $\odot Q$ يساوي $16\,\text{cm}$.

تحقق من فهمك

2A) إذا كان $TU = 14$ ft فما نصف قطر $\odot Q$؟ **7 ft**

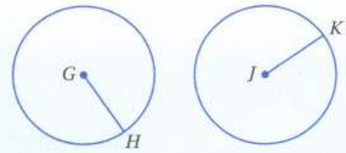
2B) إذا كان $QT = 11$ m فأوجد QU. **11 m**

كما هو الحال في الأشكال الأخرى، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مفهوم أساسي: أزواج الدوائر

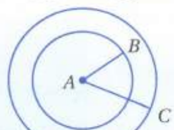
أضف إلى مطويتك

تكون **الدائرتان متطابقتين** إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.



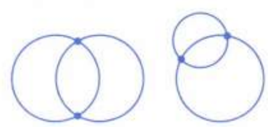
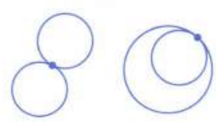
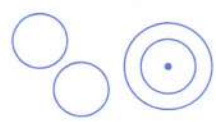
مثال: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$؛ إذن $\odot G \cong \odot J$.

الدوائر المتحدة في المركز هي الدوائر التي تقع في المستوى نفسه، ولها المركز نفسه.



مثال: $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

إذا تقاطعت دائرتان، فيمكن أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين على النحو الآتي:

تقاطع في نقطتين	تقاطع في نقطة واحدة	لا يوجد تقاطع
		

القطع المستقيمة في الدائرة

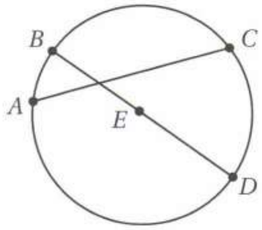
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية تعيين قطع مستقيمة في الدائرة وإيجاد قياساتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال، للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

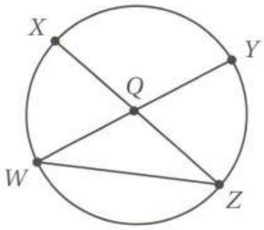
مثال إضافي

1



a) سمِّ الدائرة وعيّن نصف قطر فيها.

الدائرة E أو $\odot E$ يظهر في الشكل نصفا قطرين هما: $\overline{EB}$, $\overline{ED}$



b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.

يظهر في الشكل ثلاثة أوتار هي: $\overline{WY}, \overline{XZ}, \overline{WZ}$
وقطران هما: $\overline{WY}, \overline{XZ}$

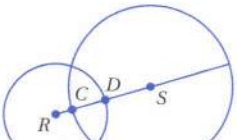
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعليّة: اعرض دائرة على السبورة واستعملها كنموذج لترسم فيها أنصاف أقطار وأقطارًا وأوتارًا.

يمكن أن تحوي القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين نصفَي قطرَي الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين

قطر $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر $\odot R$ يساوي 20 وحدة، و DS يساوي 9 وحدات، أوجد CD.



بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30، فإن $CS = 15$. و $\overline{CD}$ هو جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

$CD + DS = CS$ مسلّمة جمع القطع المستقيمة

$CD + 9 = 15$ بالتعويض

$CD = 6$ بطرح 9 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل أعلاه لإيجاد RC. 4 وحدات

محيط الدائرة: **محيط الدائرة** هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثّل الدائرة، ويرمز له بالرمز C. وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمّى **باي (π)**. ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

$\frac{C}{d} = \pi$ تعريف π باي

$C = \pi d$ بضرب كلا الطرفين في d

$C = \pi(2r)$ $d = 2r$

$C = 2\pi r$ بالتبسيط

مفهوم أساسي محيط الدائرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان قطر الدائرة يساوي d أو نصف قطرها يساوي r، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π أو مثلي نصف القطر في π.

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من واقع الحياة إيجاد محيط الدائرة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط مع الحياة المجاورة.

$C = \pi d$ صيغة محيط الدائرة

$= \pi(79)$ بالتعويض

$= 79\pi$ بالتبسيط

≈ 248.19 باستعمال الحاسبة

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm   15.71 cm

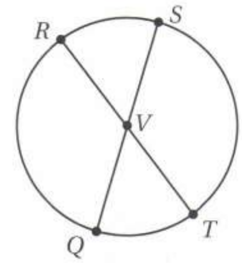
4B) القطر يساوي 16 ft   50.27 ft

الربط مع الحياة

أقيمت في عام 2005 م مباراة دولية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق قمة فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة. ويرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريبًا عن سطح الأرض، وقطره 79 ft.

مثالان إضافيان

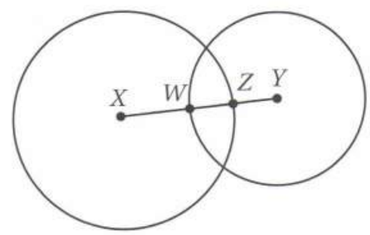
1 إذا كان $RT = 21$ cm، فأوجد طول $\overline{QV}$؟



10.5 cm

2 إذا كان قطر $\odot X$ يساوي 22 وحدة، وقطر $\odot Y$ يساوي 16 وحدة، وطول WZ يساوي 5 وحدات، فأوجد XY.

14 وحدة



محيط الدائرة

محيط الدائرة هو المسافة حول الدائرة. **الأمثلة 4-6** تبيّن كيفية إيجاد محيط الدائرة واستعماله.

مثال إضافي

4 **زراعة:** أوجد محيط حقل قمح دائري الشكل، يُروى بواسطة رشاش محوري نصف قطره يساوي 30 ft.

188.50ft تقريبًا.

تنبيه!

القطر أو نصف القطر: في المسائل التي تتضمن الدوائر، انتبه جيدًا ما إذا كانت المعطيات تتعلق بنصف قطر الدائرة أم بقطرها.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال الآتي: ضرب أحد الكويكبات سطح الأرض فأحدث فجوة ضخمة ذات فوّهة دائرية. قاس العلماء المسافة حول هذه الفوّهة فكانت 126.3 km. أوجد قطر هذه الفوّهة.

40 km تقريبًا

إرشادات للدراسة

مستويات الدقة
بما أن π عدد غير نسبي فلا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منتهٍ. ولكن لأغراض الحصول على تقدير سريع في الحسابات، يمكن اعتبار قيمته 3. وإذا استعملت القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$ فسوف تحصل على تقريب أكثر دقة، وللحصول على التقريب الأكثر دقة، استعمل مفتاح π في الحاسبة.

يمكنك استعمال إحدى صيغتي محيط الدائرة لحساب قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها.

مثال 5 إيجاد القطر ونصف القطر

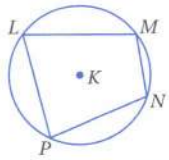
أوجد القطر ونصف القطر مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة للدائرة التي محيطها 106.4 mm .

$C = \pi d$	صيغة محيط الدائرة	$r = \frac{1}{2}d$	صيغة نصف القطر
$106.4 = \pi d$	بالتعويض	$\approx \frac{1}{2}(33.87)$	$d \approx 33.87$
$\frac{106.4}{\pi} = d$	بقسمة كلا الطرفين على π	≈ 16.94 mm	باستعمال الحاسبة
$33.87 \text{ mm} \approx d$	باستعمال الحاسبة		

تحقق من فهمك

5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة. 24.76 cm; 12.38 cm

يكون المضلّع **محاطًا بدائرة** إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة.
أي أنّ **الدائرة محيطة** بالمضلع، إذا احتوت على رؤوس هذا المضلع جميعها.



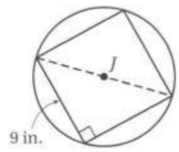
- الشكل الرباعي $LMNP$ مُحاط بـ $\odot K$.
- $\odot K$ مُحيطة بالمضلّع $LMNP$.

مثال 6 من الاختبار المعياري

إجابة قصيرة: الدائرة J محيطة بمربع طول ضلعه 9 in .
أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot J$.

اقرأ سؤال الاختبار
احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حُلّ سؤال الاختبار
ارسم شكلًا توضيحيًّا أولًا، يُمثّل قطر المربع قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.



$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$9^2 + 9^2 = c^2$	بالتعويض
$162 = c^2$	بالتبسيط
$9\sqrt{2} = c$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ in .

أوجد المحيط بدلالة π، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.
محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}$ in .

تحقق من فهمك

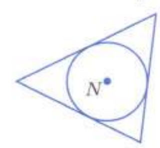
أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كل مما يأتي:

6A) إذا كانت محيطة بمثلث قائم الزاوية طولا ساقيه 7 m , 3 m . $\pi\sqrt{58}$ m

6B) إذا كانت محاطة بمربع طول ضلعه 10 ft . 10π ft

إرشادات للدراسة

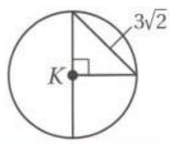
الدائرة المحيطة بمضلع هي الدائرة المارة برؤوس هذا المضلع. وتكون الدائرة محاطة بمضلع إذا مست جميع أضلاعه، كالدائرة في الشكل أدناه.



مثالان إضافيان

5 أوجد قطر ونصف قطر الدائرة التي محيطها يساوي 65.4 ft مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.
القطر 20.82 ft تقريبًا.
نصف القطر 10.41 ft تقريبًا.

6 أوجد محيط $\odot K$ أدناه. 6π وحدة



المحتوى الرياضي

الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية: يمكن أن يُحاط أي مثلث بدائرة تسمى الدائرة الخارجية، مع العلم أنه يُحيط بدائرة تسمى الدائرة الداخلية. والأشكال الرباعية (باستثناء شكل الطائرة الورقية) يمكن أن تحيط بدائرة أو تحاط بدائرة فقط عندما تكون زاويتا الشكل الرباعي المتقابلتين متكاملتين. ويمكن أيضًا أن تُحيط جميع أشكال الطائرات الورقية بدوائر، ولكنها لا يمكن أن تُحاط بدوائر. وأما المضلعات الأخرى فيجب أن تكون منتظمة حتى يمكن أن تُحاط بدائرة أو تحيط دائرة.

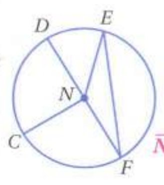
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: وجّه الطلاب إلى أن يستعملوا خيط لتقدير محيط قرص أو أسطوانة. وراجع معهم صيغة محيط الدائرة باستعمال قطرها أو نصف قطرها واطلب إليهم حساب محيط الدائرة باستعمال قطر الدائرة أو نصف قطرها. ثم اطلب إليهم مقارنة النتيجة التي حصلوا عليها حسابيًّا مع التقدير الذي حصلوا عليها باستعمال الخيط.

✓ تأكــد

المثالان 1, 2 أنظر إلى $\odot N$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



1) سمِّ هذه الدائرة. $\odot N$

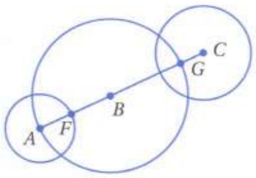
2) عيّن كلًّا ممّا يأتي:

a) وترًا $\overline{EF}, \overline{DF}$ **b)** قطرًا $\overline{DF}$ **c)** نصف قطر $\overline{NC}, \overline{ND}, \overline{NE}, \overline{NF}$

3) إذا كان $CN = 8$ cm ، فأوجد DN . 8 cm

4) إذا كان $EN = 13$ ft ، فما قطر الدائرة؟ 26 ft

المثال 3 قطر كلٍ من $\odot A, \odot B, \odot C$ يساوي 8 cm , 18 cm , 11 cm على الترتيب. أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



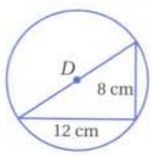
5) FG 14 cm

6) FB 5 cm

المثال 4 **7)** **عجلة دوارة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. ما قطر هذه العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك. 88 ft ; 276.46 ft

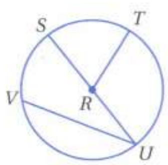
المثال 5 **8)** **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر هذه البركة وما نصف قطرها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. 17.98 ft; 8.99 ft

المثال 6 **9)** **إجابة قصيرة:** المثلث القائم الزاوية في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D . أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot D$. $4\pi\sqrt{13}$ cm



تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 عُد إلى $\odot R$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية.



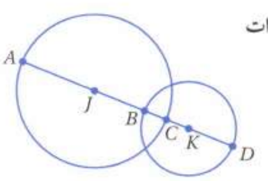
10) ما مركز الدائرة. R

11) عيّن وترًا يكون قطرًا. $\overline{SU}$

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ فسّر إجابتك. لا، إنه وتر

13) إذا كان $SU = 16.2$ cm ، فأوجد RT؟ 8.1 cm

المثال 3 إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي 10 وحدات، ونصف قطر $\odot K$ يساوي 8 وحدات و BC يساوي 5.4 وحدات، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



14) CK 2.6 وحدة **15)** AB 14.6 وحدة

16) JK 12.6 وحدة **17)** AD 30.6 وحدة

3 التدريب

✓ التقويم التكويني

استعمل التمارين 9-1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	27-10 ، 35 ، 36 ، 38 ، 55-40
ضمن المتوسط	31-11 فردي ، 36-32 ، 38 ، 55-40
فوق المتوسط	52-28 ، (اختياري: 55-53)

المثال 4 **18) بيتزا:** أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة، إن لزم ذلك. **8 in ; 50.27 in**

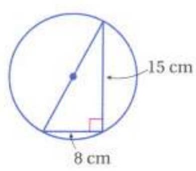
19) دراجات: قطر إطار دراجة يساوي 26 in . أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إن لزم ذلك. **13 in; 81.68 in**

المثال 5 **أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.**

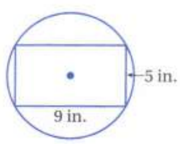
20) $C = 18$ in **5.73 in; 2.86 in**
21) $C = 124$ ft **39.47 ft; 19.74 ft**
22) $C = 375.3$ cm
23) $C = 2608.25$ m

المثال 6 **أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلّ من الدوائر الآتية باستعمال المضلّع الذي تحيطه أو الذي يحيطها.**

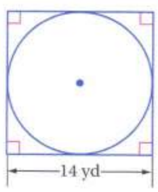
24)



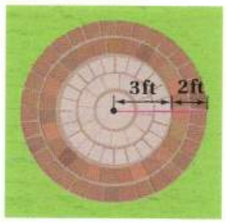
25)



26)



27) فناء: أراد مصطفى أن يرصف فناءً دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.



a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟ **31.42 ft**

b) إذا غيّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **4 ft**

في كل من الأسئلة 31–28 عُلِم نصف قطر أو قطر أو محيط دائرة. أوجد القياسين المجهولين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

28) $d = 8\frac{1}{2}$ in , $r = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

29) $r = 11\frac{2}{5}$ ft , $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

30) $C = 35x$ cm, $d = \underline{?}$, $r = \underline{?}$

31) $r = \frac{x}{8}$, $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

32) حدائق: يُراد إنشاء رصيف عرضه 4 m حول بركة دائرية الشكل محيطها 68 m . ما محيط الرصيف؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **93.13 m**

33) تمثيلات متعدّدة: سوف تستكشف في هذا السؤال أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) هندسيًا: ارسم ثلاث دوائر باستعمال الفرجار، بحيث يكون معامل التمدّد من أي دائرة إلى الدائرة الأكبر التي تليها 1:2 . **انظر الهامش**

b) جدوليًا: احسب نصف القطر والمحيط لكلّ من الدوائر السابقة، وسجّل النتائج في جدول مقرّبًا إلى أقرب عُشر. **انظر الهامش**

c) لفظيًا: فسّر لماذا تكون الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًا. **انظر الهامش**

d) لفظيًا: ضع تخمينًا حول النسبة بين محيطي الدائرتين عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2. **النسبة بين محيطيهما تساوي 2 .**

e) تحليليًا: معامل التمدد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط محيط $\odot A$ (C_A) مع محيط $\odot B$ (C_B) . $\boldsymbol{(C_B) = \frac{b}{a}(C_A)}$

f) عدديًا: إذا كان معامل التمدد من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in ، فما محيط $\odot B$ ؟ **4 in**

22) 119.46 cm; 59.73 cm
23) 830.23 m; 415.12 m
24) 17π cm
25) $\sqrt{106}\,\pi$ in
26) 14π yd
28) 4.25 in; 26.70 in
29) 22.80 ft; 71.63 ft
30) $11.14x$ cm; $5.57x$ cm
31) $0.25x$; $0.79x$

تنبيه لحل سؤال

الفرجار: يتطلب حل السؤال 33 استعمال الفرجار.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب الهندسة والجداول والوصف اللفظي والحسابات العددية في السؤال 33، لاستكشاف أثر تغير الأبعاد في الدائرة.

إجابات:

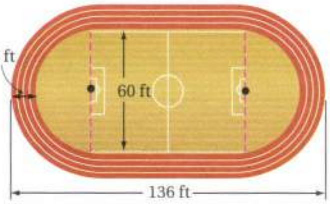
33a) إجابة ممكنة:

33b) إجابة ممكنة :

نصف القطر (cm)	المحيط (cm)
0.5	3.14
1	6.28
2	12.57

33c) إجابة ممكنة: لأن لها الشكل الدائري نفسه، إلا أنها تختلف في المقاس.

34) رياضة: يظهر في الصورة أدناه مضمار جري.



a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار عن المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟ **50.27 ft**

b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص على المسار الخارجي للمضمار؛ ليقطع ميلًا واحدًا؟ **15 دورة تقريبًا**

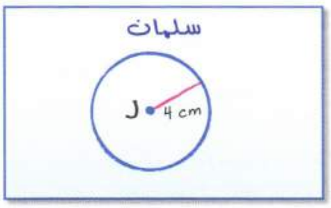
الربط مع الحياة

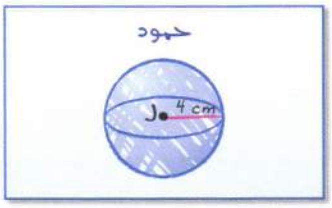
يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 كجم 240 سعرًا حراريًا، إذا ركض بسرعة 9 km/h لمدة 20 min. وذلك أكثر من مثلَي عدد السعرات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h للمدة الزمنية نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) مسألة مفتوحة: ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm. ما نصف قطر هذه الدائرة؟ **انظر الهامش**

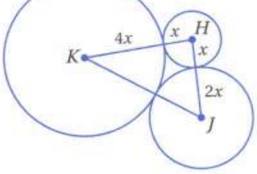
36) اكتشف الخطأ: رسم كلّ من حمود وسلمان شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J. هل إجابة أيّ منهما صحيحة؟ فسّر تبريرك.





36) كلاهما إجابته صحيحة. مجموعة النقاط التي عيّنها سلمان تبعد 4 cm عن J، ولكنها واقعة في مستوى ثنائي الأبعاد. وأمّا النقاط التي عيّنها حمود فهي تبعد 4 cm عن J، ولكنها في فضاء ثلاثي الأبعاد.

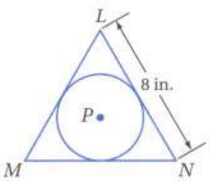
37) تحدٍّ: مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π. أوجد KJ. **24 وحدة**



38) تبرير: هل المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

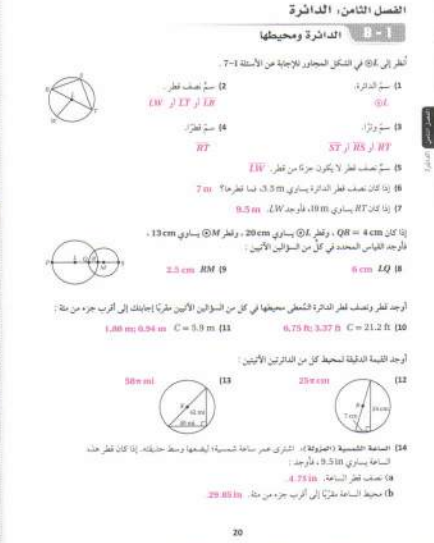
38) دائمًا. لأن نصف قطر الدائرة قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة عليها؛ لذا فإن طول القطعة التي تصل مركز الدائرة مع نقطة داخلها يكون أقل من نصف قطر الدائرة.

39) تحدٍّ: $\odot P$ مُحاطة بالمثلث المتطابق الأضلاع LMN، كما في الشكل أدناه. ما محيط $\odot P$؟ $\frac{8\pi}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$



40) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة والدوائر المتحدة في المركز. **انظر الهامش**

كتاب التمارين، ص (20)



الفصل الثامن، الدائرة

8-1 الدائرة ومحيطها

أنظر إلى $\odot L$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 1-7.

1) سمِّ الدائرة. $\odot L$

2) سمِّ نصف قطر. $\overline{LR}$ أو $\overline{LT}$ أو $\overline{LW}$

3) سمِّ وترًا. $\overline{RT}$ أو $\overline{RS}$ أو $\overline{ST}$

4) سمِّ قطرًا. $\overline{RT}$

5) سمِّ نصف قطر لا يكون جزءًا من قطر. $\overline{LW}$

6) إذا كان نصف قطر الدائرة يساوي 3.5 m، فما قطرها؟ 7 m

7) إذا كان RT يساوي 19 m، فأوجد LW. 9.5 m

إذا كان $QR = 4$ cm، وقطر $\odot L$ يساوي 20 cm، وقطر $\odot M$ يساوي 13 cm، فأوجد القياس المحدد في كلّ من السؤالين الآتيين:

8) LQ 6 cm

9) RM 2.5 cm

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المُعطى محيطها في كل من السؤالين الآتيين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

10) $C = 21.2$ ft 6.75 ft; 3.37 ft

11) $C = 5.9$ m 1.88 m; 0.94 m

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل من الدائرتين الآتيتين:

12) 25π cm

13) 58π mi

14) الساعة الشمسية (المزولة): اشترى عمر ساعة شمسية؛ ليضعها وسط حديقته. إذا كان قطر هذه الساعة يساوي 9.5 in، فأوجد:

a) نصف قطر الساعة. 4.75 in

b) محيط الساعة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. 29.85 in

20

إجابات:

35) انظر إجابات الطلاب. يجب أن يكون نصف القطر بين 1.27 cm و 1.91 cm.

40) إجابة ممكنة: الدوائر المتطابقة لها مراكز مختلفة ولكن نصف القطر نفسه؛ في حين أن الدوائر المتحدة في المركز لها المركز نفسه ولكن أنصاف أقطارها مختلفة.

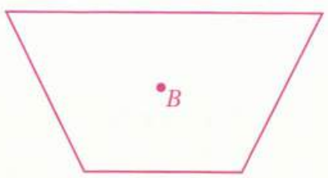
4 التقويم

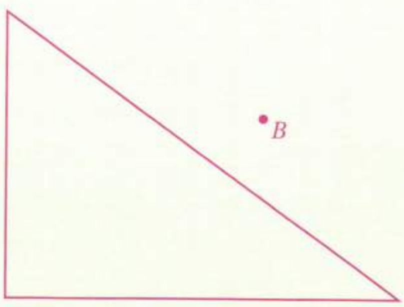
فهم الرياضيات: يمكن للطلاب التدرب على مصطلحات ومفردات هذا الدرس عن طريق وصف دوائر مختارة و تعريف المصطلحات بصوت عالٍ .

إجابات:

(43

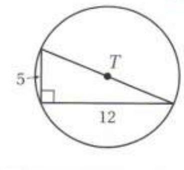

(44


(45


(46


تدريب على الاختبار المعياري

41) إجابة شبكية : ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر. **40.8**



42) جبر: أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50 m ، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر. **C**

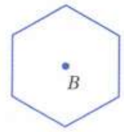
A 10 **C** 8

B 9 **D** 7

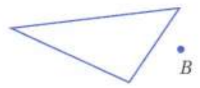
مراجعة تراكمية

استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدّد مركزه B ومعامله r المحدّد في كل من الأسئلة الآتية. (الدرس 6-7) **43–46) انظر الهامش**

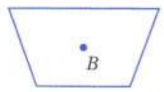
43) $r = \frac{1}{5}$



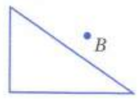
44) $r = \frac{2}{5}$



45) $r = 2$

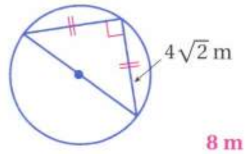


46) $r = 3$



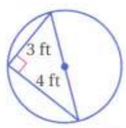
أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل دائرة ممّا يأتي: (الدرس 1-8)

47)



8 m

48)



5 π cm

حدّد ما إذا كان لكل من الأشكال الآتية تماثل دوراني أم لا؟ وإذا كان كذلك، فانقل الشكل إلى دفترك، وحدّد عليه مركز الدوران، واذكر رتبته ومقداره. (الدرس 5-7)

49)

لا

50)

نعم؛ 4, 90

51)

لا

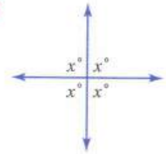
52)

لا

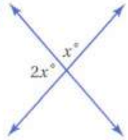
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

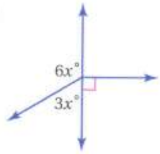
53) **90**



54) **60**



55) **20**



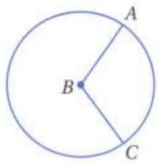
181 الدرس 1-8 الدائرة ومحيطها

8-2 قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

لماذا؟

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام. وتستعمل الساعات العادية في تزيين المنازل، أو كساعات يدوية. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحيانًا هناك مؤشر أو عقرب للثواني.
ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة. وتكوّن العقارب الثلاث زوايا مركزية فيها.

الزوايا والأقواس **الزاوية المركزية** في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$.



تذكّر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي $360°$؛ لذا فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة. ويؤدي هذا إلى المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — **مجموع قياسات الزوايا المركزية**

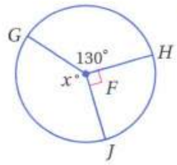
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

مثال 1 **إيجاد قياس الزاوية المركزية**

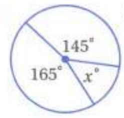
أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



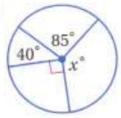
$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$130° + 90° + x = 360°$	بالتعويض
$220° + x = 360°$	بالتبسيط
$x = 140°$	بطرح $220°$ من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

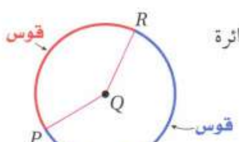
(1A 50



(1B 145



القوس هو جزء من دائرة يُحدّد بنقطتَي طرفيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كل منهما بقياس تلك الزاوية المركزية.



فيما سبق:

درستُ إيجاد قياسات الزوايا وتحديد الزوايا المتطابقة.

والآن:

- أعيّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات:

الزاوية المركزية
central angle

القوس
arc

القوس الأصغر
minor arc

القوس الأكبر
major arc

نصف دائرة
semicircle

الأقواس المتطابقة
congruent arcs

الأقواس المتجاورة
adjacent arcs

طول القوس
arc length

www.obeikaneducation.com

8-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-8

قياس الزوايا وتعيين الزوايا المتطابقة .

الدرس 2-8

تعيين الزوايا المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ونصف الدائرة وإيجاد قياسها.

ما بعد الدرس 2-8

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار في الدائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما النقطة التي تبعدُ مسافات متساوية عن الأعداد من 12 – 1؟ مركز الساعة
- افرض أن محيط الساعة يساوي 44 in، كم تقريبًا يبعُد كل عدد عن المركز؟ 7 in تقريبًا
- ضع تخمينًا حول سبب بقاء الزاوية المركزية في الساعة ثابتة بغض النظر عن كِبَر أو صِغَر الدائرة. تتغير المسافة بين أي عددين ومركز الساعة بنسبة مماثلة لنسبة التغيير في محيط الساعة زيادةً أو نقصانًا.

مصادر الدرس 2-8

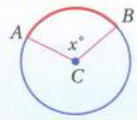
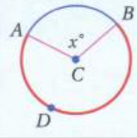
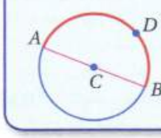
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (188)	• تنويع التعليم ص (184, 185, 188)	• تنويع التعليم ص (184, 185, 188)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (21)	• كتاب التمارين ص (21)	• كتاب التمارين ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس
يُسمّى القوس الأصغر بنقطتَي طرفيه ، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فيسميان بنقطتي الطرفين بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مفاهيم أساسية — الأقواس وقياسها

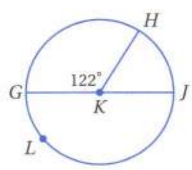
أضف إلى مطويتك

القوس	قياسه
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن $180°$ ، ويساوي قياس الزاوية المركزية المرتبطة به. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x°$ 
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على $180°$، ويساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360 - m\widehat{AB} = 360° - x°$ 
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي $180°$ $m\widehat{ADB} = 180°$ 

الربط مع الحياة

إقليدس
(325 ق.م إلى 265 ق.م)
عالم رياضيات يوناني يلقب بأبي الهندسة اشتهر بكتبه الثلاثة التي سميت العناصر، وهي الكتب الأكثر تأثيرًا في تاريخ الرياضيات.

مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياساتها



$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$. حدّد ما إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.

a) $\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، وقياسه $m\widehat{GH} = m\angle GKH = 122°$.

b) $\widehat{GLH}$

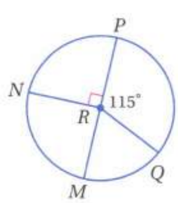
$\widehat{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$ بنقطتَي طرفيه.

$$m\widehat{GHL} = 360° - m\widehat{GH}$$
$$= 360° - 122° = 238°$$

c) $\widehat{GLJ}$

$\widehat{GLJ}$ هو نصف دائرة،
إذن $m\widehat{GLJ} = 180°$.

تحقق من فهمك



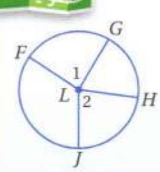
$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$. حدّد ما إذا كان كلّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة ، ثم أوجد قياسه.

2A) $\widehat{MQ}$ قوس أصغر، $65°$
2B) $\widehat{MNP}$ نصف دائرة، $180°$
2C) $\widehat{MNQ}$ قوس أكبر، $295°$

الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، ويكون لها القياس نفسه.

نظرية 8.1

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيّتان المناظرتان لهما متطابقتين.

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.
إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

سوف تبرهن النظرية 8.1 في السؤال 44

الزوايا والأقواس

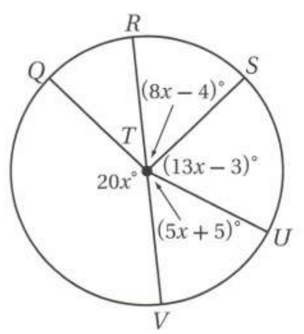
الأمثلة 4-1 تبيّن كيفية استعمال النظريات والمسلّمات لإيجاد قياسات الأقواس والزوايا في الدائرة.

التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 7



المحتوى الرياضي

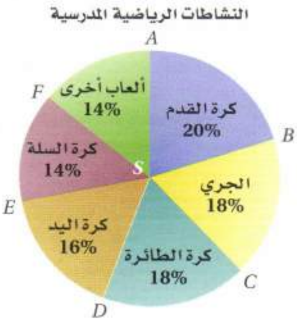
مصطلحات إن قياس القوس وطول القوس مصطلحان مختلفان لا يُستعمَل أحدهما بدل الآخر، فقياس القوس يُعطى بالدرجات كما تُقاس الزوايا. ويرمز له بالرمز $m\widehat{AC}$. في حين أن طول القوس هو المسافة على طول المنحنى كما هو الحال في طول القطعة المستقيمة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم دائرة على السبورة وعيّن فيها قطرًا وعدة أنصاف أقطار وضع قياسات زوايا معلومةٍ. اختر طالبًا ليوضح كيفية إيجاد قياس أحد الأقواس الصغرى. ثم اختر طالبًا آخر ليجد قياسات الأقواس الصغر ى المتبقية.

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

رياضة: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور، لإيجاد كل من القياسات الآتية:



a) $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ هو قوس أصغر.

إذن $m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360)$ — إيجاد 18% من 360

$= 64.8$ — بالتبسيط

b) $m\widehat{BC}$

النسبتان المئويتان لكرة الطائرة والجري متساويتان؛ إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8$

تحقق من فهمك

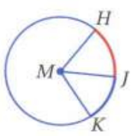
3A) $m\widehat{EF}$ $50.4°$

3B) $m\widehat{FA}$ $50.4°$

الربط مع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة لأول مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\widehat{HJ}$, $\widehat{JK}$ قوسان متجاوران في $\odot M$. وكما هو الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

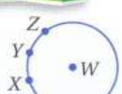


مسلّمة 8.1 — مسلّمة جمع الأقواس

أضف إلى مطويتك

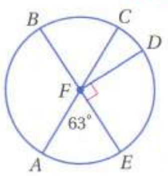
التعبير اللفظي: قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال: $m\widehat{XYZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



مثال 4 — إيجاد قياس القوس باستعمال مسلمة جمع الأقواس

أوجد كلاً من القياسات الآتية في $\odot F$:



a) $m\widehat{AED}$

$m\widehat{AED} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ — $m\widehat{AE} = m\angle AFE, m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$ — بالتعويض

b) $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= 63° + 180° = 243°$ — $\widehat{EDB}$ نصف دائرة. إذن، $m\widehat{EDB} = 180°$

تحقق من فهمك

4A) $m\widehat{CE}$ $117°$

4B) $m\widehat{ABD}$ $207°$

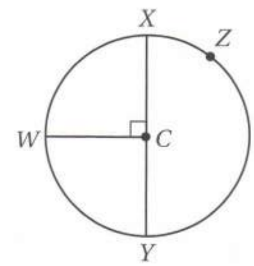
تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون ارسم دائرة وقسمها إلى زوايا مركزية مختلفة القياس. ثم ظلل كل جزء من أجزاء الدائرة بلون مختلف، كرر هذه العملية مع دائرتين بالقطر نفسه ولكن باستعمال زوايا مركزية مختلفة. اقطع أجزاء الدوائر الثلاثة جميعها واخلطها. أعط هذه الأجزاء لمجموعات من الطلاب لإعادة ترتيبها في ثلاث دوائر، واطلب إليهم إيجاد قياسات الزوايا المركزية لهذه القطاعات وقياس الأقواس ومحيط هذه الدوائر وأطوال الأقواس. يمكن أن تقارن المجموعات أعمالها للتحقق من النتائج و/أو لتحديد المجموعة الأكثر دقة في إيجاد القياسات جميعها.

أمثلة إضافية

$\overline{WC}$ نصف قطر في $\odot C$. حدد ما إذا كان كل من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو قوساً أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.



a) $m\widehat{XZY}$

نصف دائرة؛ $m\widehat{XZY} = 180°$

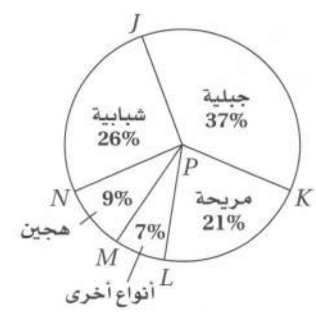
b) $m\widehat{WZX}$

قوس أكبر؛ $m\widehat{WZX} = 270°$

c) $m\widehat{XW}$

قوس أصغر؛ $m\widehat{XW} = 90°$

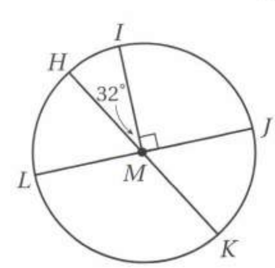
دراجات هوائية: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه لايجاد كل مما يأتي:



a) $m\widehat{KL}$. $75.6°$

b) $m\widehat{NJL}$. $302.4°$

أوجد كلاً من القياسات الآتية في $\odot M$.



a) $m\widehat{LHI}$ $90°$

b) $m\widehat{IJK}$ $148°$

تنبيه !

طول القوس
يُعطى طول القوس بوحدات الطول مثل السنتمترات، أما قياس القوس فيُحدَّد بالدرجات.

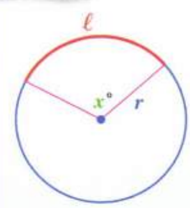
طول القوس: **طول القوس** هو المسافة على الدائرة بين نقطتَي طرفيه، ويُقاس بوحدات الطول. وبما أن القوس هو جزء من الدائرة، فإن طوله جزء من محيطها.

مفهوم أساسي **طول القوس** أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: نسبة طول القوس ℓ إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى $360°$.

التناسب: $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$ أو

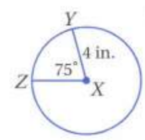
المعادلة: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$



مثال 5 **إيجاد طول القوس**

أوجد طول $\widehat{ZY}$ في كل مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

a)

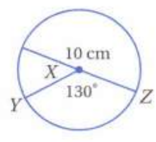


$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \frac{75°}{360°} \cdot 2\pi(4)$ بالتعويض

≈ 5.24 in باستعمال الحاسبة

b)

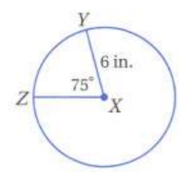


$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \frac{130°}{360°} \cdot 2\pi(5)$ بالتعويض

≈ 11.34 cm باستعمال الحاسبة

c)



$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$ صيغة طول القوس

$= \frac{75°}{360°} \cdot 2\pi(6)$ بالتعويض

≈ 7.85 in باستعمال الحاسبة

لاحظ أن $\widehat{ZY}$ له القياس نفسه في المثالين 5a, 5c، ويساوي $75°$. إلّا أن لهما طولين مختلفين؛ بسبب وجودهما في دائرتين نصفا قطريهما مختلفان.

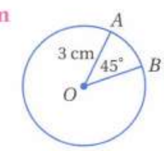
إرشادات للدراسة

طريقة بديلة يمكن إيجاد طول القوس في الأمثلة 5a, 5b, 5c باستعمال التناسب $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$

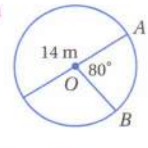
تحقق من فهمك

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كل مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة:

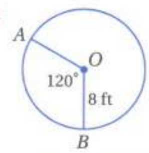
5A)



5B) 2.36 cm



5C) 9.77 m



16.76 ft

طول القوس

بما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزء من محيط الدائرة.
المثال 5 يبيّن كيفية إيجاد طول القوس عن طريق التناسب.

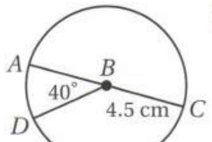
إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي بيّن للطلاب أنه يمكن أن يكون لقوسين القياس نفسه ولكن طولاهما مختلفان. وضح ذلك باستعمال صيغة طول القوس، وبيّن للطلاب أن طول القوس يعتمد على نصف قطر الدائرة.

مثال إضافي

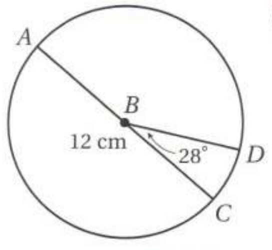
5 أوجد طول $\widehat{DA}$. مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.

a)



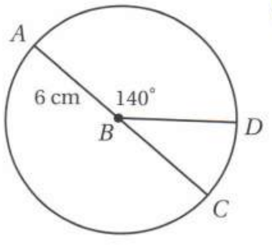
3.14 cm

b)



15.92 cm

c)



14.66 cm

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب إيجاد طول قوس دائرة ساعة قطرها 14 ft و 8 in عندما تُشير عقارب الساعة إلى الساعة الخامسة، وقياس الزاوية المركزية التي يقابلها ذلك القوس.
طول القوس يساوي 230 in تقريبًا أو 19 ft و 2 in، وقياس الزاوية المركزية $150°$.

3 التدريب

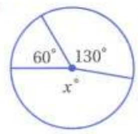
التقويم التكويني

استعمل التمارين 11–1 للتأكّد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

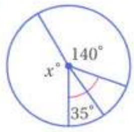
تأكـد

المثال 1 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

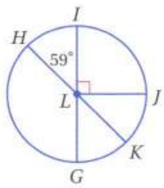
(1 **170°**



(2 **150°**



المثال 2 $\overline{HK}, \overline{IG}$ قطران في $\odot L$. حدّد ما إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.



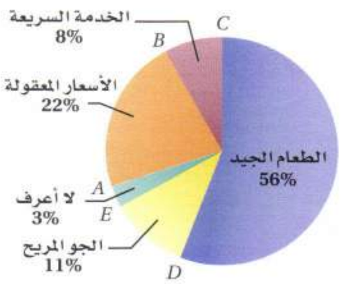
(3 $\widehat{IHJ}$ **قوس أكبر؛ 270°**

(4 $\widehat{HI}$ **قوس أصغر؛ 59°**

(5 $\widehat{HGK}$ **نصف دائرة؛ 180°**

المثال 3 (6 **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه رواد المطاعم.

ما يطلبه روّاد المطاعم

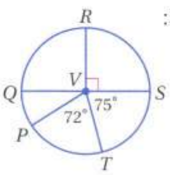


a) أوجد $m\widehat{AB}$. **79.2**

b) أوجد $m\widehat{BC}$. **28.8**

c) صف نوع قوس قطاع الطعام الجيد. **قوس أكبر**

المثال 4 $\overline{QS}$ قطر في $\odot V$. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



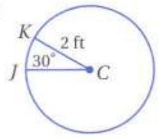
(7 $m\widehat{STP}$ **147°**

(8 $m\widehat{QRT}$ **255°**

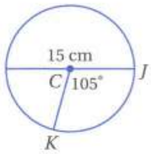
(9 $m\widehat{PQR}$ **123°**

المثال 5 أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة في كل من السؤالين الآتيين:

(10 **1.05 ft**



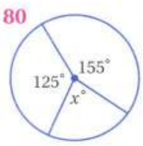
(11 **13.74 cm**



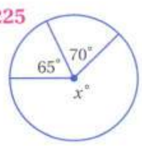
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

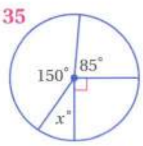
(12 **80**



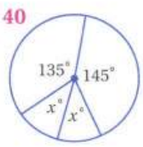
(13 **225**



(14 **35**



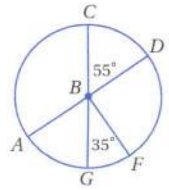
(15 **40**



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	34–12 ، 50–47 ، 63–53
ضمن المتوسط	35–13 فردي ، 43–37 فردي ، 51–44 ، 63–53
فوق المتوسط	60–35 ، (اختياري: 63–61)

المثال 2 $\overline{AD}, \overline{CG}$ قطران في $\odot B$. حدّد ما إذا كان كلّ قوس مما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة. ثم أوجد قياسه.



16) $m\widehat{CD}$ قوس أصغر، 55°

17) $m\widehat{AC}$ قوس أصغر، 125°

18) $m\widehat{CG}$

19) $m\widehat{CGD}$ قوس أكبر، 305°

20) $m\widehat{GCF}$ قوس أكبر، 325°

21) $m\widehat{ACF}$

18) نصف دائرة، 180°

21) قوس أكبر، 270°

المثال 3

22) **تسوّق:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.

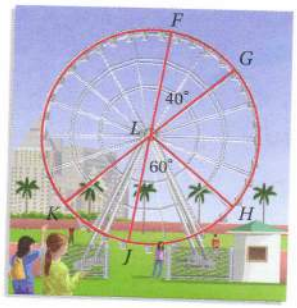
a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كل من المجمعات التجارية والمحلات المتخصصة؟ 273.6, 14.4

b) صف نوع القوس المقابل لفئة المجمعات التجارية ولفئة الأسواق الشعبية. قوس أكبر، قوس أصغر

c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

المثالان 4, 2

تسلية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور، لإيجاد كلّ من القياسات الآتية:



23) $m\widehat{FG}$ 40°

24) $m\widehat{JH}$ 60°

25) $m\widehat{JKF}$ 180°

26) $m\widehat{JFH}$ 300°

27) $m\widehat{GHF}$ 320°

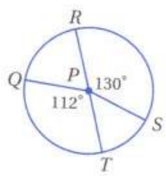
28) $m\widehat{GHK}$ 180°

29) $m\widehat{HK}$ 100°

30) $m\widehat{JKG}$ 220°

المثال 5

$\overline{RT}$ قطر في $\odot P$ ، أوجد طول كل قوس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



31) $\widehat{RS}$ ، إذا كان نصف القطر يساوي 2 in . 4.54 in

32) $\widehat{QT}$ ، إذا كان القطر يساوي 9 cm . 8.80 cm

33) $\widehat{QR}$ ، إذا كان $PS = 4$ mm . 4.75 mm

34) $\widehat{QRS}$ ، إذا كان $RT = 11$ ft . 19.01 ft

الربط مع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قُطر واجهتها عن 40 m ، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m ، وطول عقرب الساعات 17 m . وتبلغ كتلة كل منهما 6 أطنان تقريبًا.

ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

35) ما قياس الزاوية المركزية المحصورة بين عقربي الساعات والدقائق؟ فسّر الطريقة التي توصلت بها إلى إجابتك. انظر الهامش

36) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك على طول القوس الأصغر بين الرقم 1 ، والرقم 12؟ يتضاعف طول القوس

إجابات:

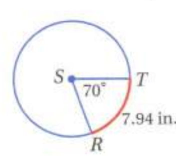
22c) نعم؛ القوسان المقابلان للفئتين "عبر الإنترنت" "وغير هذه الأماكن" لهم القياس نفسه. لأن كلًا من هاتين الفئتين لها النسبة المئوية 9% نفسها من الدائرة.

35) قياس الزاوية بين كل رقمين يساوي $360° \div 12 = 30°$ ؛ لذا قياس الزاوية المركزية المحصورة بين عقربي الساعة يساوي 60° تقريبًا.

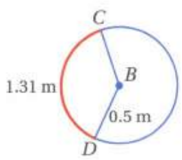
الدرس 2-8 قياس الزوايا والأقواس 187

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب درجة.

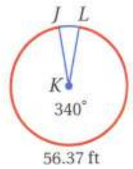
37) محيط $\odot S$ **40.84 in**



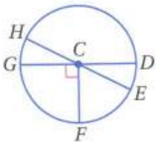
38) $m\widehat{CD}$ **150°**



39) نصف قطر $\odot K$ **9.50 ft**

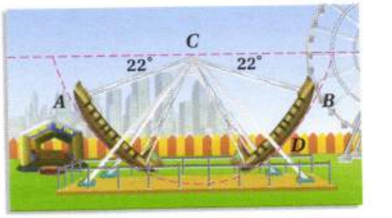


جبر: في $\odot C$، إذا كان $m\angle HCG = 2x$, $m\angle HCD = 6x + 28$، فأوجد قياس كلّ ممّا يأتي:



40) $\widehat{EF}$ **52** 41) $\widehat{HD}$ **142** 42) $\widehat{HGF}$ **128**

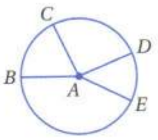
43) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة ألعاب شكل نصف دائرة كما في الشكل المجاور.



a) أوجد $m\widehat{AB}$ **136°**

b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **147.17ft**

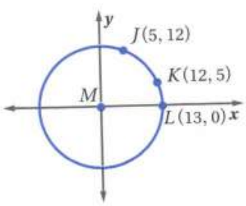
44) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.1. **انظر الهامش**



المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$

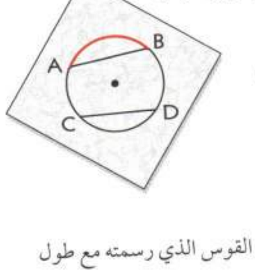
45) **هندسة إحداثية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلًّا مما يأتي في $\odot M$. مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\widehat{JL}$ **67.4°** b) $m\widehat{KL}$ **22.6°** c) $m\widehat{JK}$ **44.8°**

d) طول $\widehat{JL}$ **15.29 وحدة** e) طول $\widehat{JK}$ **10.16 وحدات**

46) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا السؤال العلاقة بين الأقواس والأوتار.



a) **هندسيًا:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}, \overline{CD}$. حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أخريين ووترين متطابقين في كل منهما على أن تكون أطوال الأوتار في الدوائر الثلاث مختلفة. **46a) انظر الهامش**

b) **حسيًا:** قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفّاف أكبر من كل من الدوائر الثلاث، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملًا دبّوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس؛ لمقارنة طول القوس الذي رسمته مع طول القوس المقابل. **انظر أعمال الطلاب**

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقة في الدائرة. ثم أثبت صحته. **انظر الهامش**

كتاب التمارين، ص (21)


8-2 قياس الزوايا والأقواس

$\overline{AC}$ و $\overline{EB}$ قطران في $\odot Q$، حدد ما إذا كان القوس المُعطى في كلٍّ مما يأتي قوس أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:

1) $\widehat{AE}$ قوس أصغر، 50 2) $\widehat{AB}$ قوس أصغر، 80

3) $\widehat{EDC}$ قوس أصغر، 130 4) $\widehat{ADC}$ نصف دائرة، 180

5) $\widehat{ABC}$ نصف دائرة، 180 6) $\widehat{BC}$ قوس أصغر، 100

$\overline{EG}, \overline{FH}$ قطران في $\odot P$، أوجد قياس كل مما يأتي:

7) $m\widehat{EF}$ 38 8) $m\widehat{DE}$ 52

9) $m\widehat{FG}$ 142 10) $m\widehat{DHG}$ 128

11) $m\widehat{DFG}$ 232 12) $m\widehat{DGE}$ 308

استعمل $\odot Z$ لإيجاد طول كل قوس مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

13) $\widehat{QPT}$، حيث $QZ = 10$ in 20.94 in 14) $\widehat{QR}$، حيث $PZ = 12$ ft 12.57 ft

15) $\widehat{PQR}$، حيث $TR = 15$ m 19.63 m 16) $\widehat{QPS}$، حيث $ZQ = 7$ cm 17.10 cm

17) واجب منزلي: أنظر إلى الجدول المجاور الذي يبين عدد الساعات التي يقضيها مجموعة من الطلاب في حل واجباتهم كل ليلة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

a) إذا مثّلت البيانات باستعمال القطاعات الدائرية، فكم درجة تقابل كل فئة؟ 28.8°, 104.4°, 208.8°, 10.8°, 7.2°

b) صنّف القوس الذي يقابل كل فئة. القوس المقابل للفئة 3-2 ساعات قوس أكبر، وكل من الأقواس الأخرى قوس أصغر.

21

تنبيه لحل سؤال

الفرجار والمسطرة والمقص: يتطلب السؤالان 46, 51 استعمال فرجار ومسطرة ومقص.

تمثيلات متعددة في السؤال 46، يستعمل الطلاب رسومات هندسية وقياسات الأطوال، والوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين الأوتار والأقواس في الدائرة.

الإجابات:

44) البرهان:

العبارات (المبررات):

1) $\angle BAC \cong \angle DAE$ (معطيات)

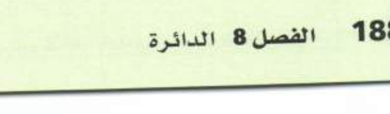
2) $m\angle BAC = m\angle DAE$ (تعريف تطابق الزوايا)

3) $m\angle BAC = m\widehat{BC}$, $m\angle DAE = m\widehat{DE}$ (تعريف قياس القوس)

4) $m\widehat{BC} = m\widehat{DE}$ (بالتعويض)

5) $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$ (تعريف تطابق الأقواس)

46a) إجابة ممكنة:



تنويع التعليم

دون ضمن فوق

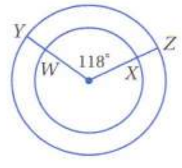
توسع: إن استعمال التمثيل بالقطاعات الدائرية طريقة بسيطة و فعّالة لعرض البيانات. وبما أن الطلاب الموهوبين يشكلون باحثي المستقبل في مجالات متعددة، لذا أعطِهم فرصة لتطوير سؤال بحثي يتعلق بمجالات اهتماماتهم والإجابة عنه، ثم اطلب إليهم عرضَ النتائج باستعمال القطاعات الدائرية، بحيث تكون قياسات الأقواس التي تمثل البيانات التي جمعوها دقيقة وصحيحة.

46c) إجابة ممكنة: عندما يكون الوتران في الدائرة متطابقين؛ فإن القوسين المحدودين بهذين الوترين يكونان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

47) اكتشف الخطأ: يقول إبراهيم: إن $\widehat{WX}$, $\widehat{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. هل أي منهما على صواب؟ فسّر إجابتك.

سالم؛ بما أن الدائرتين غير متطابقتين؛ لأن نصفَي قطريهما مختلفان، فإن القوسين غير متطابقين.



تبرير: حدّد ما إذا كانت كلّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

48) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

49) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

50) يعتمد مجموع قياسي قوسين متجاورين في دائرة على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

51) مسألة مفتوحة: ارسم دائرة وعيّن عليها ثلاث نقاط. قدّر قياس الأقواس الثلاثة غير المتداخلة الناتجة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كل منها، واكتب على كل قوس قياسه. انظر الهامش

52) تحدٍّ: تشير عقارب ساعة إلى 8:10. ما قياس الزاوية المقابلة للقوس الأصغر بين عقربَي الساعة؟ $175°$

53) اكتب: صف الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة. وطريقة إيجاد قياس كلّ منها. انظر الهامش

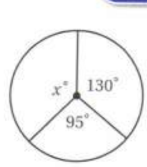
48) صحيحة دائمًا؛ لأن تعريف القوس الأصغر هو القوس الذي قياسه أقل من $180°$.

49) غير صحيحة أبدًا؛ الزاوية المنفرجة تُحدّد قوسًا قياسه بين $90°$ و $180°$.

50) غير صحيحة أبدًا؛ يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين على قياس كل منهما.

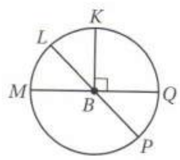
تدريب على الاختبار المعياري

54) أوجد قيمة x؟ **B**



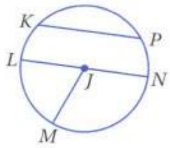
A 120	**C** 145
B 135	**D** 160

55) في $\odot B$ ، إذا كان $m\angle LBM = 3x$ ، $m\angle LBQ = 4x + 61$. فما قياس $\angle PBQ$؟ $51°$



مراجعة تراكمية

عُد إلى $\odot J$ في الشكل المجاور للإجابة عن كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 1-8)



56) سمِّ مركز الدائرة. J

57) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا. $\overline{LN}$

58) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟ 6.2

مثّل بيانيًا المضلع الذي صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله r المُعطى في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 6-7) (59, 60) انظر الهامش

59) $X(-1, 2), Y(2, 1), Z(-1, -2)$ ؛ $r = 3$

60) $A(-4, 4), B(4, 4), C(4, -4), D(-4, -4)$ ؛ $r = 0.25$

استعد للدرس اللاحق

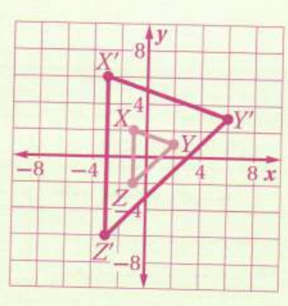
أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

61) $24^2 + x^2 = 26^2$ $10, -10$

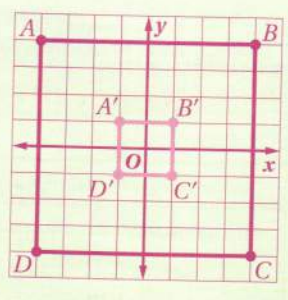
62) $x^2 + 5^2 = 13^2$ $12, -12$

63) $30^2 + 35^2 = x^2$ $46.1, -46.1$

59)



60)



تنبيه !

اكتشف الخطأ: في السؤال 47، يجب أن يدرك الطلاب أن الزاوية المركزية المشتركة بين الدائرتين المتحدتين في المركز يكون لها قياس القوس نفسه. ولكن عندما تكبر الدائرة تزداد المسافة بين نقطتي تقاطع ضلعي الزاوية مع الدائرة، لذلك يزداد طول القوس طرديًّا مع قطر الدائرة. وعليه، فإن إجابة سالم صحيحة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب رسم دائرة، فيها زاوية مركزية معلومة، واطلب إليهم تحديد طول نصف قطر الدائرة ووضع قياس الزاوية المركزية بالدرجات على الشكل، ثم اطلب إليهم إيجاد طول أحد القوسين الأكبر أو الأصغر، وأن يسلّموا أعمالهم قبل مغادرة غرفة الفصل.

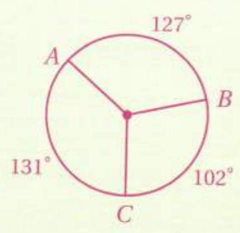
التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرسين 2-8 ,1-8 ، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

51) إجابة ممكنة :



53) إجابة ممكنة : الأنواع الثلاثة هي : القوس الأصغر، القوس الأكبر، نصف الدائرة، وقياس القوس الأصغر يساوي قياس الزاوية المركزية المناظرة له، وقياس القوس الأكبر يساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي له الطرفان نفساهما، وقياس نصف الدائرة يساوي $180°$.

8-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-3

استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد القياسات المجهولة.

الدرس 8-3

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار واستعمالها.
تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار واستعمالها.

ما بعد الدرس 8-3

إيجاد قياسات الزوايا المحيطية بما فيها زوايا المضلعات المرسومة داخل دائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

أطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما قياس الزاوية المركزية في إطار التطريز؟ $60°$
- افرض أن قطر إطار التطريز يساوي 12 in، ما طول القوس الذي يقابل إحدى الزوايا المركزية؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة. 6.28 in
- افرض أن قطر إطار التطريز ازداد بنسبة 125%. ضع تخمينًا لطول الوتر والقوس الجديدين. سوف يزداد طول كل منهما بنسبة 125%.

8-3 الأقواس والأوتار
Arcs and Chords

فيما سبق:

درستُ استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

والآن:

- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل الخياطون إطارًا دائريًّا لشد الأقمشة ثم تطريز الزخارف عليها. ويُظهر الشكل المجاور إطارًا دائريًّا، مثبتٌ عليه تطريز على شكل نجمة، ويمثل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتي قوس في الدائرة، أو نهايتي وترٍ يكوّن أحد أضلاع شكل سداسي رؤوسه على الدائرة.

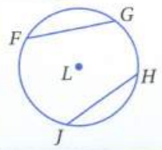
الأقواس والأوتار: لقد تعلمت في الدرس 1-8 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة، وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفيه يقسمانها إلى قوسين، أحدهما قوس أكبر والآخر أصغر.

نظرية 8.2

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

مثال: $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$ إذا وفقط إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.



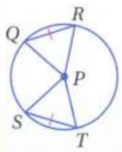
سوف تبرهن الجزء 2 من النظرية 8.2 في السؤال 21

برهان نظرية 8.2 (الجزء 1)

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:



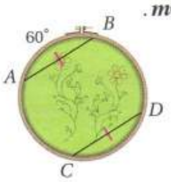
العبارات	المبررات
1) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$	1) معطيات
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة.
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAS
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

مثال 1 من واقع الحياة: استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

حرف يدوية: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}, m\widehat{AB} = 60°$ في الشكل المجاور، فأوجد $m\widehat{CD}$.

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ وتران متطابقان؛ إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ متطابقان

أي أن $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60°$



تحقق من فهمك

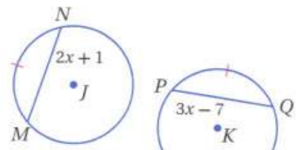
1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78$ في الشكل أعلاه، فأوجد $m\widehat{CD}$. $78°$

مصادر الدرس 8-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (196)	• تنويع التعليم ص (196)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (22)	• كتاب التمارين ص (22)	• كتاب التمارين ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

مثال 2 استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار

جبر: إذا كان $\odot J \cong \odot K, \widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$ ، فأوجد PQ .



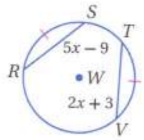
$\widehat{MN}, \widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين، لذا فإن الوترين $\overline{MN}, \overline{PQ}$ متطابقان.

$MN = PQ$ تعريف القطع المتطابقة

$2x + 1 = 3x - 7$ بالتعويض

$8 = x$ بالتبسيط

إذن $PQ = 3(8) - 7 = 17$.



تحقق من فهمك

2) في $\odot W$ ، إذا كان $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$، فأوجد RS. **11**

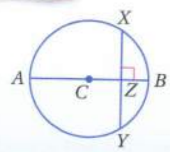
تنصيف الأقواس والأوتار: إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه يُنصّف القوس.

نظريات

أضف إلى مطويتك

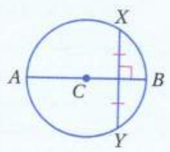
8.3 **إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه يُنصّف ذلك الوتر، ويُنصّف قوسه.**

مثال: إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$، فإن $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}, \widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



8.4 **العمود المنصّف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.**

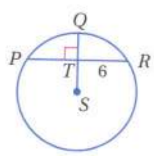
مثال: إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصّفًا للوتر $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



سوف تبرهن النظريتين 8.4 ,8.3 في السؤالين 24 ,22 على الترتيب

مثال 3 استعمال نصف القطر العمودي على الوتر

في $\odot S$ ، إذا كان $m\widehat{PQR} = 98°$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.



نصف القطر $\overline{SQ}$ يعامد الوتر $\overline{PR}$؛ لذا وبحسب النظرية 8.3 فإن $\overline{SQ}$ يُنصّف $\widehat{PQR}$ ؛ إذن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.

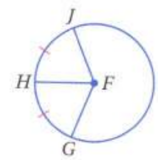
وبالتعويض ينتج أن $m\widehat{PQ} = \frac{98°}{2} = 49°$.

تحقق من فهمك

3) أوجد PR في $\odot S$. **12 وحدة**

إرشادات للدراسة

منصّف القوس
في الشكل الآتي $\overline{FH}$ منصّف للقوس $\widehat{JHG}$.



الأقواس والأوتار

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال الأقواس والأوتار المتطابقة لإيجاد قياس الأقواس وأطوال الأوتار.

التقويم التكويني

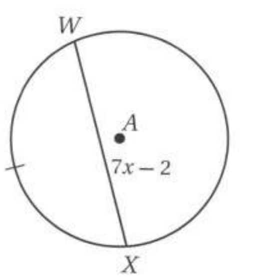
أستعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

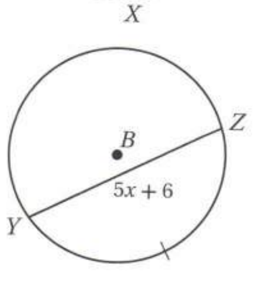
مثالان إضافيان

1 **مجوهرات:** قطعة فضة دائرية معلقة بسلسلة بواسطة سلكين يحيطان قطعة الفضة حيث $\overline{JM} \cong \overline{KL}, m\widehat{KL} = 90°$ أوجد $m\widehat{JM}$.

$m\widehat{KL} = m\widehat{JM} = 90°$

2 **جبر:** في الشكلين أدناه، إذا كان $\odot A \cong \odot B, \widehat{WX} \cong \widehat{YZ}$ ، فأوجد WX.





$WX = 26$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل أحد برامج الرسم في حاسوبك. واعرضه على السبورة. يساعدك هذا على توفير الوقت وإنشاء رسوم أكثر دقة.

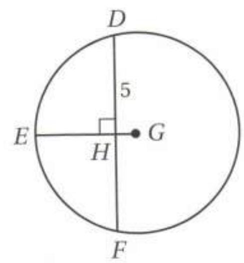
تنصيف الأقواس والأوتار

يكوّن المنصف العمودي للوتر نوعًا خاصًا من العلاقات بين القطع المستقيمة والأقواس.

الأمثلة 5-3 تبيّن كيفية استعمال النظريات لإيجاد قياسات عناصر الدائرة.

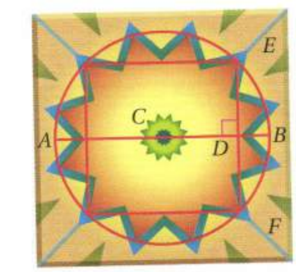
مثالان إضافيان

3 في $\odot G$، $m\widehat{DEF} = 150°$. فأوجد $m\widehat{DE}$.



$m\widehat{DE} = 75°$

4 **بلاط السيراميك:** في بلاطة السيراميك الآتية طول القطر $\overline{AB}$ يساوي 18 in، وطول الوتر $\overline{EF}$ يساوي 8 in. أوجد CD.

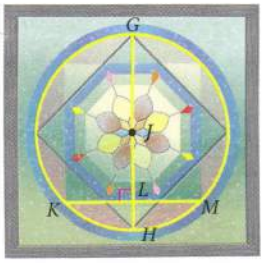


$CD = \sqrt{65} \approx 8.06$ in

الربط مع الحياة

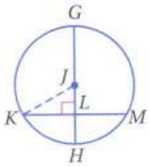
نوافذ: عند صناعة نوافذ الزجاج الملوّن فإن الزجاج يُسخّن إلى درجة حرارة 2000°، حتى يصبح لزجًا، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لونًا.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطر العمودي على الوتر



زجاج ملون: يبين الشكل المجاور تصميمًا على نافذة ذات زجاج ملوّن، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله 30 in، $\overline{KM}$ وترًا طوله 22 in، فأوجد JL.

الخطوة 1: ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيتكوّن $\triangle JKL$ القائم الزاوية.

الخطوة 2: أوجد JK, KL.

بما أن $GH = 30$، فإن $JH = 15$ in، وبما أن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة، فإن $JK = 15$ in.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$، فإن $\overline{GH}$ يُنصّف الوتر $\overline{KM}$ وفق النظرية 8.3.
إذن $KL = \frac{1}{2}(22) = 11$ in.

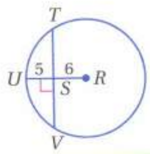
الخطوة 3: أوجد JL باستعمال نظرية فيثاغورس.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$11^2 + JL^2 = 15^2$	$KL = 11$, $JK = 15$
$121 + JL^2 = 225$	بالتبسيط
$JL^2 = 104$	بطرح 121 من كلا الطرفين
$JL = \sqrt{104}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

إذن $JL = \sqrt{104} \approx 10.20$ in.

تحقق من فهمك

4) أوجد TV في $\odot R$ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **18.44 وحدة**



إرشادات للدراسة

رسم القطع المستقيمة يمكنك إضافة أي معلومة معروفة إلى الشكل؛ لمساعدتك على حل السؤال. ففي المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

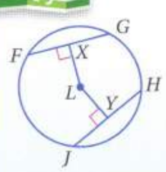
بالإضافة إلى النظرية 8.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

نظرية 8.5

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$.

أضف إلى مطويتك

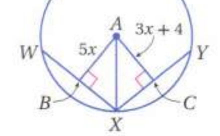


سوف تبرهن النظرية 8.5 في السؤالين 25, 26

إرشادات للمعلم الجديد

توضيح المعطيات على الشكل: ضع أي معلومة معطاة على الشكل للمساعدة في حل المسألة، فيمكنك إضافة زوايا و أطوال القطع المستقيمة والأقواس وأنصاف الأقطار والأقطار لأنها قد لا تكون موجودة على الشكل. وذكّر الطلاب أيضًا بوجوب اتباع الخصائص الهندسية والتعريفات عند إضافة عناصر على الشكل.

مثال 5 الأوتار المتساوية البُعد عن المركز



جبر: في $\odot A$ إذا كان $WX = XY = 22$ ، فأوجد AB .

بما أن الوترين $\overline{WX}, \overline{XY}$ متطابقان. فإن بعديهما عن A متساويان.

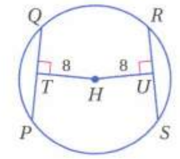
إذن $AB = AC$.

$AB = AC$

بالتعويض $5x = 3x + 4$

بالتبسيط $x = 2$

إذن $AB = 5 \times (2) = 10$



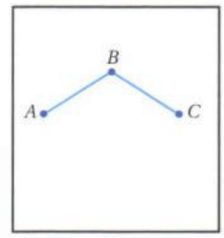
✓ **تحقق من فهمك**

5) في $\odot H$ إذا كان $RS = 14$ ، $PQ = 3x - 4$ ، فأوجد قيمة x . **6**

يمكنك استعمال النظرية 8.4 لإيجاد النقطة التي تبعد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

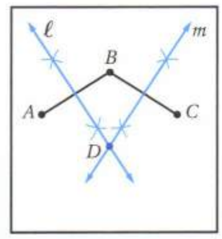
إنشاءات هندسية: الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1:



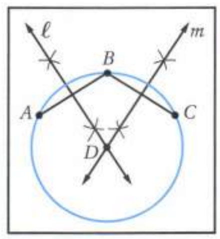
ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

الخطوة 2:



أنشئ العمودين ℓ, m المنصفين للقطعتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.
وسمِّ نقطة تقاطعهما D .

الخطوة 3:

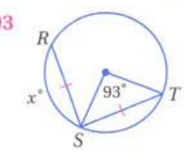


المستقيمان ℓ, m يحويان قطرين في الدائرة المارة بالنقاط الثلاث بحسب النظرية 8.4 ، ونقطة تقاطعهما هي مركز الدائرة . ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمر بالنقاط A, B, C .

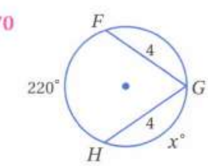
✓ تأكـد

المثالان 1 , 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

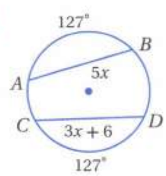
(1 **93**



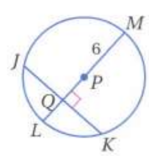
(2 **70**



(3 **3**



المثالان 3 , 4 في $\odot P$ ، إذا كان $JK = 10$, $m\widehat{JLK} = 134°$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:



(4 $m\widehat{JL}$ **67°**

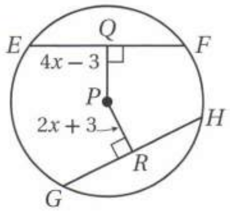
(5 PQ **3.32**

المحتوى الرياضي

القطاع الدائري والقطعة الدائرية: تحدد الزاوية المركزية والقوس المقابل لها قطاعًا دائريًّا. ويحدد الوتر في الدائرة والقوس الذي يصل طرفي هذا الوتر جزءًا من الدائرة يسمى القطعة الدائرية. يُلاحظ أنه يتشكل دائمًا مثلث متطابق الضلعين عند رسم الوتر ونصفي القطرين المارين بطرفيه.

مثال إضافي

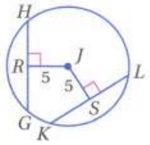
5 **جبر:** في $\odot P$، إذا كان $EF = GH = 24$. فأوجد PQ.



$PQ = 9$

الدرس 3-8 الأقواس والأوتار 93

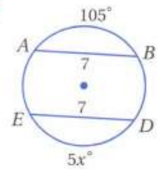
مثال 5 **6)** في $\odot J$ ، إذا كان $GH = 9, KL = 4x + 1$ ،
فأوجد قيمة x . **2**



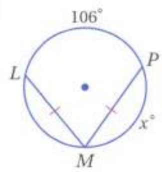
تدرب وحل المسائل

المثالان 1 ، 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

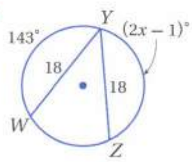
7) **21**



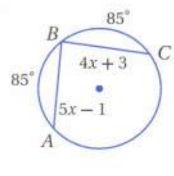
8) **127**



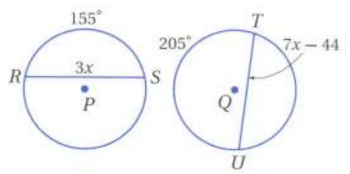
9) **72**



10) **4**



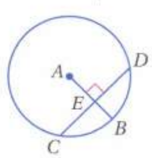
11) $\odot P \cong \odot Q$ **11**



المثالان 3 ، 4 إذا كان طول نصف قطر $\odot A$ يساوي 14 و $CD = 22$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

12) CE **11**

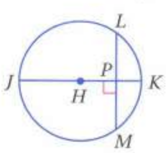
14) EB **5.34**



إذا كان طول قطر $\odot H$ يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84$. فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

13) $m\widehat{LK}$ **42°**

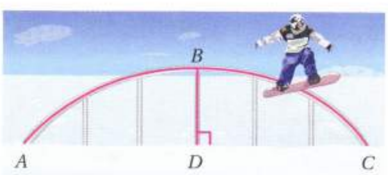
15) HP **6.71**



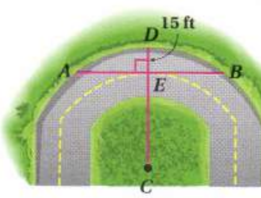
الربط مع الحياة

في مناطق التزلج، يتم تثبيت سكّة تمكن المتزلجين من القيام بحركات بهلوانية.

16) **تزلج:** تأخذ سكة التزلّج في الشكل المجاور شكل قوس من دائرة، حيث $\overline{BD}$ جزء من قطرها. إذا كان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$؟ **57.6°**



17) **طُرق:** الحافة الخارجية للطريق المنحنية المبيّنة في الشكل المجاور جزء من $\odot C$ التي نصف قطرها 88 ft.
أوجد AB مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر. **98.3 ft**



3 التدريب

التقويم التكويني

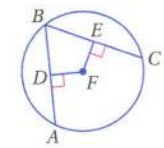
تعمل التمارين 1–6 للتأكد من فهم
لاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه
صفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب
سب مستوياتهم .

تنويع الواجبات المنزلية

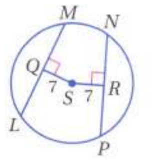
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7–19 ، 30–38
ضمن المتوسط	7–19 فردي ، 21–26 ، 30–38
فوق المتوسط	21–36 ، (اختياري: 37 ، 38)

مثال 5

18) **جبر:** في $\odot F$، إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، $DF = 3x - 7, FE = x + 9$، فأوجد قيمة x. **8**



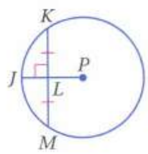
19) **جبر:** في $\odot S$، إذا كان $LM = 16, PN = 4x$، فأوجد قيمة x. **4**



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

20) **المعطيات:** $\overline{KM} \perp \overline{JP}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overline{JP}$ يُنصّف كلًّا من $\overline{KM}, \widehat{KM}$. **انظر ملحق الإجابات**

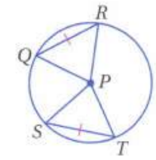


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين: **22 ,21) انظر الهامش**

21) برهانًا حرًّا للجزء الثاني من النظرية 8.2،

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ في $\odot P$.

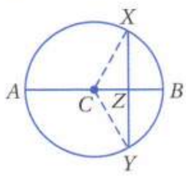
المطلوب: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



22) برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.3،

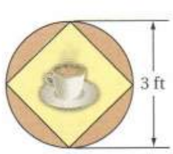
المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{XY}$ في $\odot C$.

المطلوب: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}, \widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



23) **تصميم:** صمّم زيد شعارًا لمقهى كما في الشكل المجاور. إذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟

23) قياس كل قوس °90 وطول كل وتر 2.12 ft.



24) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.4. **26–24) انظر ملحق الإجابات.**

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 8.5 في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

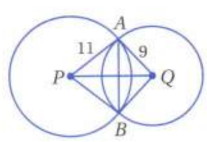
25) إذا تساوى بعدا وترين في دائرة عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

26) إذا تطابق وتران في دائرة، فإن بعديهما عن مركزها متساويان.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تحدٍّ:** الوتر $\overline{AB}$ المشترك بين $\odot P, \odot Q$ يعامد القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين. إذا كان $AB = 10$، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضّح ذلك.

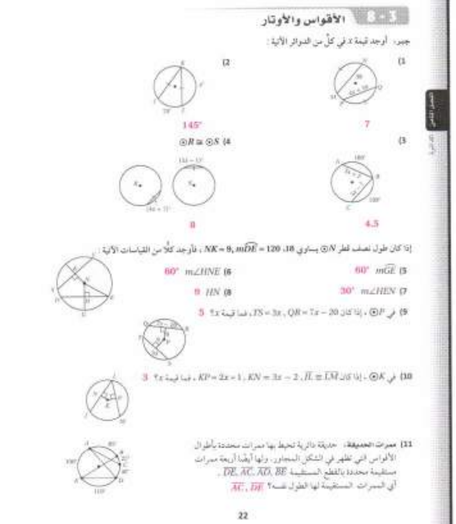
27) انظر ملحق الإجابات.



28) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة و $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X، فهل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟

28) صحيحة أحيانًا؛ إذا كان القطر عموديًّا على الوتر فإنه يُنصّفه.

كتاب التمارين، ص (22)



إجابات:

21) البرهان:

بما أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة فإن $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$، ومن المعطيات تعلم أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$، إذن $\triangle PQR \cong \triangle PST$ حسب SSS. إذن، $\angle QPR \cong \angle SPT$. لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

ولأن للزوايا المركزية القياس نفسه فإن للأقواس المقابلة لها القياس نفسه أيضًا ومن ثم فهي متطابقة ولذلك فإن $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$.

22) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\odot C, \overline{AB} \perp \overline{XY}$ (معطيات)

2) $\overline{CX} \cong \overline{CY}$ (أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

3) $\overline{CZ} \cong \overline{CZ}$ (خاصية الانعكاس)

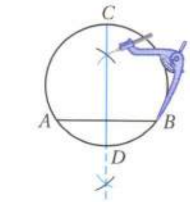
4) $\angle XZC, \angle YZC$ قائمتان. (تعريف المستقيمين المتعامدين)

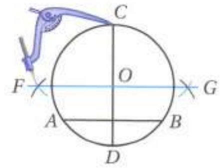
5) $\triangle XZC \cong \triangle YZC$ (HL)

6) $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}, \angle XCZ \cong \angle YCZ$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

7) $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$ (إذا تطابقت زاويتان مركزيتان، فإن القوسين المقابلين لهما متطابقان)

29) **تحدٍّ:** يوضح الإنشاء الهندسي أدناه طريقة تعيين مركز دائرة معطاة. **انظر ملحق الإجابات**





الخطوة 1: ارسم الوتر $\overline{AB}$ وأنشئ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.

الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$. سمِّ نقطة تقاطع العمودين O.

a) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمر بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

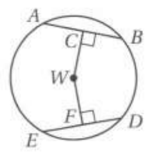
إرشادات للدراسة

البرهان غير المباشر
تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان بالتناقض تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى نتيجة تناقض المعطيات أو حقيقة مثبتة من قبل أو مسلمة أو تعريف.

30) **اكتب:** إذا أصبح طول قوس في دائرة ثلاثة أمثال طوله الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلًا يؤيد استنتاجك. **انظر ملحق الإجابات**

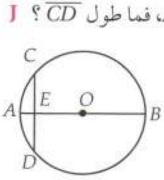
تدريب على الاختبار المعياري

31) إذا كان $CW = WF, ED = 30$ ، فأوجد DF؟ **D**



A 60
B 45
C 30
D 15

32) في $\odot O$ ، AB قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$ ، ويقطعه في النقطة E. إذا كان $OB = 10$ ، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$ ؟ **J**

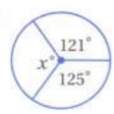


F 4
G 6
H 8
J 12

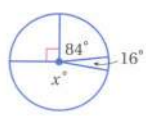
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-8)

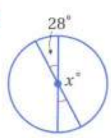
33) **114**



34) **170**



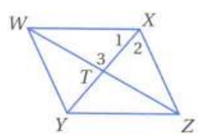
35) **152**



36) **حرف يدوية:** صمّمت شيماء مخططًا لتطريز 10 وردات على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كل منها 3.5 in . ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع، فتشكّلت 10 وردات لكل منها خمس بتلات. كم بوصة طول الشريط الذهبي الذي تحتاج إليه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب بوصة. (الدرس 1-8) **275 in**

استعد للدرس اللاحق

جبر: أجب عن السؤالين الآتيين مستعينًا بالمعين $WXYZ$:



37) إذا كان $m\angle 3 = (y^2 - 31)^\circ$ ، فأوجد y . **±11**

38) إذا كان $m\angle XZY = 56^\circ$ ، فأوجد $m\angle YWZ$. **28**

تنبيه لحل سؤال
الفرجار والمسطرة:
يتطلب السؤال 29 استعمال فرجار ومسطرة.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة يشرحون فيها كيف ساعدهم درس قياس الزوايا والأقواس على فهم درس الأقواس والأوتار.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة رسم دائرتين على ورقة، ورسم وترٍ في أي مكان في الدائرة الأولى، ثم اطلب إليهم أن يرسموا العمود المنصّف لهذا الوتر. أما بالنسبة للدائرة الثانية، فاطلب إليهم أن يرسموا قطعتين مستقيمتين من مركز الدائرة بحيث يكون الوتران العموديان على هاتين القطعتين متطابقين.
انظر أعمال الطلاب.

8-4 الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

فيما سبق:
درستُ إيجاد قياس الزوايا الداخلية للمضلعات.

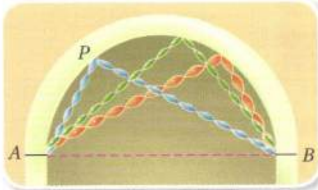
والآن:
- أجد قياسات الزوايا المحيطية.
- أجد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

المفردات:
الزاوية المحيطية
inscribed angle
القوس المقابل
intercepted arc

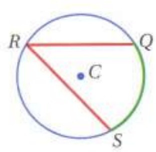
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تعلو مدخل قاعة احتفالات قنطرة على شكل نصف دائرة. زُيِّن هذا المدخل بأشرطة ملونة بحيث ثُبِّت أحد طرفي كل شريط عند النقطة A، والطرف الآخر عند النقطة B. ثم رفعت الأشرطة، وتم تثبيت كل منها عند نقطة مختلفة على القنطرة مثل P، كما في الشكل المجاور.

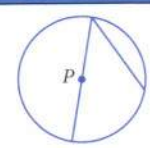
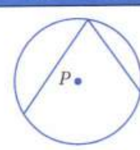
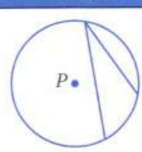


الزوايا المحيطية: لاحظ أن الزوايا المتكوّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P. **الزاوية المحيطية** هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة. فالزاوية $\angle QRS$ هي زاوية محيطية في $\odot C$.



القوس المقابل للزاوية المحيطية هو قوس يقع داخل الزاوية المحيطية، ويقع طرفاه على ضلعيها. القوس الأصغر $\widehat{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المقابل للزاوية QRS.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

في الحالة الأولى يكون أحد ضلعَي الزاوية المحيطية قطرًا للدائرة

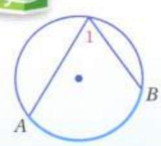
والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

نظرية 8.6 نظرية الزاوية المحيطية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}\ ,\ m\widehat{AB} = 2m\angle 1$



سوف تبرهن النظرية 8.6 للحالتين الثانية والثالثة للزاوية المحيطية في السؤالين 29 ,28 على الترتيب

8-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-4
إيجاد قياسات الزوايا الداخلية للمضلعات.

الدرس 8-4
إيجاد قياسات الزوايا المحيطية.
إيجاد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

ما بعد الدرس 8-4
استعمال خصائص المماسات لحل مسائل تتضمن مضلعات تحيط بدوائر.

2 التدريس

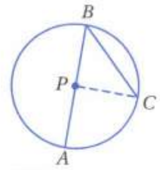
أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- ما نوع القوس المتكون من أعلى المدخل والشريط الأفقي؟ نصف دائرة
- إذا كان قياس القوس من النقطة B إلى النقطة المثبت عندها الشريط على القنطرة تساوي °60. فما قياس القوس من النقطة A إلى النقطة المثبت عندها الشريط على القنطرة؟ °120
- أفرض أن عرض مدخل القاعة يساوي 3 ft. كيف يمكنك إيجاد طول القوس الذي يعلو المدخل؟ نصف القطر يساوي نصف عرض هذا الباب، أو 18 in. وبما أن القوس عبارة عن نصف دائرة، فإن قياسه يساوي °180. عوّض نصف القطر وقياس القوس في قانون حساب طول القوس.
$. \ell = \frac{180}{360} \cdot 2\pi(18)$

مصادر الدرس 8-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (199)	• تنويع التعليم ص (198, 199, 203)	• تنويع التعليم ص (198, 203)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (23)	• كتاب التمارين ص (23)	• كتاب التمارين ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة الأولى)



المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$.

المطلوب: $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$.	**1)** كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا.
2) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	**2)** أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
3) $\triangle PBC$ متطابق الضلعين.	**3)** تعريف المثلث المتطابق الضلعين
4) $m\angle B = m\angle C$	**4)** نظرية المثلث المتطابق الضلعين
5) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	**5)** نظرية الزاوية الخارجية
6) $m\angle APC = 2m\angle B$	**6)** بالتعويض (الخطوتان 4, 5)
7) $m\widehat{AC} = m\angle APC$	**7)** تعريف قياس القوس
8) $m\widehat{AC} = 2m\angle B$	**8)** بالتعويض (الخطوتان 6, 7)
9) $2m\angle B = m\widehat{AC}$	**9)** خاصية التماثل للمساواة
10) $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	**10)** خاصية القسمة للمساواة

مثال 1 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات

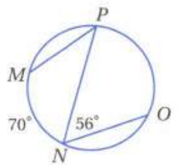
أوجد القياسين الآتيين مستعملًا الشكل المجاور:

a) $m\angle P$

$$m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{MN} = \frac{1}{2}(70°) = 35°$$

b) $m\widehat{PO}$

$$m\widehat{PO} = 2m\angle N = 2(56°) = 112°$$

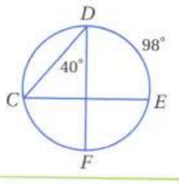


تحقق من فهمك

أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:

1A) $m\widehat{CF}$ $80°$

1B) $m\angle C$ $49°$



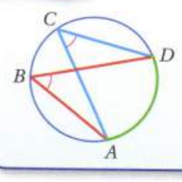
هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيتين اللتين تقابلان القوس نفسه في دائرة.

نظرية 8.7

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **إذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.**

مثال: $\angle B, \angle C$ تقابلان $\widehat{AD}$ ، إذن $\angle B \cong \angle C$.



سوف تبرهن النظرية 8.7 في السؤال 30

الزوايا المحيطية

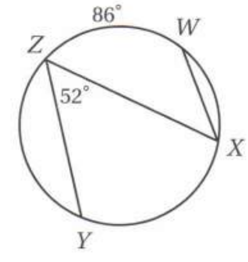
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية إيجاد قياسات الزوايا المحيطية وكتابة براهين باستعمال النظريات الخاصة بالزوايا المحيطية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

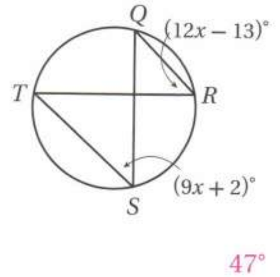
1 أوجد كلًا من القياسين الآتيين مستعملًا الشكل أدناه.



a) $m\angle X$ $43°$

b) $m\widehat{YX}$ $104°$

2 **جبر:** أوجد $m\angle R$ مستعملًا الشكل أدناه.



$47°$

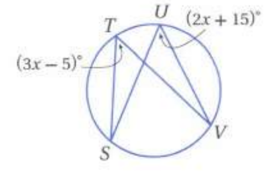
تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: يتضمن الدرس 4-8 براهين تحوي عدة حالات. حدّد أمثلة أخرى مستعينًا بكتب هندسية متقدمة أو الانترنت للنظريات التي تستعمل هذا النوع من البراهين. وذلك لمساعدة الطلاب الموهوبين على تطوير قدراتهم وتحسين فهمهم وإدراكهم للأسباب التي تستدعي الأخذ بعين الاعتبار حالات متعددة عند إثبات بعض النظريات.

مثال 2 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات

جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملًا الشكل المجاور.



$\angle T \cong \angle U$	$\angle U$, $\angle T$ كلاهما تقابلان $\widehat{SV}$
$m\angle T = m\angle U$	تعريف تطابق الزوايا
$3x - 5 = 2x + 15$	بالتعويض
$x = 20$	بالتبسيط

إذن $m\angle T = (3(20) - 5)^\circ = 55^\circ$.

✓ **تحقق من فهمك**

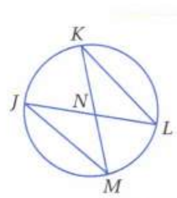
2) إذا كان $m\angle V = (x + 16)^\circ$ ، $m\angle S = (3x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه. 24°

مثال 3 استعمال الزوايا المحيطية في البراهين

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

المطلوب: $\triangle JMN \cong \triangle KLN$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$	1) معطيات
2) $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	2) إذا كانت الأقواس الصغرى متطابقة؛ فإن الأوتار المناظرة لها تكون متطابقة أيضًا.
3) $\angle M$ تقابل $\widehat{JK}$ $\angle L$ تقابل $\widehat{JK}$	3) تعريف القوس المقابل.
4) $\angle M \cong \angle L$	4) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة.
5) $\angle JNM \cong \angle KNL$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة.
6) $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	6) AAS

✓ **تحقق من فهمك** انظر الهامش

3) اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$, $\widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة: للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

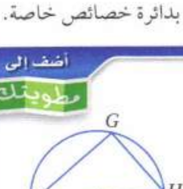
النظرية 8.8

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال: إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90^\circ$.

إذا كان $m\angle G = 90^\circ$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.



سوف تبرهن النظرية 8.8 في السؤال 31

إرشادات للدراسة

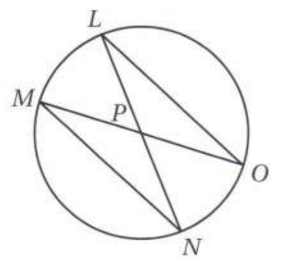
المضلعات المحاطة بدائرة يكون المضلع محاطًا بدائرة إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة نفسها.

مثال إضافي

3 اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\widehat{LO} \cong \widehat{MN}$

المطلوب: $\triangle MNP \cong \triangle LOP$



العبارات (المبررات)

1) $\widehat{LO} \cong \widehat{MN}$ (معطيات)

2) $\overline{LO} \cong \overline{MN}$ (إذا كانت الأقواس الصغرى متطابقة ، فإن الأوتار المناظرة لها تكون متطابقة)

3) $\angle M$ تقابل $\widehat{NO}$ و $\angle L$ تقابل $\widehat{NO}$. (تعريف القوس المحدود)

4) $\angle M \cong \angle L$ (الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه تكون متطابقة)

5) $\angle MPN \cong \angle OPL$ (الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة)

6) $\triangle MNP \cong \triangle LOP$ (AAS)

إجابة (تحقق من فهمك):

3) **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}, \widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$ (معطيات)

2) $m\widehat{QR} = m\widehat{ST}, m\widehat{PQ} = m\widehat{PT}$ (تعريف تطابق الأقواس)

3) $\frac{1}{2}m\widehat{QR} = \frac{1}{2}m\widehat{ST},$ $\frac{1}{2}m\widehat{PQ} = \frac{1}{2}m\widehat{PT}$ (خاصية الضرب)

4) $m\angle QPR = \frac{1}{2}m\widehat{QR},$ $m\angle TPS = \frac{1}{2}m\widehat{ST},$ $m\angle QRP = \frac{1}{2}m\widehat{PQ}$ $m\angle TSP = \frac{1}{2}m\widehat{PT}$ (نظرية الزوايا المحيطية)

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون: اختر أمثلة تُغطي كل مفهوم من مفاهيم هذا الدرس وقدمها للطلاب، بحيث يجلس كل طالب منفردًا ويحل هذه الأسئلة. واطلب إليهم وَضْعَ ملاحظاتهم حول الأسئلة التي يجدون صعوبة في حلها. وشجّعهم على إعادة قراءة الأمثلة والنظريات التي تساعدهم على فهم الأسئلة وحلها .

5) $m\angle QPR = m\angle TPS, m\angle QRP = m\angle TSP$ (بالتعويض)

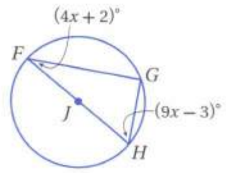
6) $\angle QPR \cong \angle TPS, \angle QRP \cong \angle TSP$ (تعريف تطابق الزوايا)

7) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ (الأقواس المتطابقة تحددها أوتار متطابقة)

8) $\triangle PQR \cong \triangle PTS$ (AAS)

مثال 4 إيجاد قياسات زوايا المثلث المحاط بدائرة

جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملًا الشكل المجاور.



$\triangle FGH$ قائم الزاوية؛ لأن $\angle G$ محيطية تقابل نصف دائرة.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$(4x+2)° + 90° + (9x-3)° = 180°$	بالتعويض
$(13x)° + 89° = 180°$	بالتبسيط
$13x = 91$	بطرح 89 من كلا الطرفين
$x = 7$	بقسمة كلا الطرفين على 13

إذن $m\angle F = (4(7)+2)° = 30°$.

تحقق من فهمك

4) إذا كان $m\angle F = (7x+2)°$, $m\angle H = (17x-8)°$، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل أعلاه. **4**

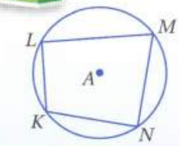
يمكنك إحاطة مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية بدائرة إلا أن أنواعًا معينة فقط من الأشكال الرباعية يمكنك إحاطتها بدائرة.

نظرية 8.9

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.



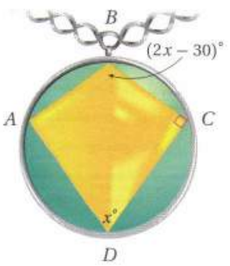
سوف تُبرهن النظرية 8.9 في السؤال 27

إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية
يمكن إثبات نظرية 8.9 بإثبات أن القوسين المقابلين لكل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرة يكوّنان دائرة كاملة.

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد قياسات الزوايا

مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل على جوهرة بصورة مضلع رباعي محاط بدائرة، أوجد $m\angle A, m\angle B$.

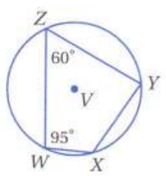


بما أن $ABCD$ شكل رباعي محاط بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

$m\angle A + m\angle C = 180°$	$m\angle B + m\angle D = 180°$
$m\angle A + 90° = 180°$	$(2x-30)° + x° = 180°$
$m\angle A = 90°$	$(3x)° - 30° = 180°$
	$3x = 210$
	$x = 70$

إذن $m\angle A = 90°$, $m\angle B = (2(70)-30)° = 110°$.

تحقق من فهمك



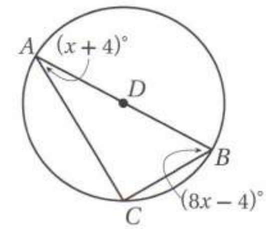
5) المضلع $WXYZ$ شكل رباعي محاط بـ $\odot V$.
أوجد $m\angle X, m\angle Y$. **$120°; 85°$**

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة

المثالان 5 ,4 يبيِّنان كيفية إيجاد قياسات زوايا المضلع المحاط بدائرة باستعمال نظريتين 8.9 ,8.8.

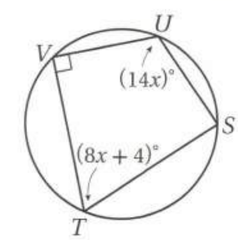
مثالان إضافيان

جبر: أوجد $m\angle B$ مستعملًا الشكل أدناه.



$m\angle B = 76°$

شارات: الشارة علامة مميزة تدل على مرتبة أو عمل الشخص في حقل ما أو عضويته أو إنجازاته. والشارة المبيّنة أدناه هي شكل رباعي محاط بدائرة. أوجد $m\angle S, m\angle T$.



$m\angle S = 90°$
$m\angle T = 68°$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: هناك إستراتيجية أخرى يمكن استعمالها؛ لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة؛ وتعتمد على مجموع قياسات الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي. إذ يمكن إيجاد قياس الزاوية المجهولة، بطرح مجموع قياسات الزوايا الثلاث الأخرى من $360°$.

التعليم باستعمال التقنيات

إنترنت: اطلب إلى الطلاب البحث في الانترنت عن تطبيق تفاعلي للزوايا المحيطية. واطلب إليهم استكشاف المفهوم بسحب الزاوية لملاحظة كيفيّة تغيّر قياس القوس.

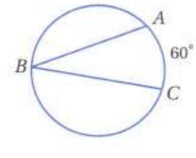
المحتوى الرياضي

النقاط الدائرية: النقاط التي تقع على دائرة واحدة تسمى نقاطًا دائرية وأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تكون دائمًا دائرية. أي أنه يوجد دائمًا دائرة واحدة تحوي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة. ويُسمى الشكل الرباعي دائريًا إذا وُجدت دائرة تمر برؤوسه الأربعة. ولكي يكون الشكل الرباعي دائريًا يجب أن تكون كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين.

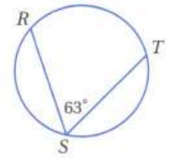
تأكـد

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

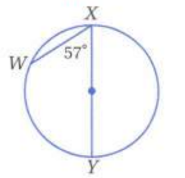
(1 $m\angle B$ 30°



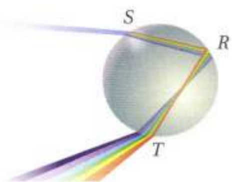
(2 $m\widehat{RT}$ 126°



(3 $m\widehat{WX}$ 66°

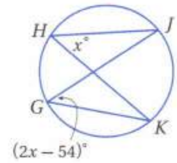


(4 **علوم:** يُبيّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة مطر لإنتاج ألوان الطيف. فإذا كان $m\widehat{ST} = 144^\circ$، فما قيمة $m\angle R$؟ 72°

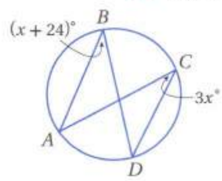


المثال 2 **جبر:** أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

(5 $m\angle H$ 54°



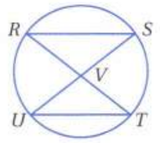
(6 $m\angle B$ 36°



المثال 3 **(7** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر الهامش

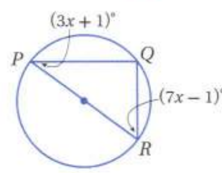
المعطيات: $\overline{RT}$ تُنصِّف $\overline{SU}$.

المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

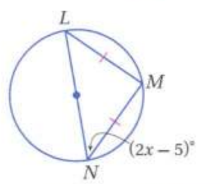


المثالان 4, 5 **جبر:** أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

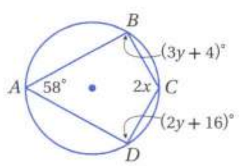
(8 $m\angle R$ 62°



(9 x 25°



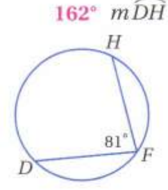
(10 $m\angle C, m\angle D$ $122^\circ; 80^\circ$



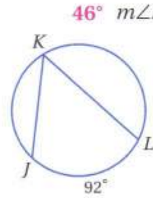
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

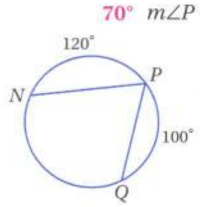
(11 $m\widehat{DH}$ 162°



(12 $m\angle K$ 46°



(13 $m\angle P$ 70°



3 التدريب

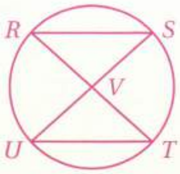
التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-10 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة:

7) المعطيات: $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$.

المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$



البرهان:

العبارات: (المبررات)

1) $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$. (معطيات)

2) $\overline{SV} \cong \overline{VU}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

3) $\angle SRT$ تقابل $\widehat{ST}$.
$\angle SUT$ تقابل $\widehat{ST}$.
(تعريف القوس المقابل)

4) $\angle SRT \cong \angle SUT$
(الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه متطابقة)

5) $\angle RVS \cong \angle UVT$
(الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة)

6) $\triangle RVS \cong \triangle UVT$ (AAS)

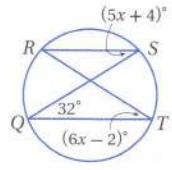
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11–26 ، 33–36 ، 38–48
ضمن المتوسط	11–27 فردي ، 29–36 ، 38–48
فوق المتوسط	27–46 ، (اختياري: 47, 48)

المثال 2 **جبر:** أوجد كل قياس ممّا يأتي:

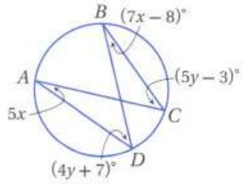
14) $m\angle R$ **32**

16) $m\angle S$ **34**

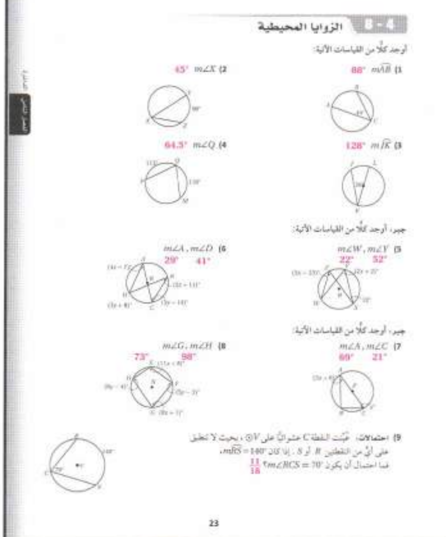


15) $m\angle A$ **20**

17) $m\angle C$ **47**



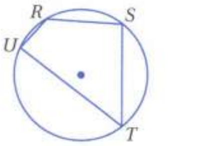
كتاب التمارين، ص (23)



المثال 3 18) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. **انظر ملحق الإجابات.**

المعطيات: $m\angle T=\frac{1}{2}m\angle S$

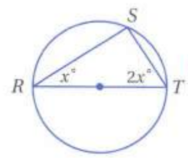
المطلوب: $m\widehat{TUR}=2m\widehat{URS}$



المثال 4 **جبر:** أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

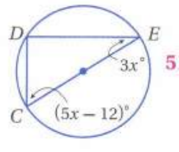
19) x **30**

21) $m\angle T$ **60°**



20) x **12.75**

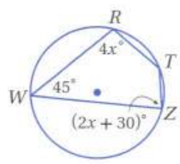
22) $m\angle C$ **51.75°**



المثال 5 **جبر:** أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

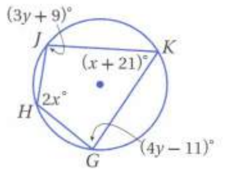
23) $m\angle T$ **135°**

25) $m\angle Z$ **80°**



24) $m\angle H$ **106°**

26) $m\angle G$ **93°**



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.9 . **انظر ملحق الإجابات.**

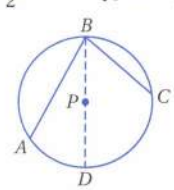
برهان برهن النظرية 8.6 لحالتي الزاوية المحيطية في الدائرة فيما يأتي:

28) الحالة الثانية **انظر ملحق الإجابات.**

المعطيات: يقع المركز P داخل $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC=\frac{1}{2}m\widehat{AC}$

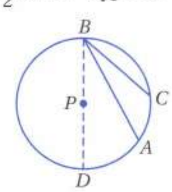


29) الحالة الثالثة **انظر الهامش**

المعطيات: يقع المركز P خارج الزاوية $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC=\frac{1}{2}m\widehat{AC}$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكل من النظريتين الآتيتين: **انظر ملحق الإجابات**

30) النظرية 8.7 ، برهانًا ذا عمودين.

31) النظرية 8.8 ، برهانًا حرًّا.

إجابة:

29) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $m\angle ABC=m\angle DBC-m\angle DBA$
(مسلمة جمع الزوايا، خاصية الطرح)

2) $m\widehat{AC}=m\widehat{DC}-m\widehat{DA}$ (مسلمة جمع الأقواس. خاصية الطرح)

3) $\frac{1}{2}m\widehat{AC}=\frac{1}{2}m\widehat{DC}-\frac{1}{2}m\widehat{DA}$
(خاصية الضرب)

4) $m\angle DBA=\frac{1}{2}m\widehat{DA},$
$m\angle DBC=\frac{1}{2}m\widehat{DC}$
(قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرًا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها (الحالة 1)).

5) $m\angle ABC=\frac{1}{2}m\widehat{DC}-\frac{1}{2}m\widehat{DA}$
((بالتعويض (الخطوتان 4 ,1))

6) $m\angle ABC=\frac{1}{2}(m\widehat{DC}-m\widehat{DA})$
(خاصية التوزيع)

7) $m\angle ABC=\frac{1}{2}m\widehat{AC}$
((بالتعويض (الخطوتان 3 ,6))

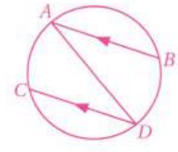
32) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذا السؤال العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) هندسيًا: ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ مستعملًا الفرجار، ثم صل A, D برسم $\overline{AD}$.

b) عدديًا: أوجد $m\angle A$, $m\angle D$ مستعملًا المنقلة. ثم حدّد $m\widehat{AC}$, $m\widehat{BD}$. ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسّر إجابتك.

c) لفظيًا: ارسم دائرة أخرى وكرّر الخطوتين **a** , **b** . ضع تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

(32a



(32b إجابة ممكنة:
$m\angle A = 30°$, $m\angle D = 30°$; $m\widehat{AC} = 60°$, $m\widehat{BD} = 60°$ ؛ القوسان متطابقان؛ لأن قياسيهما متساويان.

(32c إجابة ممكنة: يحصر الوتران المتوازيان في الدائرة قوسين متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدّد ما إذا كان يمكن إحاطة كلّ من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمكن أبدًا. برّر إجابتك. **36–33) انظر ملحق الإجابات**

33) المربع **34)** المستطيل **35)** المعين **36)** شكل الطائرة الورقية

37) **تحدٍّ:** إذا كان مربع محاطًا بدائرة، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟ $\frac{\pi}{2}$

38) **اكتب:** إذا كان مثلث قائم زواياه °90−°45−°45 محاطًا بدائرة، وأُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولَي ساقَي هذا المثلث. **انظر ملحق الإجابات**

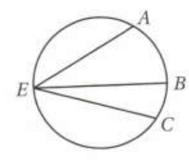
39) **مسألة مفتوحة:** أوجد شعارًا من واقع الحياة يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة، وارسمه.

39) انظر إجابات الطلاب.

40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة. وإذا كانت هاتان الزاويتان تقابلان القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟ **انظر ملحق الإجابات**

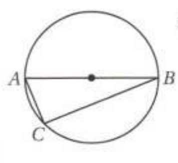
تدريب على الاختبار المعياري

41) إذا كان $m\widehat{AC} = 160$ ، $m\angle BEC = 38$ ، فأوجد قيمة $m\angle AEB$ مستعملًا الدائرة المجاورة: **A**



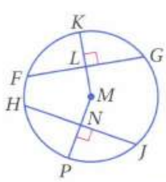
A 42 **B** 61 **C** 80 **D** 84

42) **إجابة قصيرة:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة المجاورة، وAC يساوي 8 in ، و BC يساوي 15 in . أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.
$d = 17$ in, $r = 8.5$ in, $C = 17\pi \approx 53.4$ in



مراجعة تراكمية

إذا كان $m\widehat{HP} = 65$, $HJ = 48$, $FL = 24$ ، فأوجد كل قياس ممّا يأتي مستعملًا $\odot M$: (الدرس 3-8)



43) FG 48 **44)** $m\widehat{PJ}$ 65°

45) NJ 24 **46)** $m\widehat{HJ}$ 130°

استعد للدرس اللاحق

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. استعمل المعلومات المعطاة في كلّ ممّا يأتي لإيجاد القياسات المجهولة:

47) $AB = 4x - 5$, $BC = 11 + 2x$, $AC = ?$ 54

48) $AB = 10s + 2$, $AC = 49 + 5s$, $BC = ?$ 32

تنبيه لحل سؤال

الفرجار والمنقلة والمسطرة:
يتطلب السؤال 32 استعمال فرجار، ومنقلة ومسطرة.

تمثيلات متعددة:
في السؤال 32 ، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية، والقياسات، والوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

4 التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة توضح كيف يساعدهم الدرس 4-8 ، حول الزوايا المحيطية، على فهم مماسات الدائرة.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرسين 4−8 ,3−8 ، بإعطائهم:

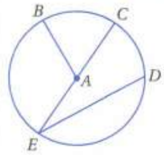
الاختبار القصير 2، ص (68)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا الفرق بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية والعلاقة بين قياسيهما إذا كانتا تقابلان القوس نفسه. رأس الزاوية المركزية هو مركز الدائرة وضلعاها يحتويان نصفي قطرين للدائرة. بينما يقع رأس الزاوية المحيطية على الدائرة وضلعاها يحتويان وترين في الدائرة. قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية التي تقابل القوس نفسه.

أجب عن الأسئلة 4 - 1، مستعينًا بالدائرة $\odot A$. (الدرس 1-8)



1) سمِّ الدائرة. $\odot A$

2) سمِّ قطرًا. $\overline{EC}$

3) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{ED}$

4) **دراجة هوائية:** قطر إطار دراجة هوائية يساوي 24 in. (الدرس 1-8)

a) أوجد محيط إطار الدراجة. 75.4 in.

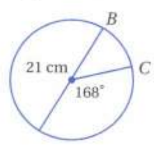
b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟ 7540 in.

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المعطى محيطها في كل من السؤالين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-8)

5) $C = 23$ cm 7.3 cm; 3.7 cm

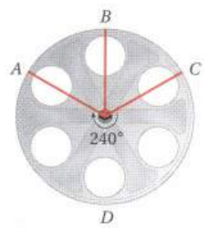
6) $C = 78$ ft 24.8 ft; 12.4 ft

7) **اختيار من متعدد:** أوجد طول $\widehat{BC}$ في الشكل أدناه: (الدرس 2-8)
B



A 18°
B 2.20 cm
C 168°
D 30.79 cm

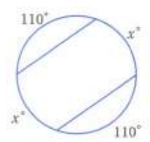
8) **أفلام:** قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه 14.5 in. (الدرس 2-8)



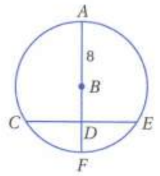
a) أوجد $m\widehat{ADC}$. 240°

b) أوجد طول $\widehat{ADC}$. 30.4 in.

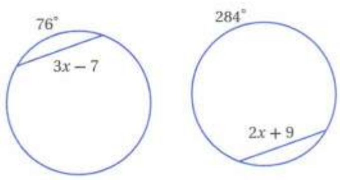
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 3-8) 70



10) في $\odot B$، إذا كان $CE = 13.5$، فأوجد BD مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-8) 4.29



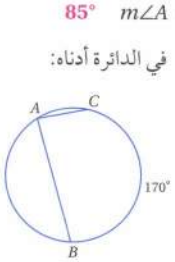
11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 3-8) $x = 16; 41$



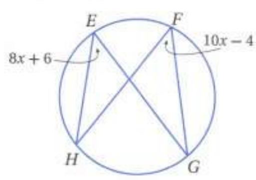
أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-8)

12) $m\widehat{TU}$ في الدائرة أدناه: 46°

13) $m\angle A$ في الدائرة أدناه: 85°



14) **اختيار من متعدد:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه: (الدرس 3-8) G



F 1.8
G 5
H 46
J 90

15) رُسم مربع طول ضلعه 14 cm بحيث تقع رؤوسه على دائرة. ما قطر هذه الدائرة؟ (الدرس 4-8) $14\sqrt{2}$ cm

الفصل 8 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

الأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها عند كل سؤال.

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (70)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس من 1-8 إلى 4-8.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 1-8 إلى 4-8.		تدريبات إعادة التعليم، ص (21, 16, 11, 6).
	تدريبات المهارات، ص (23, 18, 13, 8).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

8-5 المماسات
Tangents

فيما سبق:
درستُ استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

والآن:
- أستعمل خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحل مسائل تتضمّن المضلعات المحيطة بدائرة.

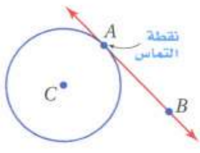
المفردات:
المماس
tangent
نقطة التماس
point of tangency
المماس المشترك
common tangent

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

كانت الدراجات الهوائية تُحرّك سابقًا بدفع القدم على الأرض. أمّا الدّراجات الحديثة فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، حيث تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتَي تماس السلسلة مع الترسين.

المماسات: **المماس** هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطة واحدة فقط، تُسمّى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمّى كل من $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ أيضًا مماسًا للدائرة.

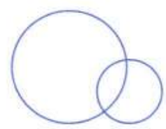


المماس المشترك هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسه. في الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F , G .

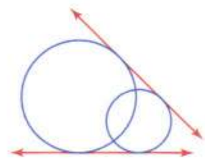
مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كل مما يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

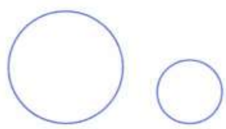
(a



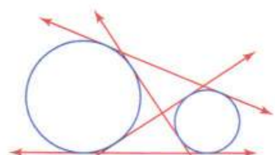
هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان



(b



هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة



تحقق من فهمك

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كل مما يأتي. وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". انظر الهامش

(1A

(1B

8-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

قبل الدرس 5-8

استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

الدرس 5-8

استعمال خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.

حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.

ما بعد الدرس 5-8

إيجاد قياس الزوايا المتكونة من المستقيمات التي تتقاطع مع الدائرة.

2 التدريس

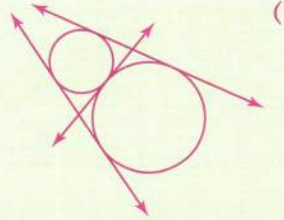
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

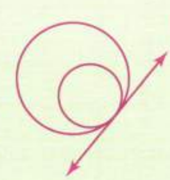
اسأل:
- ما الشكل الذي تمثله التروس؟ دائرة
- كيف تشبه السلسلة في الدراجة الهوائية مماس الدائرة؟
  إنها تصل بين الدائرتين بمستقيم.
- كيف تختلف السلسلة عن المماس؟
  السلسلة تمس التروس في أكثر من نقطة، بينما المماس مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط.

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A



(1B



مصادر الدرس 5-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (208)	• تنويع التعليم ص (207, 208)	• تنويع التعليم ص (207)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (24)	• كتاب التمارين ص (24)	• كتاب التمارين ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

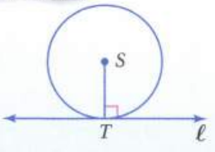
أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

النظرية 8.10

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًا لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

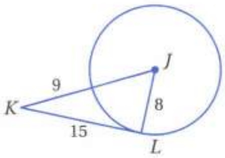
مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\ell \perp \overline{ST}$.



سوف تبرهن جزأي النظرية 8.10 في السؤالين 25 ,24

مثال 2 تحديد المماس

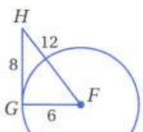
$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$. حدّد ما إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًا لـ $\odot J$ أم لا، برّر إجابتك.



اختبر ما إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8+9)^2$	نظرية فيثاغورس
$289 = 289$ ✓	بالتبسيط

لذا فإن $\triangle JKL$ قائم الزاوية في $\angle JLK$. أي أن $\overline{KL}$ عمودية على $\overline{JL}$ عند النقطة L . وبحسب النظرية 8.10 يكون $\overline{KL}$ مماسًا لـ $\odot J$.



تحقق من فهمك لا؛ $100 \neq 324$

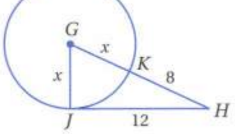
2) حدّد ما إذا كان $\overline{GH}$ مماسًا لـ $\odot F$ أم لا. برّر إجابتك.

يمكنك استعمال النظرية 8.10 لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3 استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

$\overline{JH}$ مماس لـ $\odot G$ عند J . أوجد قيمة x .

وفقًا للنظرية 8.10، يكون $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$ ، إذن $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.

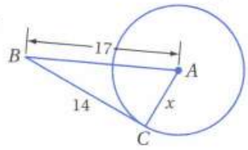


$GJ^2 + JH^2 = GH^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 144 = (x+8)^2$	$GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$
$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$	بالضرب
$80 = 16x$	بالتبسيط
$5 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 16

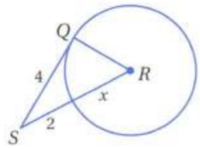
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًا للدائرة، هي مماس فعلًا.

(3A $\sqrt{93} \approx 9.64$

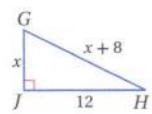


(3B 3



إرشادات لحل المسألة

حل مسألة أبسط يمكنك استعمال استراتيجية حل مسألة أبسط برسم المثلث القائم دون الدائرة وتسميته. يُبيّن الشكل أدناه رسم المثلث في المثال 3 .



المماسات

الأمثلة 4-1 تبيّن كيفية استعمال نظريات المماس لحل مسائل تتضمن مماسات.

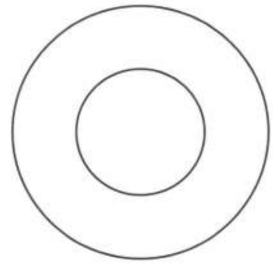
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

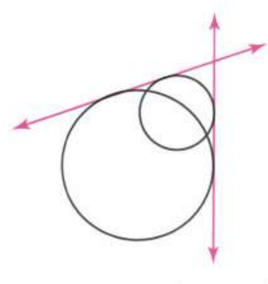
1 أنقل كلًّا من الأشكال الآتية وارسم المماسات المشتركة، وفي حالة عدم وجود مثل هذه المماسات، فاكتب لا يوجد مماس مشترك.

(a

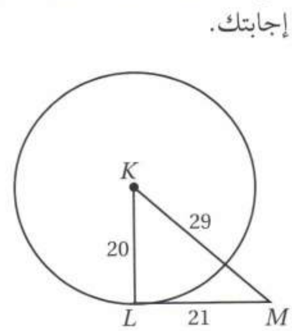


لا يوجد مماس مشترك

(b



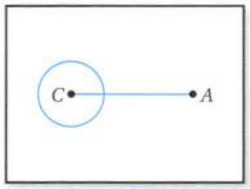
2 $\overline{KL}$ نصف قطر في $\odot K$. حدد هل $\overline{LM}$ مماساً لهذه الدائرة. برر إجابتك.



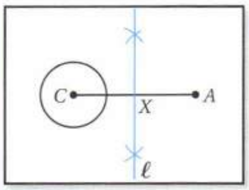
$\overline{LM}$ مماس للدائرة K حسب عكس نظرية فيثاغورس.

يمكنك استعمال النظريتين 8.10 , 8.8 لإنشاء مماسات الدائرة.

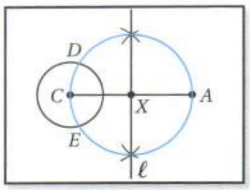
إنشاء هندسي — إنشاء مماس لدائرة من نقطة خارجها



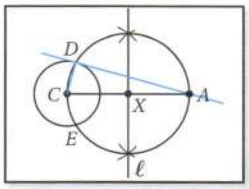
الخطوة 1: ارسم الدائرة C مستعملًا الفرجار وحدّد نقطة A خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف لـ $\overline{CA}$ وسمه ℓ . وسمّ نقطة تقاطع ℓ مع $\overline{CA}$ النقطة X .



الخطوة 3: أنشئ الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$. وسمّ نقطتَي تقاطع الدائرتين D, E .



الخطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{AD}, \overline{DC}$. $\angle ADC$ تقابل قطرًا للدائرة X ؛ إذن فهي زاوية قائمة؛ لذا فإن $\overleftrightarrow{AD}$ مماس للدائرة C .

سوف تنشئ مماسًا لدائرة من نقطة عليها في السؤال 26

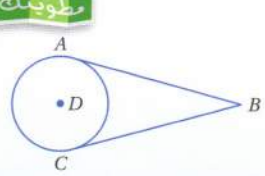
يمكنك أن ترسم مماسين للدائرة نفسها من نقطة واحدة خارجها.

نظرية 8.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

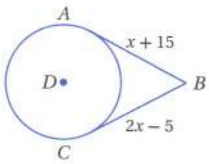
مثال: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان لـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



سوف تبرهن النظرية 8.11 في السؤال 22

مثال 4 استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد قياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان للدائرة D ، فأوجد قيمة x .

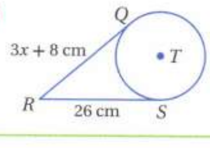


$AB = CB$	المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان
$x + 15 = 2x - 5$	بالتعويض
$15 = x - 5$	بطرح x من كلا الطرفين
$20 = x$	بإضافة 5 لكلا الطرفين

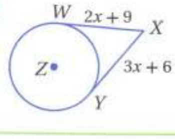
تحقق من فهمك

جبر: أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماس فعلًا.

(4A 6



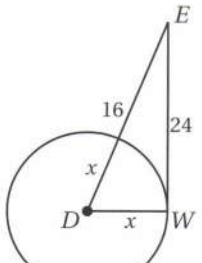
(4B 3



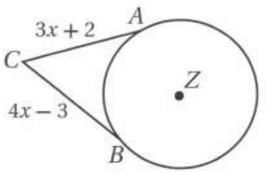
مثالان إضافيان

3 في الشكل أدناه، $\overline{WE}$ مماس للدائرة D عند النقطة W . أوجد قيمة x .

$x = 10$



4 **جبر:** $\overline{AC}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة Z من النقطة C . أوجد قيمة x .



$x = 5$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون: نظّم الطلاب في مجموعات صغيرة. واشرح لهم أن شركة ما تريد أن تسّوق لعبة قاعدتها دائرية الشكل قطرها 5 in . مهمتهم تصميم صندوق توضع بداخله اللعبة بحيث يأخذ الصندوق أقل مساحة ممكنة من رف العرض، وتكون جوانبه مسطحة وليست دائرية. ثم اطلب إليهم أن يرسموا اللعبة الدائرية و الصندوق الذي يحيط بها وأن يسجلوا القياسات على الرسم. إذا كانت أبعاد رف العرض هي 3 ft × 10 ft ، فكم صندوقًا يمكن عرضه من طبقة واحدة على هذا الرف؟ وما شكل صندوق اللعبة الذي يسمح بعرض العدد الأكبر من اللُعَب على الرف؟ 168؛ متوازي مستطيلات

المضلّعات المحيطة بدائرة: يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًّا للدائرة.

مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

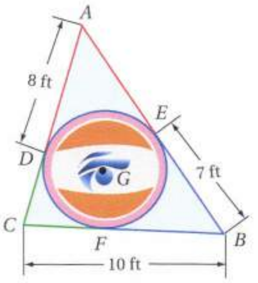
تنبيه !

تحديد المضلّعات المحيطة بدائرة

إذا مسّت الدائرة بعض أضلاع المضلع ولم تمسها جميعها، فلا يُعدُّ المضلع محيطًا بالدائرة، وهذا ما يتضح في الجدول.

يمكنك استعمال النظرية 8.11 لإيجاد قياسات مجهولة في المضلّعات المحيطة بدائرة.

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة



تصميم مصور: صمم منصور الشعار المبيّن في الشكل المجاور.

إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G، فأوجد محيطه.

الخطوة 1: أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G، فإن $\overline{AE}, \overline{AD}$ مماسان للدائرة $\odot G$، وكذلك $\overline{BE}, \overline{BF}$، $\overline{CF}, \overline{CD}$ مماسات أيضًا.

إذن $\overline{AE} \cong \overline{AD}, \overline{BF} \cong \overline{BE}, \overline{CF} \cong \overline{CD}$

لذا فإن $AE = AD = 8$ ft, $BF = BE = 7$ ft.

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن $CF + FB = CB$

إذن $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3$ ft؛ لذا فإن $CD = CF = 3$ ft.

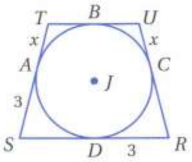
الخطوة 2: أوجد محيط $\triangle ABC$.

المحيط يساوي:

$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36ft.

تحقق من فهمك



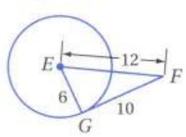
5) الشكل الرباعي $RSTU$ محيط بالدائرة J، إذا كان محيطه 18 وحدة، فأوجد قيمة x. **1.5 وحدة**

تأكد

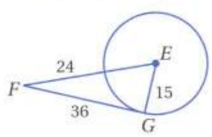
المثال 1 1) ارسم المماسات المشتركة للدائرتين المجاورتين، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". **لا يوجد مماس مشترك**

المثال 2 حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ في كل من الشكلين الآتيين مماسًّا للدائرة E أم لا. وبرّر إجابتك.

(2



(3



2) لا؛ $136 \neq 144$

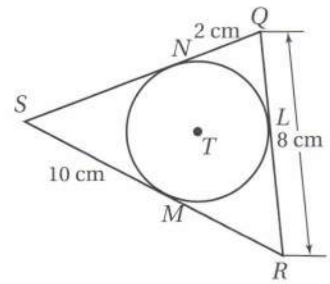
3) نعم؛ $1521 = 1521$

المضلعات التي تحيط بدائرة

يمكن للمضلعات أيضًا أن تحيط بدائرة. **مثال 5** يبيّن كيفية إيجاد محيط المثلث باستعمال النظريات المعروضة في هذا الدرس.

مثال إضافي

5 تغليف: تباع قطع بسكويت دائرية مغلفة بأغلفة مثلثية الشكل. إذا أحاط $\triangle QRS$ الدائرة T، فأوجد محيط $\triangle QRS$.



36 cm

المحتوى الرياضي

المماسات: وضح للطلاب أنه بالرغم من أن المماس يقطع الدائرة، إلا أنه لا يقع أي جزء منه داخلها. والنقطة الوحيدة المشتركة بين الدائرة والمماس هي نقطة التماس فقط.

تنويع التعليم

دون ضمن

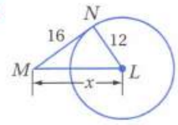
توسّع: رُسمت دائرة حول مربع، وكان نصف قطرها يساوي r. اطلب إلى الطلاب كتابة عبارة تمثل محيط المربع بدلالة r. $4r\sqrt{2} \approx 5.66r$

التعليم باستعمال التقنيات

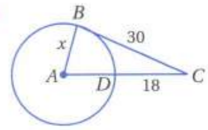
مدوّنة: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة في مدوّنة الفصل لمناقشة الأسباب التي تجعل رسم مضلع منتظم يحيط بالدائرة ممكنًا دائمًا. وأن يدرك الطلاب أنه كلما زاد عدد أضلاع المضلع كان شكله أقرب إلى شكل الدائرة.

المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

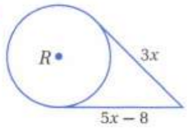
4) **20**



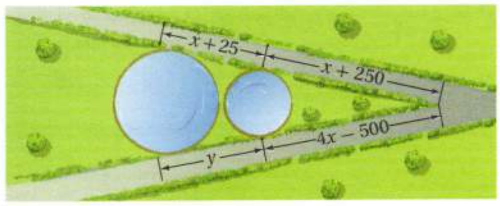
5) **16**



6) **4**



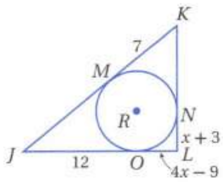
7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال المعطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كلّ من x و y. **$x = 250; y = 275$**



المثال 5 8) **جبر:** يُحيط المثلث JKL بالدائرة R.

a) أوجد قيمة x. **4**

b) أوجد محيط $\triangle JKL$. **52 وحدة**



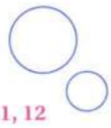
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كل مما يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

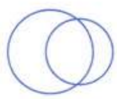
9) **انظر الهامش**

10) **لا يوجد مماس مشترك**

11)



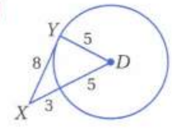
12)



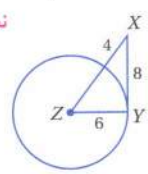
11, 12) انظر الهامش

المثال 2 حدّد ما إذا كانت $\overline{XY}$ مماسًا للدائرة المعطاة في كل من السؤالين الآتيين أم لا، وبرّر إجابتك.

13) **لا؛ $89 \neq 64$**

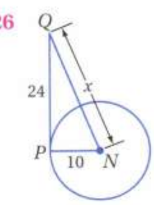


14) **نعم؛ $100 = 100$**

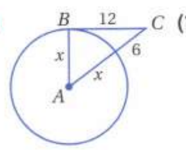


المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. قرِّب إجابتك إلى أقرب عُشر.

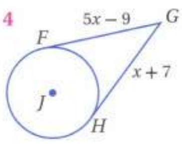
15) **26**



16) **9**



17) **4**



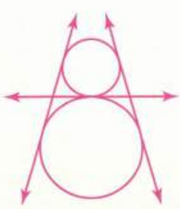
3 التدريب

التقويم التكويني

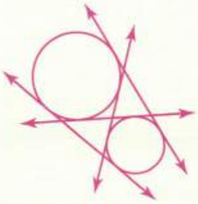
استعمل التمارين 8-1 للتحقق من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

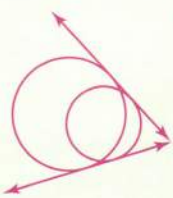
(9



(11



(12

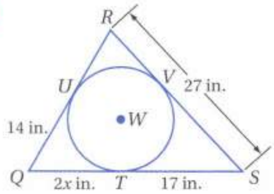


تنويع الواجبات المنزلية

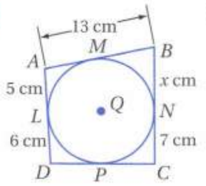
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9–19، 28–41
ضمن ضمن المتوسط	9–21 فردي، 22–26، 28–41
فوق فوق المتوسط	20–38، (اختياري: 39–41)

المثال 5 أوجد قيمة x، ثم أوجد محيط المضلّع في كل من السؤالين الآتيين:

(18 7; 82 in

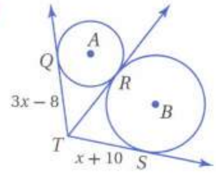


(19 8; 52 cm

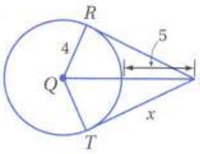


أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(20 9

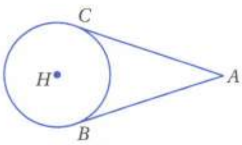


(21 8.06



اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

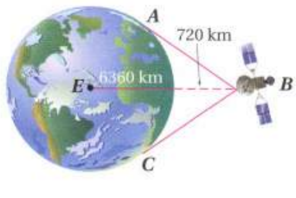
22) برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.11 انظر ملحق الإجابات

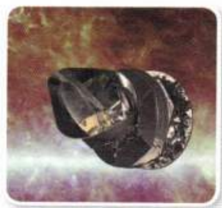


المعطيات: $\overline{AC}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة C.
$\overline{AB}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة B.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

23) **أقمار صناعية:** يرتفع قمر صناعي مسافة 720 km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km . ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}, \overline{BC}$ من سطح الأرض.
أوجد BA مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. 3110.76 km

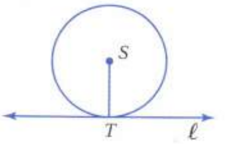




الربط مع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الصناعية ومخلفاتها التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km في الثانية تقريبًا.

24) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماسًّا للدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف قطرها (الجزء 1 من النظرية 8.10)

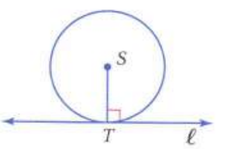


المعطيات: ℓ مماس للدائرة S عند T؛ $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$). انظر الهامش

25) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عموديًّا على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقائهما على الدائرة؛ فإنه مماس لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 8.10) انظر ملحق الإجابات



المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$ ، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن ℓ مماس للدائرة S .

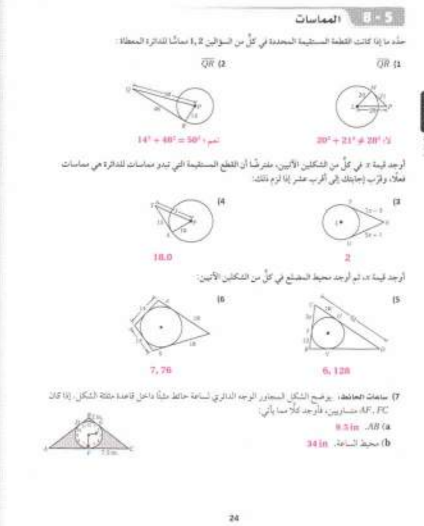
(إرشاد: افترض أن ℓ ليس مماسًا للدائرة S).

إرشادات للدراسة

تحديد المماسات

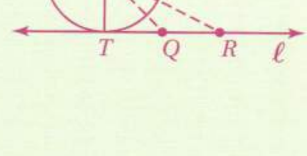
لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك إلا إذا طُلب إليك ذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة أو أن تكون الأطوال المبيّنة على الشكل تؤكد أن الزاوية قائمة.

كتاب التمارين، ص (24)



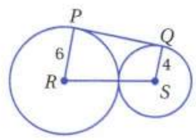
إجابات:

24) البرهان: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$. إذا لم يكن ℓ عموديًّا على $\overline{ST}$ ، فإنه يوجد قطعة مستقيمة $\overline{SQ}$ أخرى تكون عمودية على ℓ. وأيضًا يوجد نقطة R على $\overrightarrow{TR}$ كما يظهر في الشكل أدناه بحيث إن $\overline{QT} \cong \overline{QR}$. $\angle SQT, \angle SQR$ قائمتان من تعريف التعامد، ولذلك $\angle SQT \cong \angle SQR$، $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$. إذن $\triangle SQT \cong \triangle SQR$ حسب SAS، لذا فإن $\overline{ST} \cong \overline{SR}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وبناءً عليه فإن كلًّا من T, R تقع على $\odot S$. لكن وجود نقطتين تقعان على ℓ وأيضًا تقعان على $\odot S$ أمرٌ يناقض الحقيقة المعطاة بأن ℓ مماس للدائرة $\odot S$ عند النقطة T. إذن، $\ell \perp \overline{ST}$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



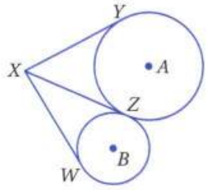
26) **إنشاءات هندسية:** أنشئ مماسًّا لدائرة من نقطة واقعة عليها باتباع الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملًا الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$، ثم أنشئ قطعة مستقيمة تكون عمودية على $\overleftrightarrow{AP}$ تمر بالنقطة P، وسمِّ المماس المستقيم t. وفسّر كل خطوة. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا



27) **تحدٍّ:** $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R, S كما في الشكل المجاور. أوجد PQ. وبرِّر إجابتك. انظر الهامش

28) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا يُحيط بدائرة، ومثلثًا محاطًا بدائرة. انظر الهامش



29) **تبرير:** $\overline{XY}, \overline{XZ}$ مماسان للدائرة A. $\overline{XZ}, \overline{XW}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور. فسّر كيف يمكن أن تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}, \overline{XZ}, \overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفَي قطرَي الدائرتين مختلفان.

30) **اكتب:** ما عدد مماسات الدائرة التي يمكن رسمها من نقطة خارجها، ومن نقطة عليها، ومن نقطة داخلها؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

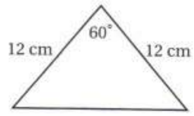
29) مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها متطابقان، وفق النظرية **8.11**. لذا فإن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ وكذلك $\overline{XZ} \cong \overline{XW}$. إذن $\overline{XY} \cong \overline{XZ} \cong \overline{XW}$.

تدريب على الاختبار المعياري

31) نصف قطر $\odot P$ يساوي $10\ cm$، و $\overline{ED}$ مماس لها عند D، وتقع F على $\odot P$ وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24\ cm$، فما طول $\overline{EF}$؟ **B**

A 10 cm	**C** 21.8 cm
B 16 cm	**D** 26 cm

32) ما محيط المثلث المجاور؟ **C**

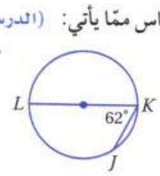


A 24 cm	**C** 36 cm
B 34.4 cm	**D** 104 cm

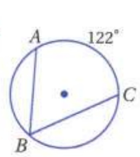
مراجعة تراكمية

أوجد كلَّ قياس ممّا يأتي: (الدرس 8-4)

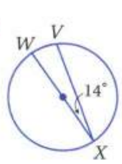
33) $m\widehat{JK}$ **56°**



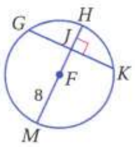
34) $m\angle B$ **61°**



35) $m\widehat{VX}$ **152°**



في $\odot F$، إذا كان $m\widehat{GHK} = 142°$، $GK = 14$، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس 8-3)



36) $m\widehat{GH}$ **71°**

37) JK **7**

38) $m\widehat{KM}$ **109°**

استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

39) $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **110**

40) $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **18**

41) $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$ **58**

تنبيه لحل سؤال

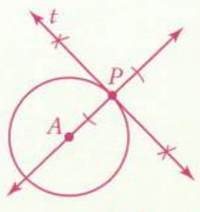
الفرجار والمسطرة: يتطلب السؤالان 28 ,26 استعمال فرجار ومسطرة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: قدّم مثالًا على السبورة لمثلث يتكون من المماس و نصف القطر و المستقيم المرسوم من مركز الدائرة إلى نقطة واقعة على المماس. ثم ضع أطوالًا على الشكل وحدّد مجهولًا. واطلب إلى الطلاب كتابة المعادلة اللازمة لإيجاد قيمة المجهول وأن يقدموا الإجابة قبل مغادرتهم غرفة الصف.

إجابات:

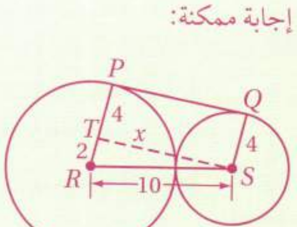
26) إجابة ممكنة:



a) أرسم $\overleftrightarrow{AP}$ (أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط)

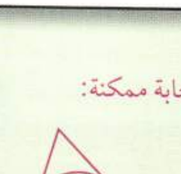
b) أنشئ عمودًا على $\overleftrightarrow{AP}$ عند P. (المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس).

27) إجابة ممكنة:



باستعمال نظرية فيثاغورس ينتج أن $2^2 + x^2 = 10^2$، إذن $x \approx 9.8$.
وبما أن $TPQS$ مستطيل، فإن $PQ = x = 9.8$.

28) إجابة ممكنة:



مثلث يحيط بدائرة

مثلث مُحاط بدائرة

30) يمكن رسم مماسين من نقطة خارج الدائرة. في حين يمكن رسم مماس واحد فقط من نقطة على الدائرة. بينما لا يمكن رسم أي مماس من نقطة داخل الدائرة لأن المستقيم المار بداخل الدائرة يقطعها في نقطتين.

8-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكونة من مماسات الدائرة.

الدرس 8-6

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 8-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة االمتكونة من تقاطع مستقيمين داخل الدائرة أوخارجها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما النسبة المئوية للقياس $180°$ من الدائرة؟ 50%
- إذا كانت زاوية الرؤية لآلة تصوير $50°$، فكم درجةً تقل هذه الزاوية عن معدل زاوية الرؤية للإنسان؟ $130°$

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا
Secant, Tangent, and Angle Measures

فيما سبق:

إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكوّنة من مماسات للدائرة.

والآن:

- أجد قياسات الزوايا المتكوّنة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.
- أجد قياسات الزوايا المتكوّنة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

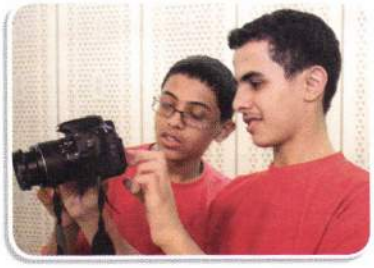
المفردات:

القاطع
secant

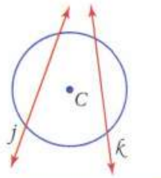
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

معدل مجال الرؤية عند الإنسان يساوي $180°$ تقريبًا. ولكن زاوية الرؤية في معظم آلات التصوير أضيق من ذلك بكثير، فتتراوح بين $20°$ و$50°$. وتُحدّد زاوية الرؤية في آلات التصوير مقدار ما يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على الفيلم من الأجسام المنحنية.



التقاطع على الدائرة أو في داخلها: **القاطع** هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط. فالمستقيمان j, k هما قاطعان للدائرة C.

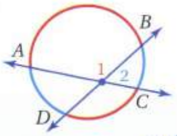


عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة؛ فإن الزوايا المتكوّنة ترتبط بالأقواس التي تقابلها.

نظرية 8.12

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



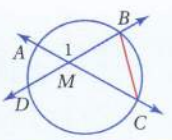
مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

برهان

المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة يتقاطعان داخلها في M.

المطلوب: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$

البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة يتقاطعان داخلها في M.	1) معطيات
2) $m\angle 1 = m\angle MBC + m\angle MCB$	2) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
3) $m\angle MBC = \frac{1}{2}m\widehat{DC}, m\angle MCB = \frac{1}{2}m\widehat{BA}$	3) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{DC} + \frac{1}{2}m\widehat{BA}$	4) بالتعويض
5) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{BA} + m\widehat{DC})$	5) خاصية التوزيع

مصادر الدرس 8-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (213, 214)	• تنويع التعليم ص (213, 214)	• تنويع التعليم ص (213, 214)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (25)	• كتاب التمارين ص (25)	• كتاب التمارين ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

في المثال 1b، يمكنك إيجاد $m\angle DEB$ بحساب مجموع قياسَي $\widehat{AC}, \widehat{BD}$ أولًا.

$m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$

$= 360° - (m\widehat{AC} + m\widehat{CD})$

$= 360° - (143 + 75)°$

$= 142°$

$m\angle DEB$

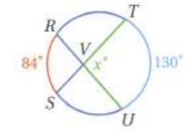
$= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$

$= \frac{1}{2}(142°) = 71°$

مثال 1 استعمال القاطعين أو الوترين المتقاطعين

أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية:

a)

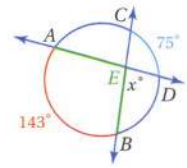


$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{UT})$ النظرية 8.12

$x° = \frac{1}{2}(84 + 130)°$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(214) = 107°$ بالتبسيط

b)



الخطوة 1: أوجد $m\angle AEB$.

$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$ النظرية 8.12

$= \frac{1}{2}(143 + 75)°$ بالتعويض

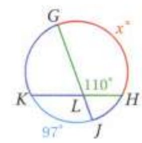
$= \frac{1}{2}(218) = 109°$ بالتبسيط

الخطوة 2: أوجد قيمة x، أي قياس $\angle DEB$.

$\angle AEB$ ، $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

$x° = 180° - 109° = 71°$

c)



$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{HG} + m\widehat{KJ})$ النظرية 8.12

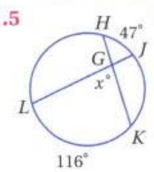
$110° = \frac{1}{2}(x + 97)°$ بالتعويض

$220° = (x + 97)°$ بضرب كلا الطرفين في 2

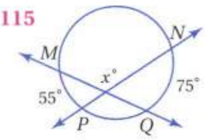
$123° = x°$ بطرح 97 من كلا الطرفين

✓ تحقق من فهمك

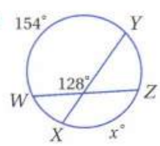
1A) 81.5



1B) 115



1C) 102



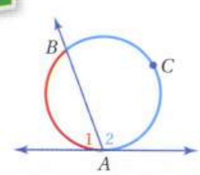
تذكّر النظرية 8.6، والتي تنص على أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها. وتبقى هذه النظرية صحيحة إذا كان أحد ضلعي الزاوية مماسًّا للدائرة.

نظرية 8.13

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ACB}$



سوف تبرهن النظرية 8.13 في السؤال 27

التقاطع على الدائرة أو في داخلها

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال نظريات هذا الدرس في إيجاد قياسات الزوايا الناتجة عن تقاطع قاطعين أو وترين داخل الدائرة أو عليها.

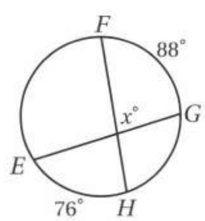
✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

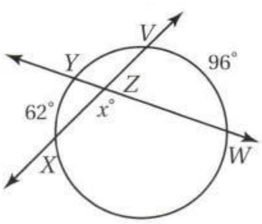
1 أوجد قيمة x في كل من الأشكال أدناه:

a)



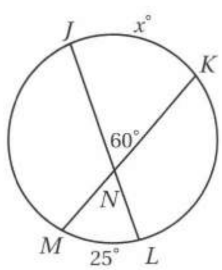
$x = 82$

b)



$x = 101$

c)



$x = 95$

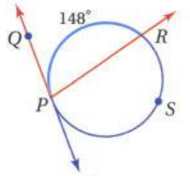
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيون: وضح للطلاب أن العلاقات التي ذُكرت وعُرِّفت في هذا الدرس هي علاقات تحدث في الطبيعة وفي حياتنا اليومية، وقد تم تعريفها وشرحها رياضيًا. وأخبرهم أن العلماء على اختلاف تخصصاتهم يستعملون هذه العلاقات لتفحص أشياء مختلفة كقطرة الماء أو فقاعة الصابون أو الخلايا أو الأحياء الدقيقة وما إلى ذلك من الأشياء الدائرية.

مثال 2 استعمال القاطع والمماس المتقاطعين

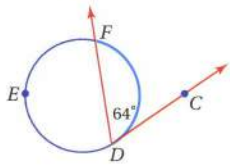
أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



a) $m\angle QPR$

$m\angle QPR = \frac{1}{2} m\widehat{PR}$ النظرية 8.13

$= \frac{1}{2}(148°) = 74°$ بالتعويض



b) $m\widehat{DEF}$

$m\angle CDF = \frac{1}{2} m\widehat{FD}$ النظرية 8.13

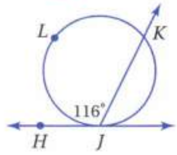
$64° = \frac{1}{2} m\widehat{FD}$ بالتعويض

$128° = m\widehat{FD}$ بضرب كلا الطرفين في 2

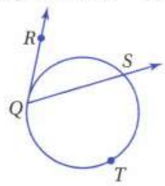
$m\widehat{DEF} = 360° - m\widehat{FD} = 360° - 128° = 232°$

تحقق من فهمك

2A) أوجد $m\widehat{JLK}$. **232°**



2B) إذا كان $m\widehat{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$. **61°**



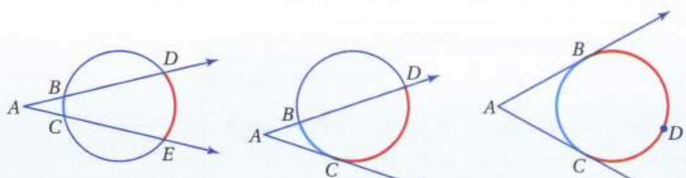
التقاطع خارج الدائرة: يمكن أن يتقاطع المماسان والقاطعان خارج الدائرة أيضًا. وهنا يرتبط قياس الزوايا المتكونة بقياسي القوسين المقابلين لها.

نظرية 8.14

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



مماسان	قاطع ومماس	قاطعان
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

سوف تبرهن النظرية 8.14 في الأسئلة 26–24

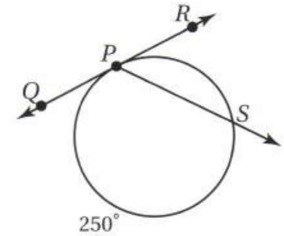
إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة
يمكن التعبير عن قياس $\angle A$ في الحالات جميعها بنصف القيمة المطلقة للفرق بين قياسَي القوسين، وهكذا لا يؤثّر ترتيب القوسين في نتيجة الحسابات.

مثال إضافي

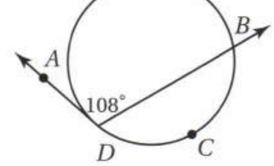
2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle QPS$



$m\angle QPS = 125°$

b) $m\widehat{BCD}$



$m\widehat{BCD} = 144°$

المحتوى الرياضي

الوتر مقابل القاطع: قد يسألك بعض الطلاب عن الفرق بين الوتر والقاطع، ولماذا يوجد تسميتان لشيء يقطع الدائرة في نقطتين. يتطلب هذا السؤال مراجعة موضوع القطعة المستقيمة التي هي جزء من مستقيم، وهكذا بالنسبة للوتر، فهو قطعة من القاطع، فالقاطع هو مستقيم يقطع الدائرة. أخبر الطلاب أن كل وتر يقع في قاطع وأن كل قاطع يحوي وترًا.

تنويع التعليم

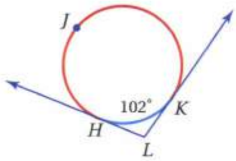
دون ضمن فوق

تنويع التعليم: امنح الطلاب الوقت الكافي لتكوين أمثلة على النظريات مثل نظرية 8.14، إذ أن هناك صعوبة في تذكر هذه النظريات. فعندما يرسم الطلاب أمثلتهم نجد أنه قد يسهل عليهم تذكر هذه النظريات، أو اشتقاق هذه العلاقات لاحقًا.

مثال 3 استعمال المماسات والقواطع التي تتقاطع خارج الدائرة

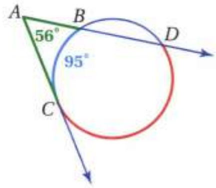
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle L$



النظرية 8.14	$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}[(360° - 102°) - 102°]$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(258° - 102°) = 78°$

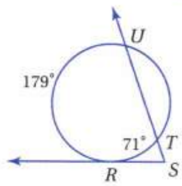
b) $m\widehat{CD}$



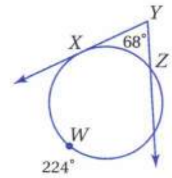
النظرية 8.14	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$
بالتعويض	$56° = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95°)$
بضرب كلا الطرفين في 2	$112° = m\widehat{CD} - 95°$
بإضافة 95 لكلا الطرفين	$207° = m\widehat{CD}$

✓ تحقق من فهمك

3A) $m\angle S$ $54°$



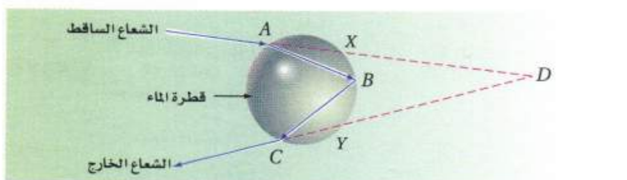
3B) $m\widehat{XZ}$ $88°$



يمكنك تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة، لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة

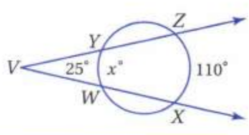
علوم: يُبيّن الشكل أدناه انكسار شعاع ضوء في قطرة ماء، وانحرافه عن مساره عند النقاط A, B, C. إذا كان $m\widehat{AC} = 128°$ و $m\widehat{XBY} = 84°$، فما قيمة $m\angle D$؟

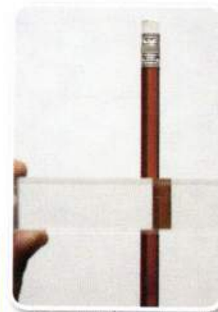


نظرية 8.14	$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XBY})$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}(128° - 84°)$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(44°) = 22°$

✓ تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. $60°$





الربط مع الحياة

يتفاوت معامل الانكسار من وسط إلى آخر. ويُعبَر عن معامل الانكسار N لوسط شفاف ما بالصيغة $N = \frac{c}{V}$، حيث c سرعة الضوء في الفراغ و V سرعة الضوء في ذلك الوسط.

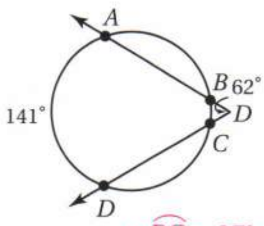
التقاطع خارج الدائرة

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية استعمال النظريات المتعلقة بالقاطع والمماس؛ لإيجاد قياس الزاوية الناتجة عن التقاطع خارج الدائرة.

مثالان إضافيان

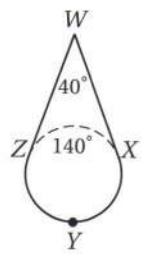
3 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\widehat{BC}$



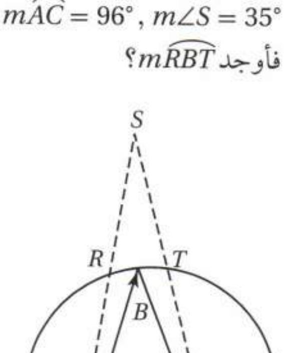
$m\widehat{BC} = 17°$

b) $m\widehat{XYZ}$



$m\widehat{XYZ} = 220°$

4 **فيزياء:** يبيّن الرسم الآتي مسار شعاع ضوئي عندما يسقط على قطعة من الماس. فيغير الشعاع مساره أو ينكسر عند النقاط A, B, C. إذا كان $m\widehat{AC} = 96°, m\angle S = 35°$، فأوجد $m\widehat{RBT}$؟



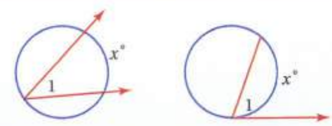
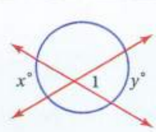
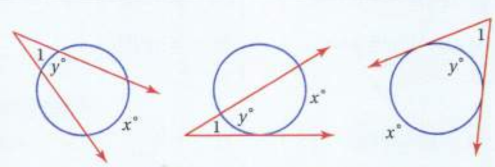
$m\widehat{RBT} = 26°$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل ضمن مجموعات لعمل مقطع تسجيل مرئي يوضحون خلاله النظريات الثلاث لحالات تقاطع القواطع والمماسات خارج الدائرة. اطلب إليهم تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين هذه النظريات.

ملخص المفهوم — الدائرة و علاقات الزوايا

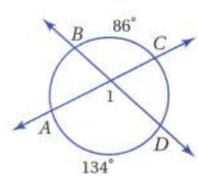
أضف إلى مطويتك

موقع رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		نصف قياس القوس المقابل $m\angle 1 = \frac{1}{2}x^\circ$
داخل الدائرة		نصف مجموع قياسي القوس المقابل للزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$
خارج الدائرة		نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$

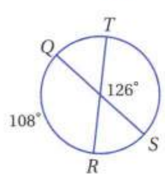
تأكد

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

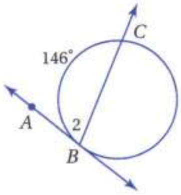
1) $m\angle 1$ **110°**



2) $m\widehat{TS}$ **144°**

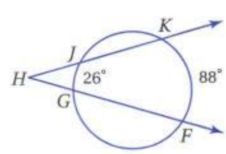


3) $m\angle 2$ **73°**

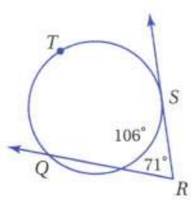


المثالان 3, 4

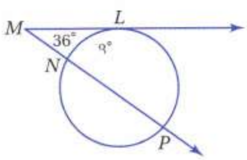
4) $m\angle H$ **31°**



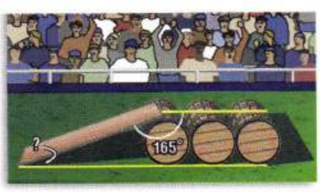
5) $m\widehat{QTS}$ **248°**



6) $m\widehat{LP}$ **150°**



7) **ألعاب بهلوانية:** ثُبِّت سطح مائل على البرميل الأول من مجموعة براميل رُبطت مع بعضها ليقدم عليها لاعب السيرك عروضه المثيرة على دراجة نارية. ما قياس الزاوية التي يصنعها السطح المائل مع الأرض؟ **15°**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 7-1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

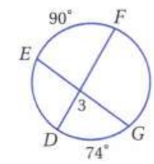
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	18–8 ، 29 ، 31 ، 42–32
ضمن ضمن المتوسط	19–9 فردي، 29–24 ، 31 ، 42–32
فوق فوق المتوسط	39–20 ، (اختياري: 42–40)

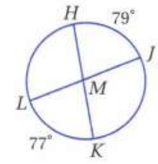
تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1 أوجد كلًّا من القياسات الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا.

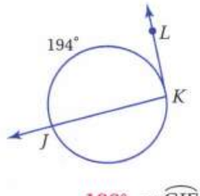
(8 $m\angle 3$ **$82°$**



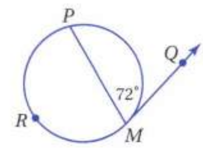
(9 $m\angle JMK$ **$102°$**



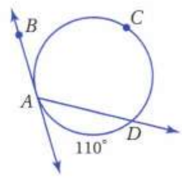
(10 $m\angle K$ **$97°$**



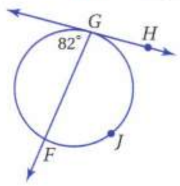
(11 $m\widehat{PM}$ **$144°$**



(12 $m\angle DAB$ **$125°$**



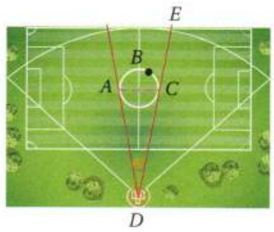
(13 $m\widehat{GJF}$ **$196°$**



14) رياضة: يُمثّل الشكل المجاور ملعبًا رياضيًّا متعدّد الأغراض، إذا كان $m\widehat{ABC} = 200°$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

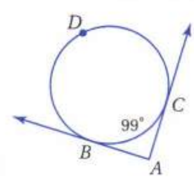
a) $m\angle ACE$ **$100°$**

b) $m\angle ADC$ **$20°$**

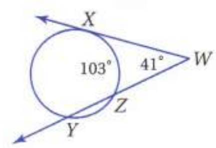


المثالان 4 ,3 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

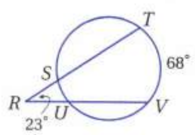
(15 $m\angle A$ **$81°$**



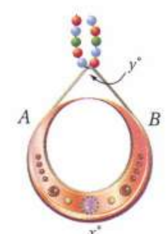
(16 $m\widehat{XY}$ **$185°$**



(17 $m\widehat{SU}$ **$22°$**



18) مجوهرات: يظهر في الشكل المجاور جزء من قلادة. A و B نقطتا تماس فيها. إذا كانت $x° = 260°$ ، فأوجد قيمة $y°$؟ **$80°$**

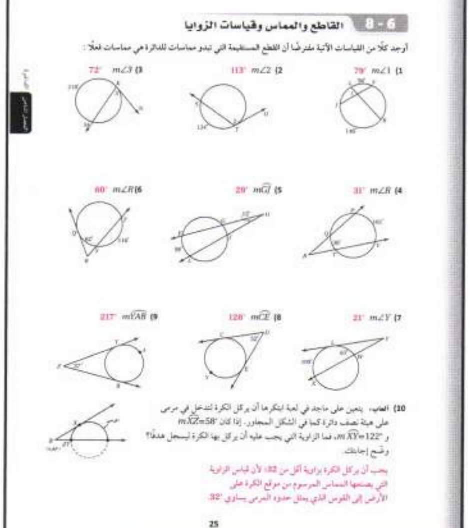


19) تصوير: استعد مصور لالتقاط صورة بآلة التصوير للعبة الدوّامة الدائرية بحيث كان خطّا النظر مماسين لها، كما في الشكل المجاور .

a) إذا كانت زاوية الرؤية لآلة التصوير تساوي $35°$، فما قياس قوس الدوّامة الذي سيظهر في الصورة؟ **$145°$**

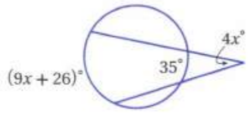
b) إذا أردت التقاط صورة لقوس قياسه $150°$، فما قياس زاوية الرؤية التي يجب استعمالها؟ **$30°$**

كتاب التمارين، ص (25)

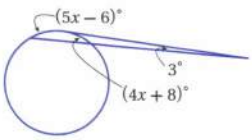


جبر: أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

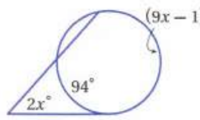
(20 **9**

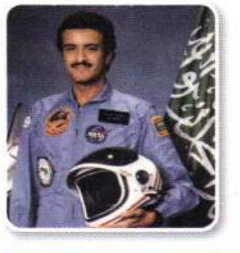


(21 **20**



(22 **19**

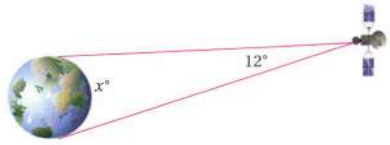




الربط مع الحياة

أول رائد فضاء سعودي هو صاحب السمو الملكي الأمير سلطان بن سلمان بن عبدالعزيز على متن مكوك الفضاء (ديسكفري) رحلة رقم STS–51G في السابع عشر من حزيران عام 1985م.

(23 **فضاء:** يدور قمر صناعي في مدار فوق خط الاستواء. أوجد قيمة x°، وهي قياس القوس المرئي من الأرض بالنسبة للقمر الصناعي. **168**

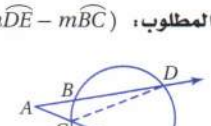


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلّ حالة من حالات النظرية **8.14**. **24, 25) انظر ملحق الإجابات.**

(24 حالة 1

المعطيات: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة

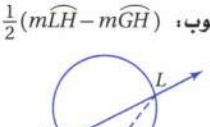
المطلوب: $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



(25 حالة 2

المعطيات: $\overrightarrow{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها

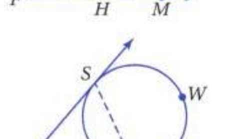
المطلوب: $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$



(26 حالة 3 **انظر ملحق الإجابات.**

المعطيات: $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة

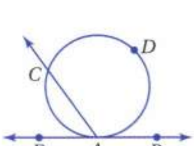
المطلوب: $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$



(27 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات الحالة الآتية للنظرية 8.13.

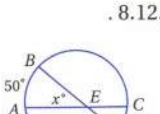
المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{AC}$ قاطع لها، $\angle CAB$ زاوية منفرجة

المطلوب: $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$. **انظر ملحق الإجابات**



(28 **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستكشف في هذا السؤال العلاقة بين النظريتين 8.6, 8.12.

a) **هندسيًّا:** انقل الشكل المجاور إلى دفترك. ثم ارسم ثلاثة أشكال متتالية بحيث يتحرّك موقع D مقتربًا من C مع بقاء C, A, B ثابتة في مواقعها. **a–d) انظر الهامش**



b) **جدوليًّا:** قدر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍ من الدوائر المتتالية، سجّل قياسات $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ في جدول. ثم أوجد قيمة x لكل من هذه الدوائر.

c) **لفظيًّا:** أوجد العلاقة بين $m\widehat{AB}$ وقيمة x° عندما يقترب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0$؟

d) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات العلاقة بين النظرية 8.11 والنظرية 8.5 المذكور في الجزء **c**.

تنبيه لحل سؤال

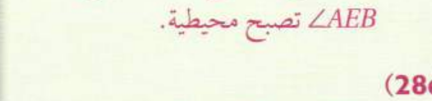
الفرجار والمسطرة:

يتطلب السؤالان 32 ,28 استعمال فرجار ومسطرة.

تمثيلات متعددة: في السؤال 28، يستعمل الطلاب الأشكال الهندسية، والجداول، وكذلك الوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين النظريتين 8.5 ,8.11.

إجابات:

(28a



(28b

القوس	الدائرة 1	الدائرة 2	الدائرة 3
$\widehat{CD}$	25	15	5
$\widehat{AB}$	50	50	50
x	37.5	32.5	27.5

(28c عندما يقترب قياس $\widehat{CD}$ من الصفر، فإنّ قياس x يصبح نصف قياس $\widehat{AB}$؛ $\angle AEB$ تصبح محيطية.

(28d

$$x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$$

$$x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + 0);$$

$$x = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$$

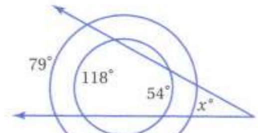
29) أجد الفرق بين القوسين المحدودين وأقسمه على 2 .

33) إجابة ممكنة: باستعمال النظرية 8.14 نجد أن
$60° = \frac{1}{2}((360-x)-x)$
وبحل المعادلة نجد أن قياس القوس الأول °120؛ وبتكرار هذه العملية بالنسبة للزاوية °50 نجد أن قياس القوس الثاني °130. ويمكن إيجاد قياس القوس الثالث بجمع °130+°120 وطرح الناتج من 360 فيكون قياس القوس الثالث °110 .

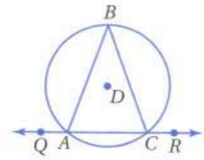
مسائل مهارات التفكير العليا

29) **اكتب:** اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع القاطع والمماس خارج الدائرة.

30) **تحدٍّ:** إذا كانت الدائرتان أدناه متحدتين في المركز، فما قيمة $x°$؟ 32



31) **تبرير:** $\triangle ABC$ متطابق الضلعين محاط بالدائرة D. ماذا تستنتج عن $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

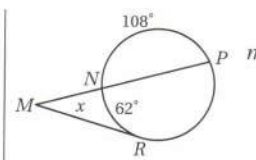


32) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة ومماسين لها متقاطعين. واستعمل المنقلة لقياس الزاوية المتكوّنة، ثم أوجد قياس كل من القوسين الأكبر والأصغر المتكوّنين. برّر إجابتك. انظر الهامش

33) **اكتب:** رسُمت دائرة محاطة بالمثلث PQR. إذا كان $m\angle P = 50, m\angle Q = 60$ ، فصف طريقة إيجاد قياس الأقواس الثلاثة الصغرى المتكوّنة من نقاط التماس.

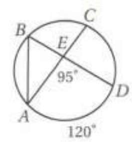
تدريب على الاختبار المعياري

34) إذا كان: $m\widehat{NR} = 62°$, $m\widehat{NP} = 108°$
فما قيمة x؟ C



A 23°	**C** 64°
B 31°	**D** 128°

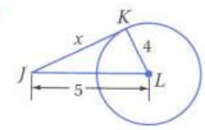
35) إذا كان $m\angle AED = 95, m\widehat{AD} = 120$، فأوجد $m\angle BAC$؟ 35°



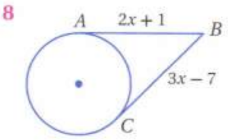
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. (الدرس 8-5)

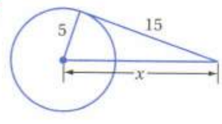
36) 3



37) 8



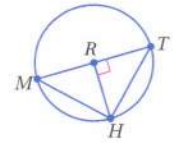
38) $5\sqrt{10}$



39) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 8-4)

المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة، $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$ انظر ملحق الإجابات



استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

40) $x^2 + 13x = -36$ **−4, −9**

41) $x^2 - 6x = -9$ **3**

42) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$ $-\frac{5}{2}$

4 التقويم

فهم الرياضيات: اختر أمثلة واسأل الطلاب أن يذكروا أسماء القطع المستقيمة المرسومة في الشكل قبل مغادرة غرفة الصف.

التقويم التكوينيّ

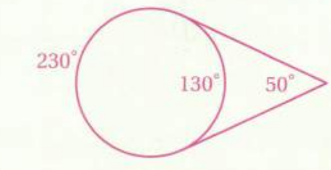
تحقق من فهم الطلبة للدرسين 6−8 ,5−8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

إجابات:

31) إجابة ممكنة: $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$ ، $m\angle BAC = m\angle BCA$ لأن المثلث متطابق الضلعين؛ إذن $m\angle QAB = m\angle RCB$ ؛ لأن الزوايا المكملة لزوايا متطابقة تكون متطابقة. وبما أن $m\angle QAB = m\angle RCB$ ، فإن $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$.

32) إجابة ممكنة:



بتطبيق النظرية 8.13 ، يكون $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x-y)$.
إذن $50° = \frac{1}{2}[(360-x)-x]$ ،
إذن، (القوس الأصغر) $x = 130$ ،
(القوس الأكبر) $y = 360° - 130°$ أو °230.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: إذا قطع وتران في الدائرة قوسين قياس كل منهما 75 درجة، فما العلاقة بين هذين الوترين؟
إذا كان لكل من القوسين نقطتي طرفين مختلفين عند كل من الوترين، فإن الوترين متوازيين أو متقاطعان أو غير متوازيان ، وإذا وقع طرفا كل قوس على الوتر نفسه فإن الوترين متطابقان، وإذا اشترك القوسين في أحد الطرفين فإن الوترين متقاطعان عند ذلك الطرف.

8-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-8

إيجاد أطوال أقطار متوازي الأضلاع.

الدرس 7-8

إيجاد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.

إيجاد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 7-8

كتابة معادلة الدائرة.

تمثيل الدائرة في المستوى الإحداثي.

2 التدريس

سئلة التعزيز

طلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

سأل:

- ما عناصر الدائرة التي تمثلها الحافتان المستقيمة والمنحنية لقطعة الكعك؟
  وتر وقوس على الترتيب.
- ما القياسات التي عليك أن تعرفها لإيجاد قياس قوس قطعة الكعك المتبقية؟
  طول الوتر (الحافة المستقيمة لقطعة الكعك) ونصف قطر الكعكة.

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة
Special Segments in a Circle

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.

والآن:

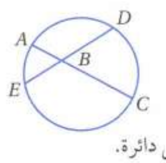
- أجد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- أجد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قُطعت كعكة دائرية كبيرة طوليًا لتكفي أكبر عدد ممكن من المدعوين إلى حفلة. ولم يبقَ منها إلا قطعة صغيرة. يمكنك إيجاد قطر الكعكة الأصلية باستعمال الخصائص الهندسية للدائرة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة: عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، ينقسم كل منهما إلى جزأين. ففي الشكل المجاور، انقسم الوتر $\overline{AC}$ إلى $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. وكذلك انقسم الوتر $\overline{ED}$ إلى $\overline{EB}$ و $\overline{BD}$.



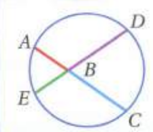
تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع المستقيمة الأربع التي تكوّنت من تقاطع وترين داخل دائرة.

نظرية 8.15 نظرية قِطَع الوتر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.

مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

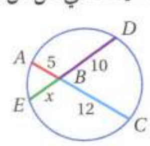


سوف تبرهن النظرية 8.15 في السؤال 15

مثال 1 استعمال تقاطع الوترين

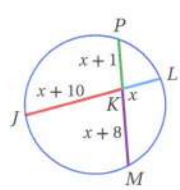
أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

a)



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب
$6 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 10

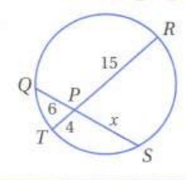
b)



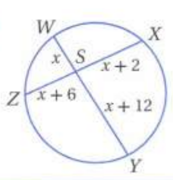
$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	النظرية 8.15
$(x+10) \cdot x = (x+1)(x+8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كلا الطرفين
$x = 8$	بطرح $9x$ من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

1A) 10



1B) 3

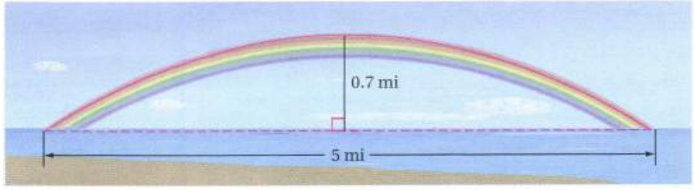


مصادر الدرس 7-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (221, 222)	• تنويع التعليم ص (221, 222)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (26)	• كتاب التمارين ص (26)	• كتاب التمارين ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

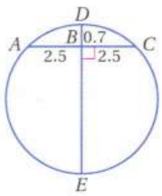
مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قياس قطع مستقيمة في الدائرة

علوم: شكل قوس المطر الحقيقي دائرة كاملة، ولكننا نرى منها القوس الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. ما نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر في الشكل أدناه؟



افهم: تعلم أن قوس المطر هو جزء من دائرة. $\overline{AC}$ وتر في هذه الدائرة، $\overline{DB}$ هو عمود المنصّف للوتر $\overline{AC}$.

خطط: ارسم نموذجًا للمسألة، بما أن $\overline{DE}$ تُنصّف الوتر $\overline{AC}$، فإن $\overline{DE}$ قطر في الدائرة. استعمل ناتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

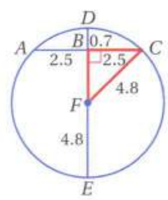


حُل:

$AB \cdot BC = DB \cdot BE$	النظرية 8.15
$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$	بالتعويض
$6.25 = 0.7BE$	بالضرب
$8.9 \approx BE$	بقسمة كلا الطرفين على 0.7
$DE = DB + BE$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$= 0.7 + 8.9$	بالتعويض
$= 9.6$	بالجمع

بما أن قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا. فإن نصف قطرها يساوي $9.6 \div 2 \approx 4.8$.

تحقق: استعمل عكس نظرية فيثاغورس؛ للتحقق من أن المثلث المتكوّن من نصف القطر والوتر وجزء من القطر في الدائرة قائم الزاوية.



$DB + BF = DF$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$0.7 + BF = 4.8$	بالتعويض
$BF = 4.1$	بطرح 0.7 من الطرفين

$BF^2 + BC^2 = CF^2$	نظرية فيثاغورس
$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$	بالتعويض
$23.06 \approx 23.04$ ✓	بالتبسيط

تحقق من فهمك

2) **الاسترودوم:** هو أول ملعب بُني مسقوفًا بقبة كروية، إذا كان ارتفاع أعلى نقطة في هذه القبة يساوي 208 ft، وقطر الدائرة التي تحتوي على القوس المار بالقمة 710 ft، فما المسافة بين طرفي القوس؟ **646 ft تقريبًا**

الربط مع الحياة

كلما كانت الشمس قريبة من الأفق، زاد الجزء الذي تراه من قوس المطر. وعند غروب الشمس يمكنك رؤية قوس المطر على شكل نصف دائرة. بحيث تصنع أعلى نقطة في هذا القوس زاوية مقدارها 42 درجة فوق الأفق.

إرشادات لحل المسألة

ارسم شكلًا
يُفضل عند حلّ المسائل اللفظية المتعلّقة بالدوائر، أن ترسم شكلًا وتضع عليه قياسات كل عناصر الدائرة المعطاة، وأن تسمّي القياس المجهول برمز متغير لمساعدتك على اختيار خطة الحل المناسبة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة

المثالان 2 ,1 يبيّنان كيفية استعمال نظرية "قِطَع الوَتر" لإيجاد أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.

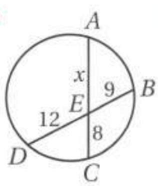
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

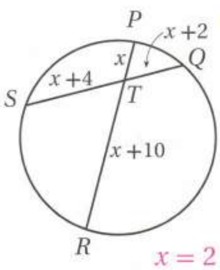
مثالان إضافيان

1 أوجد قيمة x في كل من الشكلين أدناه.

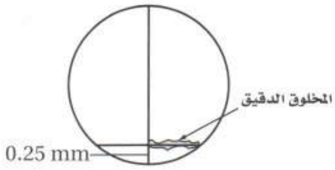
(a $x = 13.5$



(b $x = 2$



2 **علم الأحياء:** يفحص عالم أحياء مخلوقًا دقيقًا باستعمال ميكروسكوب. ويمثل مجال الرؤيا في الميكروسكوب دائرة قطرها 2 mm. أوجد طول المخلوق الدقيق إذا وضع على بعد 0.25 mm أسفل مجال الرؤية. مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. 0.66 mm



تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: وجه الطلاب للرجوع إلى المثال 1 صفحة 220، واطلب إليهم رسم أوتار تربط بين النقاط المتقابلة التي تمثل نهايات القطع المستقيمة المتقاطعة. ثم اطلب إليهم وضع تخمينات حول علاقة التناسب بين المثلثات الناتجة.

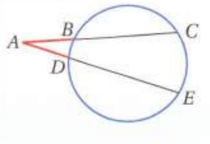
قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة: الأوتار غير المتوازية في الدائرة وغير المتقاطعة داخلها يمكن أن تمتد لتشكّل قواطع تتقاطع خارج الدائرة.

نظرية 8.16 نظرية القاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



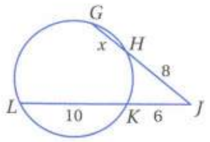
سوف تبرهن النظرية 8.16 في السؤال 16

إرشادات للدراسة

تبسيط نص النظرية
كل طرف من طرفي المعادلة في مثال النظرية 8.16، هو ناتج ضرب طولَي الجزء الخارجي من القاطع في طول القاطع بكامله.

مثال 3 استعمال تقاطع القاطعين

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



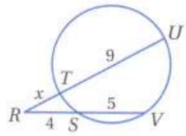
$JG \cdot JH = JL \cdot JK$	النظرية 8.16
$(x + 8)8 = (10 + 6)6$	بالتعويض
$8x + 64 = 96$	بالضرب
$8x = 32$	بطرح 64 من كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تنبيه!

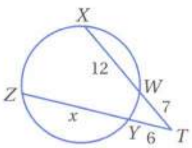
استعمال المعادلة الصحيحة تأكّد من أنك تجد ناتج ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه، وليس في طول القطعة الداخلية منه.

تحقق من فهمك

(3A 3



(3B $16\frac{1}{6}$



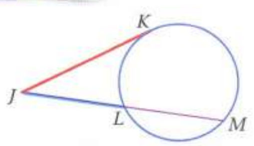
يمكنك استعمال معادلة مشابهة لمعادلة النظرية 8.16 عندما يتقاطع مماس وقاطع خارج الدائرة. وفي هذه الحالة المماس أو قطعة المماس التي يقع أحد طرفيها على الدائرة تُمثّل قطعة المماس الخارجية، وقطعة المماس الكلية في آن معًا.

نظرية 8.17

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسم مماس وقاطع لدائرة من نقطة خارجها فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه

مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$



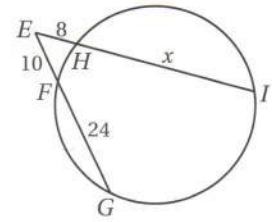
سوف تبرهن النظرية 8.17 في السؤال 17

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة

المثالان 4 ,3 يبينان استعمال الخصائص والنظريات لإيجاد أطوال أجزاء قاطعين يتقاطعان خارج الدائرة.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 34.5



المحتوى الرياضي

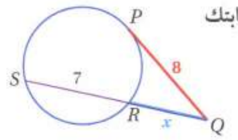
منصف الوتر: ذكّر الطلاب أنه يمكن رسم قطر في الدائرة لتنصيف أي وتر فيها.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى كل طالب أن يجد أمثلة حياتية على قطع الدائرة في الإنشاءات أو في الصناعة أو في أي مجال آخر. واطلب إليهم أيضًا كتابة شرح حول أمثلتهم، مع رسم لكل مثال ووضع القياسات الصحيحة عليه إن أمكن، ثم كتابة معادلة مناسبة تربط بين القياسات.

مثال 4 استعمال المماس والقاطع



إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًا للدائرة كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.

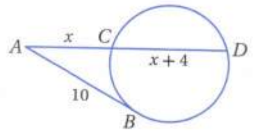
$PQ^2 = QR \cdot QS$	النظرية 8.17
$8^2 = x(x+7)$	بالتعويض
$64 = x^2 + 7x$	بالضرب
$0 = x^2 + 7x - 64$	بطرح 64 من كلا الطرفين

استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية؛ لأن المقدار غير قابل للتحليل.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$	$a = 1, b = 7, c = -64$
$= \dfrac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$	بالتبسيط
≈ -12.2 أو 5.2	باستعمال الحاسبة

وبما أنه لا يمكن أن تكون الأطوال سالبة، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

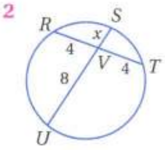


4) $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور. أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر. **6.1**

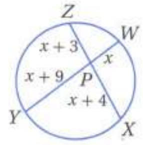
✓ تأكد

الأمثلة 4 ,3 ,1 أوجد قيمة x في كلّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا.

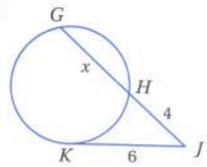
1) **2**



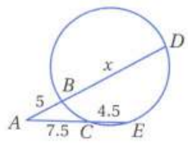
2) **6**



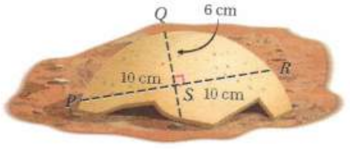
3) **5**



4) **13**

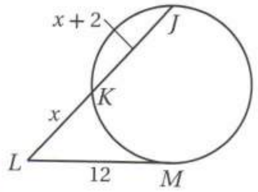


المثال 2 5) **علم الآثار:** يبيّن الشكل المجاور صورة جزء مكسور من إناء فخاري دائري وُجِدَ في موقع أثري. إذا كانت $\overline{QS}$ جزءًا من قطر الدائرة، فما محيط الإناء الفخاري الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **71.21 cm**



مثال إضافي

4 إذا كان $\overline{LM}$ مماساً للدائرة أدناه، أوجد قيمة x مقرّبة إلى أقرب عُشر.



8

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: انشر الملاحظات الخاصة بهذا الدرس في مدونة الصف. ثم اعمل على أن تشمل الملاحظات النظريات المختلفة الخاصة بالمماس والقاطع والوتر. وأضف روابط لأفضل المدخلات التي كتبها الطلاب في المدونة و لأفضل مقاطع فيديو أعدوها.

3 التدريب

✓ التقويم التكويني

استعمل التمارين 5–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

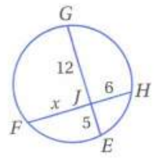
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14–6 ، 31–19
ضمن ضمن المتوسط	13–7 فردي ، 18–15 ، 31-19
فوق فوق المتوسط	25–15 ، (اختياري: 31–26)

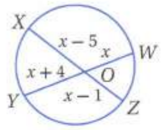
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1, 3, 4 أوجد قيمة x في كلّ من الأشكال الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشر.

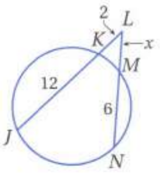
6) **10**



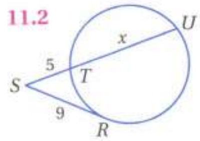
7) **0.5**



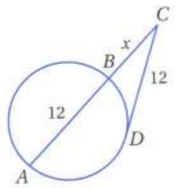
8) **3.1**



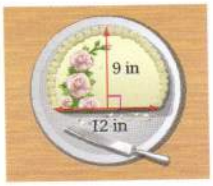
9) **11.2**



10) **7.4**

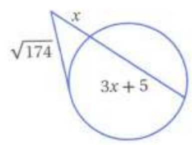


11) **كعك:** توزّع سلمى الكعك في حفل. إذا كانت أبعاد القطعة المتبقية من الكعكة كما في الشكل المجاور، فما قطر الكعكة الأصلية؟ **13 in.**

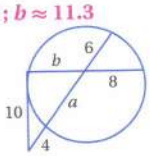


المثال 2 أوجد قيم المتغيرات في كل من الأشكال الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشر.

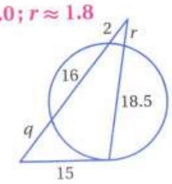
12) **6**



13) **$a = 15; b \approx 11.3$**



14) **$q = 9.0; r \approx 1.8$**

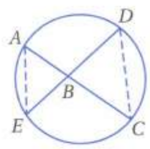


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكل من النظريات الآتية: **17–15) انظر الهامش.**

15) برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.15

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$ وتران متقاطعان في B.

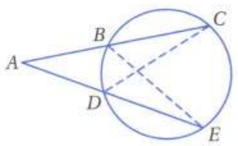
المطلوب: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



16) برهانًا حرًّا للنظرية 8.16

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان لدائرة.

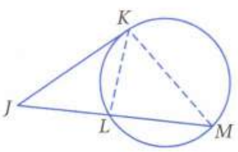
المطلوب: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



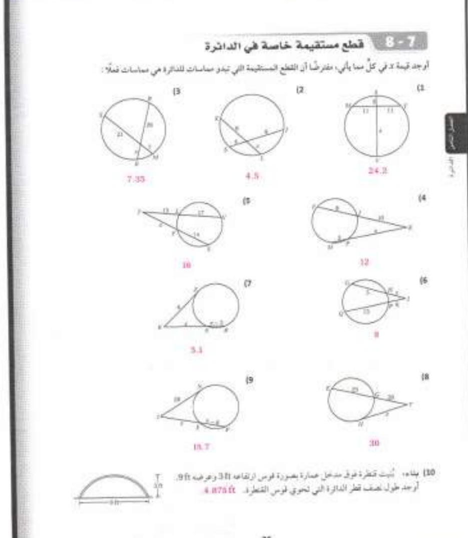
17) برهانًا ذا عمودين للنظرية 10.17

المعطيات: $\overline{JK}$ مماس، $\overline{JM}$ قاطع

المطلوب: $JK^2 = JL \cdot JM$



كتاب التمارين، ص (26)



إجابات:

15) البرهان:

العبارات: (المبررات)

1) $\overline{AC}, \overline{DE}$ وتران يتقاطعان في B. (معطيات)

2) $\angle A \cong \angle D, \angle E \cong \angle C$ (الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة)

3) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (مسلمة التشابه AA)

4) $\frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BC}$ (تعريف تشابه المثلثات)

5) $AB \cdot BC = EB \cdot BD$ (الضرب التبادلي)

16) البرهان:

$\overline{AC}, \overline{AE}$ قاطعان للدائرة. بتطبيق خاصية الأنعكاس، $\angle BAD \cong \angle DAB$. وبما أن الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة، فإن، $\angle ACD \cong \angle AEB$. إذن $\triangle AEB \sim \triangle ACD$ بحسب مسلمة التشابه AA، ومن تعريف تشابه المثلثات ينتج أن: $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$. وبما أن نواتج الضرب التبادلي في التناسب تكون متساوية فإن، $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

17) البرهان:

العبارات: (المبررات)

1) $\overline{JK}$ مماس و $\overline{JM}$ قاطع (معطيات)

2) $m\angle KML = \frac{1}{2}m\widehat{KL}$ (قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

3) $m\angle JKL = \frac{1}{2}m\widehat{KL}$ (قياس الزاوية المتكونة من القاطع والمماس يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

4) $m\angle KML = m\angle JKL$ (بالتعويض)

5) $\angle KML \cong \angle JKL$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $\angle J \cong \angle J$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle JMK \sim \triangle JKL$ (مسلمة التشابه AA)

8) $\frac{JK}{JL} = \frac{JM}{JK}$ (تعريف تشابه المثلثات)

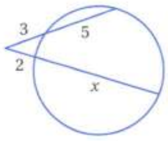
9) $JK^2 = JL \cdot JM$ (الضرب التبادلي)

مسائل مهارات التفكير العليا

18) عبد العزيز كتب المعادلة الصحيحة. يتقاطع قاطعان خارج الدائرة؛ ولذا فإن المعادلة الصحيحة تتضمّن ناتج ضرب طول القاطع كاملًا في طول القطعة الخارجية منه.

19) تكون متساوية أحيانًا؛ تتساوى قياسات الأقواس عندما يكون الوتران متعامدين.

18) اكتشف الخطأ: يحسب كل من خالد وعبدالعزيز قيمة x في الشكل المجاور. فكتب خالد المعادلة: $3(5) = 2x$، بينما كتب عبدالعزيز المعادلة: $3(8) = 2(2 + x)$. هل أي منهما كتب المعادلة الصحيحة؟ برّر إجابتك.



19) تبرير: إذا تقاطع وتران في مركز دائرة، فهل تكون قياسات الأقواس المحصورة بينهما متساوية أحيانًا، أو دائمًا، أو غير متساوية أبدًا؟

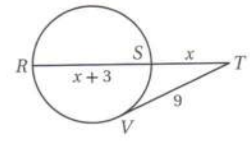
20) اكتب: إذا تقاطع قاطعان داخل الدائرة، فصف العلاقة بين جزأي الأول منهما والثاني. انظر الهامش

تدريب على الاختبار المعياري

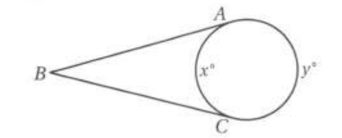
21) $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و R, S نقطتان عليها، ما قيمة x مقربة إلى أقرب عشر؟ **C**

A 7.6 **C** 5.7

B 6.4 **D** 4.8



22) إجابة مطوّلة: $\overline{BA}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة في الشكل أدناه، $m\angle ABC = 70°$. انظر الهامش

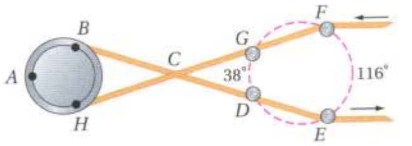


a) اكتب معادلتين تربطان بين $x°$ و $y°$.

b) أوجد قيمة كلّ من $x°$ و $y°$.

مراجعة تراكمية

23) نسيج: بعد أن تُغزل خيوط الصوف، يتم صبغها، ثم تُمرّر على مجموعة من البكرات لكي تجف. يُظهر الشكل المجاور إحدى مجموعات البكرات. لاحظ أن خيط الغزل يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند النقطة C، ولكنه في الواقع غير ذلك. أوجد $m\widehat{BH}$ مستعملًا معلومات الشكل. (الدرس 8-6) **141°**



هندسة إحداثية: مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 7-2) انظر الهامش

24) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه $K(5, -2), L(-3, -1), M(0, 5)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل.

25) الشكل الرباعي $PQRS$ الذي رؤوسه $P(1, 4), Q(-1, 4), R(-2, -4), S(2, -4)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى أعلى.

استعد للدرس اللاحق

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي عُلِم ميله ومقطع y له في كل مما يأتي:

26) m: 3، المقطع $y: -4$ $\quad y = 3x - 4$

27) $m: 2, (0, 8)$ $\quad y = 2x + 8$

28) $m: \frac{5}{8}, (0, -6)$ $\quad y = \frac{5}{8}x - 6$

29) $m: \frac{2}{9}$، المقطع $y: \frac{1}{3}$ $\quad y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

30) $m: -1, b: -3$ $\quad y = -x - 3$

31) $m: -\frac{1}{12}, b: 1$ $\quad y = -\frac{1}{12}x + 1$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 18، يجب أن يلاحظ الطلاب أن خالدًا استعمل المعادلة الخاصة بإيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة. عليهم أيضًا ملاحظة أن معادلة عبدالعزيز هي الصحيحة لأن القاطعان تقاطعا خارج الدائرة.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيف ساعدهم الدرس السابق حول القاطع والمماس وقياسات الزوايا في فهم درس اليوم حول القطع المستقيمة الخاصة في الدائرة.

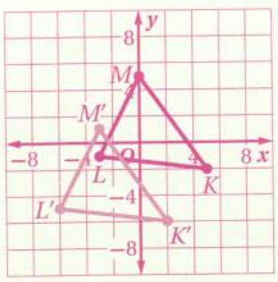
إجابات:

20) إجابة ممكنة: حاصل ضرب طولي جزأي أحد الوترين المتقاطعين يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأخر.

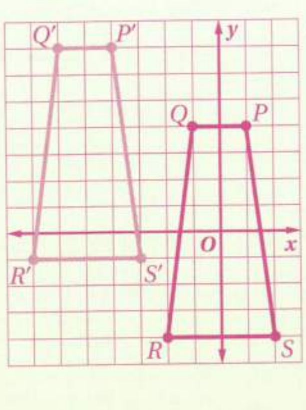
22a) $x + y = 360 , y - x = 140$

22b) $x = 110°, y = 250°$

24)



25)



1 التركيز

لهدف:
ستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire
ستكشاف معادلة الدائرة.

لمواد
الحاسبة البيانية TI–nspire

2 التدريس

لعمل في مجموعات متعاونة

زع الطلاب في مجموعات تتكوّن من 3 أو 4 طلاب متفاوتي القدرات. ثم اطلب إليهم نفيذ النشاط.

دريب:
طلب إلى الطلاب حل السؤالين 1, 2 .

3 التقويم

التقويم التكويني
ستعمل السؤالين 3, 4 لتقويم فهم الطلاب لاستعمال الإحداثيات عند كتابة معادلة الدائرة.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:
- ماذا يحدث للتمثيل البياني للدائرة عند إضافة 4 للإحداثي x ؟
- ماذا يحدث عند إضافة 4 للإحداثي y ؟
- ماذا يحدث عند إضافة 4 لكلا الإحداثيين؟

جابات:

1) إجابة ممكنة: يتغير العددان المضافان أو المطروحان إلى/من x, y في المعادلة مع تغيير موقع مركز الدائرة.

2) إجابة ممكنة: يتغير العدد المربع (الثابت) الذي يقع وحده في أحد طرفي المعادلة كلما تغير نصف القطر.

8-8 معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة
Equation of Circle

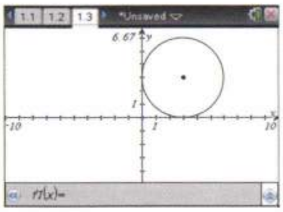
يمكنك استعمال TI–nspire لاستكشاف معادلة الدائرة.

نشاط: رسم دائرة في المستوى الإحداثي

الخطوة 1: افتح صفحة Graphs بالضغط على المفاتيح:

on | 2:Add Graphs | menu | 9:Shapes | 1:Circle

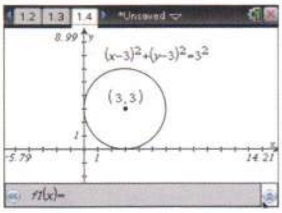
ثم ارسم دائرة لا يقع مركزها على أي من المحورين.



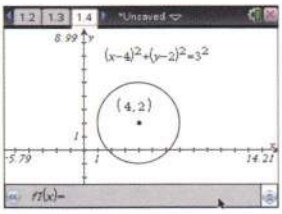
الخطوة 2: ولعرض معادلة الدائرة، اضغط المفاتيح:

menu | 1:Action | 7:Coordinates and Equations

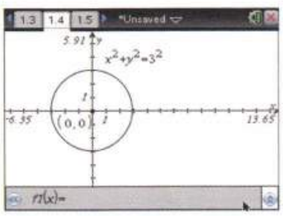
اضغط الدائرة واسحبها ولاحظ.



الخطوة 3: استعمل المؤشّر لاختيار مركز الدائرة.
اضغط الدائرة واسحبها، ولاحظ كيف تتغير معادلة الدائرة.
لاحظ ماذا يحدث لمعادلة الدائرة، عندما تجعل المركز عند نقطة الأصل.



الخطوة 4: حرّك الدائرة كما فعلت في الخطوة 3 ، وضع مركزها عند نقطة الأصل.
اختر الدائرة باستعمال المؤشّر، ثم كبّر الدائرة أو صغرها
ولاحظ أثر ذلك في معادلتها.



تحليل النتائج: 1–4 . انظر الهامش.

1) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عند تحريك مركزها؟
2) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عندما يزيد نصف قطرها أو ينقص؟
3) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل، ونصف قطرها 4؟ فسِّر إجابتك
4) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (h, k)، ونصف قطرها r ؟ فسِّر إجابتك

3) إجابة ممكنة: $x^2 + y^2 = 16$ ، لقد تحرّك مركز الدائرة إلى نقطة الأصل وتغيّر نصف قطرها إلى 4.

4) إجابة ممكنة: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$؛ في المعادلة. يتم طرح قيمة الإحداثي x من x وقيمة الإحداثي y من y. والعدد المربع في هذه الصيغة يمثل نصف قطر الدائرة.

8-8 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-8

كتابة معادلة المستقيم باستعمال معلومات حول تمثيله البياني .

الدرس 8-8

كتابة معادلة الدائرة .

تمثيل الدائرة بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 8-8

توسيع خصائص التشابه والتحويلات الهندسية لاستكشاف وتبرير تخمينات حول الأشكال الهندسية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- أين يوضع البُرج بالنسبة للمنطقة الدائرية التي سيغطيها؟ في المركز
- ماذا تمثل المسافة بين البرج وأبعد نقطة يصلها بث البرج؟ نصف قطر الدائرة
- يبث أحد أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات ضمن دائرة نصف قطرها 24 km. وتريد شركة الاتصالات الهاتفية زيادة مساحة منطقة التغطية بنسبة 50%، فكم كيلو مترًا يجب أن تزيد المسافة التي تصلها الإشارات التي يبثها البرج؟ 5.39 km تقريباً

8-8 معادلة الدائرة
Equation of Circle

فيما سبق:

درست كتابة معادلة المستقيم وتمثيله بيانيًا في المستوى الاحداثي.

والآن:

- أكتب معادلة الدائرة.
- أمثل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.

المفردات:

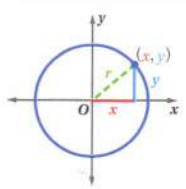
المحل الهندسي المركب
compound locus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات الراديو لبثِّ مكالمات الهواتف النقالة. ويغطي كل برج منطقة دائرية. وتُصمم الأبراج بحيث تلتقط إشارات البث في أي مكان ضمن منطقة التغطية.

معادلة الدائرة: بما أن نقاط الدائرة جميعها تبعد مسافات متساوية عن مركزها، فإنه يمكنك إيجاد معادلتها باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو نظرية فيثاغورس.

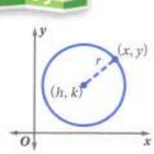


إذا مثّل (x, y) نقطة على دائرة مركزها عند نقطة الأصل كما في الشكل المجاور، فإنه يمكنك أن تستعمل نظرية فيثاغورس لتجد أن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

وإذا لم يقع مركز الدائرة عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة (h, k) كما في الشكل المبيّن في الصندوق أدناه، فإنه يمكنك أن تستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحصل على معادلة الدائرة.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$	$d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$
$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$	بتربيع كلا الطرفين

مفهوم أساسي — الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة أضف إلى مطويتك



الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، وطول نصف قطرها r هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تُسمى الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة أيضًا صيغة المركز ونصف القطر.

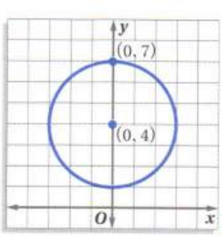
مثال 1 كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز ونصف القطر

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

a) مركزها عند $(1, -8)$ ، وطول نصف قطرها 7 .

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$	$(h, k) = (1, -8), r = 7$
$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$	بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًا جانبًا.



مركز الدائرة عند $(0, 4)$ وطول نصف قطرها 3.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$	$(h, k) = (0, 4), r = 3$
$x^2 + (y - 4)^2 = 9$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة
لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت كما في المثال 1. وليس بالضرورة فك التربيع.

✓ **تحقق من فهمك** $x^2 + y^2 = 10$ (1B $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

1A) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $\sqrt{10}$. **1B)** مركزها النقطة $(4, -1)$، وقطرها 8 .

مصادر الدرس 8-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (229, 231)	• تنويع التعليم ص (229, 231)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (27)	• كتاب التمارين ص (27)	• كتاب التمارين ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

مثال 2 كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

a) مركزها $(-2, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

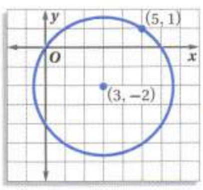
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = -2, k = 4, r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2, k = 4, r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًّا جانبًا.



الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(5 - 3)^2 + [1 - (-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{13}$ بالتبسيط

الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = (\sqrt{13})^2$ $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

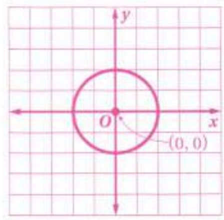
2A) مركزها $(5, 4)$، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$. $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 64$

2B) مركزها $(-3, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 0)$. $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$

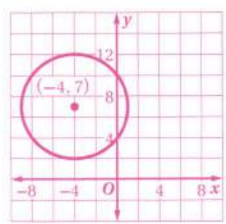
إرشادات للدراسة

صيغة الجذور في المثال **2b**، يمكنك ترك نصف القطر على صورة الجذر؛ لأن نصف القطر سيُربع عند كتابة معادلة الدائرة.

3A) $(0, 0); 2$



3B) $(-4, 7); 5$



تمثيل الدوائر بيانيًّا: يمكنك تحليل معادلة الدائرة لتجد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

مثال 3 تمثيل الدائرة بيانيًّا

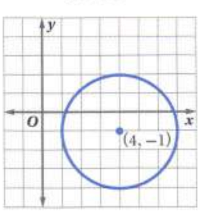
أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$. ثم مثّلها بيانيًّا.

أعد كتابة المعادلة $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ بالصيغة القياسية لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



لذا فإن $h = 4, k = -1, r = 3$. أي أن المركز عند النقطة $(4, -1)$ ونصف القطر 3.

تحقق من فهمك

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

3A) $x^2 + y^2 = 4$

3B) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس لقد درست ثلاثًا من مسلّمات إقليدس سابقًا. وهناك مسلّمة أخرى لإقليدس، وهي أنه يمكنك رسم دائرة وحيدة بنصف قطر معلوم باختيار أي نقطة لتكون مركزًا لهذه الدائرة.

معادلة الدائرة

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال المعلومات المعُطاة عن الدائرة لكتابة معادلتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

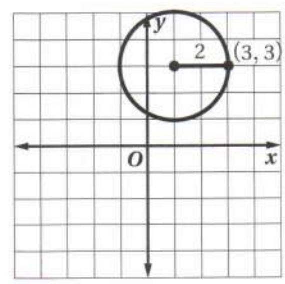
مثال إضافي

اكتب معادلة كل من الدائرتين الآتيتين:

a) مركزها $(3, -3)$، ونصف قطرها يساوي 6 .

$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 36$

b) الدائرة الممثلة في المستوى الإحداثي أدناه.



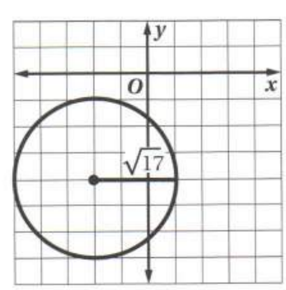
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

اكتب معادلة كل من الدائرتين الآتيتين:

a) مركزها $(-2, -3)$، وتمر بالنقطة $(1, -2)$

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

b) الدائرة الممثلة في المستوى الإحداثي أدناه.



$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 17$

تنبيه!

صيغة المسافة بين نقطتين

عند استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، ذكّر الطلاب إلى أن ينتبهوا إلى تعويض الإحداثي x والإحداثي y بالترتيب الصحيح، كذلك ضرورة الانتباه إلى إشارات هذه الإحداثيات.

التعليم باستعمال التقنيات

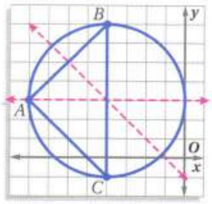
السبورة التفاعلية: اعرض المستوى الإحداثي على السبورة وارسم دائرة مركزها نقطة الأصل ثم اعرض إحداثيات المركز وطول نصف القطر ومعادلة الدائرة. ثم اطلب إلى الطلاب أن يقوموا بسحب هذه الدائرة لتغيير مركزها أو تغيير أنصاف أقطارها بالتناوب. احفظ هذه النتائج ووزعها على طلاب الصف.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال ثلاث نقاط لكتابة معادلة الدائرة

أعاصير: وُضعت ثلاث صفارات للتحذير من الأعاصير في ثلاثة مواقع إستراتيجية على دائرة حول مدينة، بحيث يتمكّن جميع السكان من سماعها. اكتب معادلة الدائرة التي وضعت عليها الصفارات الثلاث إذا كانت إحداثيات مواقعها هي: $A(-8, 3), B(-4, 7), C(-4, -1)$.

افهم: أُعطيَت إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة.

خطط: مثِّل $\triangle ABC$ بيانيًا ثم أنشئ عمودين منصّفين لاثنين من أضلاعه؛ لتعيين مركز الدائرة. أوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم استعمل المركز ونصف القطر لكتابة معادلتها.



حُلّ: أنشئ عمودين منصفين لضلعين. يظهر من الرسم أن مركز الدائرة يقع عند النقطة $(-4, 3)$، ونصف القطر 4.

اكتب المعادلة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

تحقق: تحقّق من صحة تعيين المركز، بأن تجد معادلة العمودين المنصّفين للضلعين، ثم تحل النظام المكون من معادلتيهما. وتحقّق من أن نصف القطر صحيح بإيجاد المسافة بين المركز وأيّ نقطة على الدائرة. ✓

تحقق من فهمك

4) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $R(1, 2), S(-3, 4), T(-5, 0)$. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

الربط مع الحياة

يُسجّل 1000 إعصار تقريبًا في الولايات المتحدة خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميرًا هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h، أو أكثر فقد يصل عرض مسارها التدميري إلى ميل، ويمتد إلى 50 mi .

تأكد

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كلّ ممّا يأتي:

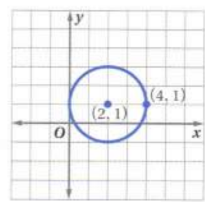
1) مركزها $(0, 9)$، ونصف قطرها 5 . $(x - 9)^2 + y^2 = 25$

2) مركزها $(1, 3)$، وقطرها 14 . $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$

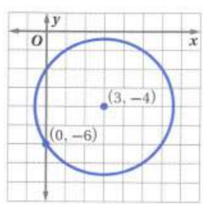
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$. $x^2 + y^2 = 8$

4) مركزها $(-5, 3)$ ، وتمر بالنقطة $(1, -4)$. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 85$

5) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$



6) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 13$



المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًا. 7–9) انظر ملحق الإجابات.

7) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

8) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

9) $(x + 3)^2 + y^2 - 9 = 0$

المثال 4

10) **اتصالات:** مُثّلت ثلاثة أبراج هواتف نقالة بالنقاط $X(6, 0), Y(8, 4), Z(3, 9)$. عيّن موقع برج آخر يبعد مسافات متساوية عن هذه الأبراج الثلاثة. ثم اكتب معادلة الدائرة التي تقع عليها الأبراج الثلاثة.
$(3, 4); (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

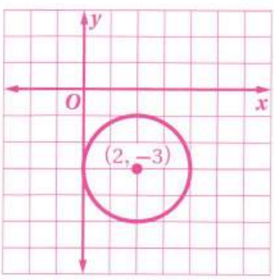
تمثيل الدوائر بيانياً

المثالان 4 ,3 يبيّنان كيفية تحليل معادلة الدائرة مما يساعد على تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثالان إضافيان

3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$، ثم مثّلها بيانياً.

المركز $(2, -3)$، ونصف القطر يساوي 2.



4 **كهرباء:** طريقة توزيع المحطات الفرعية لنقل الكهرباء وتوزيعها على المدن شديدة الأهمية لشركات الطاقة. افرض أننا مثّلنا ثلاث محطات بالنقاط الآتية: $D(3, 6), E(-1, 0), F(3, -4)$ واكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث.

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 26$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: وضح للطلاب أنهم سيعتمدون كثيرًا على معلوماتهم الهندسية ومهارات التبرير لحل مسائل هذا الدرس. واسمح لهم أن يستكشفوا ويتعاونوا في أثناء حلهم للأمثلة والتمارين. اطلب إليهم استذكار التعريفات والمفاهيم والنظريات، لمساعدتهم على تفسير سبب استعمالهم طريقة معينة في حل الأسئلة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

11) مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4 . $x^2 + y^2 = 16$

12) مركزها (1, 6)، ونصف قطرها 7 . $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 49$

13) مركزها (0, 2−)، ونصف قطرها 16 . $(x+2)^2 + y^2 = 256$

14) مركزها (9−, 8)، ونصف قطرها $\sqrt{11}$. $(x-8)^2 + (y+9)^2 = 11$

15) مركزها (6, 3−) وتمر بالنقطة (6, 0) . $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 9$

16) طرفا قطر فيها (4, 0) و (4−, 6) . $(x-3)^2 + y^2 = 25$

17) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 9$

18) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$

19) **طقس:** أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها إعصار. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل وتبعد الحلقة الأولى 15 mi عن المركز، والمسافة بين كل حلقتين متتاليتين 15 mi، فما معادلة الحلقة الثالثة؟ $x^2 + y^2 = 2025$

المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا. **20–23) انظر ملحق الإجابات.**

20) $x^2 + y^2 = 36$

21) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

22) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

23) $(x-8)^2 + y^2 = 64$

المثال 4 اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المعطاة في كل من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا. **24, 25) انظر ملحق الإجابات.**

24) $A(1, 6), B(5, 6), C(5, 0)$

25) $F(3, -3), G(3, 1), H(7, 1)$

26) **صواريخ:** اختلاف حجم محرك الصاروخ يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ كلما كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ. **a)** $x^2 + y^2 = 810000$

a) اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300 ft مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000 ft؟ **3000 ft**

27) **خدمة التوصيل:** قدّم مطعم عَرْضًا للتوصيل المجاني للمناطق التي لا تبعد عنه أكثر من 6 km. ويقع المطعم على بعد 4 km غربًا و 5 km شمالًا من منزل خالد.

a) إذا كان منزل خالد عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فاكتب المعادلة التي تُمثّل الموقف ومثّلها بيانيًّا. **انظر الهامش.**

b) ماذا يُمثّل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يحصل خالد على خدمة التوصيل المجاني من هذا المطعم؟ اشرح إجابتك.

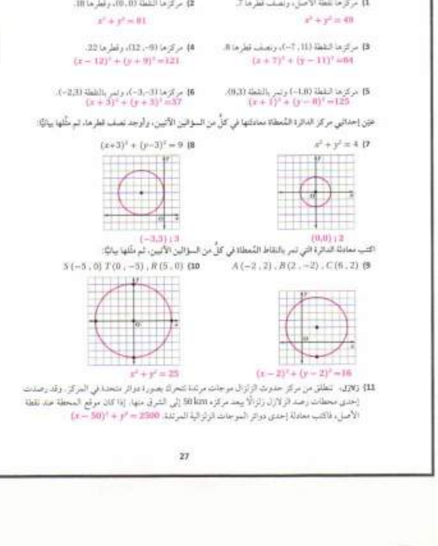
27b) إجابة ممكنة: تُمثّل الدائرة حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني. تحصل المنازل جميعها الواقعة ضمن هذه الدائرة على خدمة التوصيل المجاني. وبما أن منزل خالد الواقع عند (0, 0) يقع خارج هذه الدائرة، فلن يستفيد خالد من خدمة التوصيل المجاني.

28) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$. **(−3, 1); 5**

29) اكتب معادلة الدائرة التي قطرها 12 ويقع مركزها في الربع الثاني، وتمس كلًّا من المستقيمين $y = -4, x = 1$.

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 36$

كتاب التمارين، ص (27)


8-8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 7. $x^2 + y^2 = 49$

2) مركزها النقطة (0, 0)، وقطرها 18. $x^2 + y^2 = 81$

3) مركزها النقطة (11, 7−)، ونصف قطرها 8. $(x+7)^2 + (y-11)^2 = 64$

4) مركزها (9−, 12)، وقطرها 22. $(x-12)^2 + (y+9)^2 = 121$

5) مركزها النقطة (8, 1−) وتمر بالنقطة (3, 0). $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 125$

6) مركزها (3−, 3−)، وتمر بالنقطة (3, 2−). $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 37$

عيّن إحداثيي مركز الدائرة المُعطاة معادلتها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وأوجد نصف قطرها، ثم مثّلها بيانيًّا:

7) $x^2 + y^2 = 4$ — (0,0) ; 2

8) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ — (−3,3) ; 3

اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المُعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا:

9) $A(-2, 2), B(2, -2), C(6, 2)$ — $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

10) $R(5, 0), T(0, -5), S(-5, 0)$ — $x^2 + y^2 = 25$

11) زلازل: تنطلق من مركز حدوث الزلزال موجات مرتدة تتحرك بصورة دوائر متحدة في المركز. وقد رصدت إحدى محطات رصد الزلازل زلزالًا يبعد مركزه 50 km إلى الشرق منها. إذا كان موقع المحطة عند نقطة الأصل، فاكتب معادلة إحدى دوائر الموجات الزلزالية المرتدة. $(x-50)^2 + y^2 = 2500$

27

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 10–1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية لتوزيع الطلاب بحسب مستوياتهم.

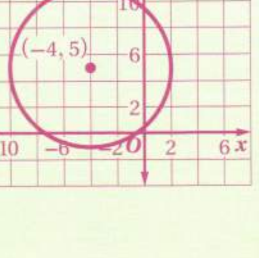
تنبيه لحل سؤال

ورق الرسم البياني تتطلب الأسئلة 33 ,30 ,24–20 استعمال ورق الرسم البياني.

تمثيلات متعددة: في السؤال 30، يستعمل الطلاب الجداول والتمثيل البياني والوصف اللفظي لاستقصاء المحل الهندسي المركب لنقطتين.

إجابات:

27a) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 36;$

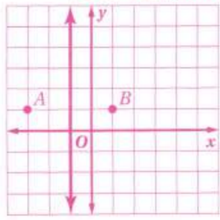


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11–25 ، 32–39
ضمن المتوسط	11–25 فردي ، 26–29 ، 32–39
فوق المتوسط	26–39

230 الفصل 8 الدائرة

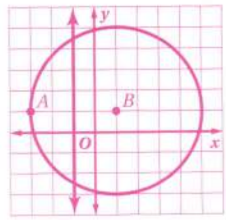
30b) إجابة ممكنة:



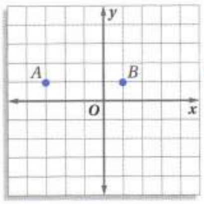
إرشادات للاختبار

استعمال الصيغ
تذكّر أنه إذا كان السؤال يوظف المستوى الإحداثي، فاستعمل صيغتي المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف وكذلك صيغة الميل لحل السؤال، وللتأكد من صحة حلّك.

30d) إجابة ممكنة:



30) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذا السؤال **المحل الهندسي المركّب** لنقطتين. وهو المحل الهندسي الذي يُحقّق أكثر من شرط مختلف.



a) جدوليًا: اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاط في المستوى تبعد مسافات متساوية عن كل من A و B. انظر الهامش.

b) بيانيًا: مثّل المحل الهندسي لهذه النقاط بيانيًا.

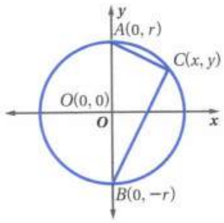
c) لفظيًا: صف المحل الهندسي للنقاط جميعها التي تبعد مسافات متساوية عن زوج من النقاط. انظر الهامش.

d) بيانيًا: استعمل التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحدد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعُد مسافة AB عن النقطة B ، ومثّله بيانيًا.

e) لفظيًا: صف المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صِف المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A و B ، وتبعد مسافة AB عن B . كيف يُمثّل المحل الهندسي المركّب بيانيًا؟ انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة كما في الشكل المجاور ، فإنها قائمة. انظر ملحق الإجابات.



32) **تبرير:** معادلة دائرة هي $(x-5)^2+(y+7)^2=16$. إذا أُجريت إزاحة لمركزها بمقدار 3 وحدات إلى اليمين و9 وحدات إلى الأعلى، فما معادلة الدائرة الجديدة؟ فسّر تبريرك. انظر الهامش.

33) **مسألة مفتوحة:** عيّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامة واحدة، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشئ الدائرة التي تحيط به. انظر ملحق الإجابات

34) **اكتب:** اشرح العلاقة بين صيغة المسافة بين نقطتين ومعادلة الدائرة . انظر الهامش.

تدريب على الاختبار المعياري

35) أيُّ المعادلات الآتية، تُمثّل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$ وتمر بالنقطة $(2, 8)$؟ **A**

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$

B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$

C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$

D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

36) إذا كان نصف قطر $\odot F$ يساوي 4، وإحداثيا مركزها هما $(-4, 0)$ فأي النقاط الآتية تقع على $\odot F$؟ **D**

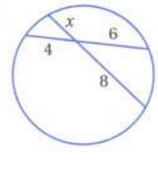
A $(4, 0)$ **C** $(4, 3)$

B $(0, 4)$ **D** $(-4, 4)$

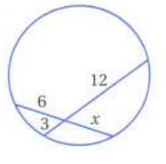
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

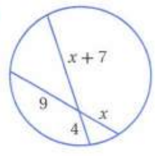
37) **3**



38) **6**



39) **5.6**



4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب أن يتناوبوا في كتابة معادلات دوائر، ثم اطلب إليهم تسمية مراكز الدوائر، وتحديد أطوال أنصاف أقطارها.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة للدرسين 8-7 ,8-8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

إجابات:

30a) إجابة ممكنة:

x	y
−1	−3
−1	−1
−1	0
−1	2
−1	4

30c) مستقيم، وهو العمود المنصّف للقطعة الواصلة بين هاتين النقطتين

30e) المحل الهندسي للنقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة معلومة هو دائرة. والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية من النقطتين A, B وتبعد مسافة AB عن B هو تقاطع المحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A, B والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافة AB عن B. ويمثل المحل الهندسي المركب بيانياً بنقطتين.

32) $(x-8)^2+(y-2)^2=16$ ؛ الدائرة الأولى يقع مركزها عند $(5, -7)$. إذا أزحنا الدائرة 3 وحدات إلى اليمين و 9 وحدات إلى الأعلى، سيكون المركز الجديد للدائرة عند $(8, 2)$، وتصبح معادلتها
$(x-8)^2+(y-2)^2=16$

34) إجابة ممكنة: الدائرة هي المحل الهندسي لكل النقاط في المستوى الإحداثي التي تبعد مسافات متساوية (نصف القطر) عن نقطة مُعطاة (المركز) ويمكن اشتقاق معادلة الدائرة من صيغة المسافة بين نقطتين باستعمال النقطة المعطاة ونصف القطر المعطى أيضًا.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ما العلاقة بين الدوائر المتحدة في المركز والتي لها نصف القطر نفسه؟ فسّر إجابتك.
هي الدائرة نفسها. لأن الدائرة تتحدد تماماً بمعرفة المركز ونصف القطر. الدائرتان اللتان تشتركان بالمركز نفسه ويكون لهما نصف القطر نفسه يجب أن تكونا متطابقتين.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8–1، فنبّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71)

أحاجي المفردات

تتعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة والحروف المبعثرة و البحث باستعمال قائمة حروف والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. كما يمكن أن يعمل الطلاب من خلال الانترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 8-1)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية (الدروس 8-2 إلى 8-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي $360°$.
- طول القوس يتناسب مع محيط الدائرة.
- قطر الدائرة العمودي على وتر فيها ينصفه وينصف القوسين المقابلين لهذا الوتر.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله.

المماس والقاطع وقياسات الزوايا (الدرسان 8-5, 8-6)

- يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة بالضبط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.
- مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.
- قياس الزاوية المتكوّنة من تلاقي قاطعين خارج الدائرة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.
- قياس الزاوية المتكوّنة من قاطع ومماس يساوي نصف قياس القوس المقابل لهذه الزاوية.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة (الدرسان 8-7, 8-8)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال حاصل ضرب أطوال أجزاء هذه الأوتار.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

مفردات أساسية

الدائرة (ص. 174)	**القوس الأصغر** (ص. 183)
المركز (ص. 174)	**القوس الأكبر** (ص. 183)
نصف القطر (ص. 174)	**نصف دائرة** (ص. 183)
الوتر (ص. 174)	**الأقواس المتطابقة** (ص. 183)
القطر (ص. 174)	**الأقواس المتجاورة** (ص. 184)
الدوائر المتطابقة (ص. 175)	**طول القوس** (ص. 185)
الدوائر المتحدة في المركز (ص. 175)	**الزاوية المحيطية** (ص. 197)
محيط الدائرة (ص. 176)	**القوس المقابل** (ص. 197)
باي (π) (ص. 176)	**المماس** (ص. 205)
محاط بدائرة (ص. 177)	**نقطة التماس** (ص. 205)
الدائرة المحيطة (ص. 177)	**المماس المشترك** (ص. 205)
الزاوية المركزية (ص. 182)	**القاطع** (ص. 212)
القوس (ص. 182)	**المحل الهندسي المركب** (ص. 231)

اختبار المفردات:

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة هي نصف قطر للدائرة. خط

2) الوتر المار بمركز الدائرة هو قطر فيها. صحيحة

3) يقع رأس الزاوية المركزية عند مركز الدائرة، ويحتوي ضلعاها نصفَي قطرين للدائرة. صحيحة

4) القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوس أكبر. خطأ؛ القوس الأصغ

5) القوس المقابل للزاوية هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعَي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها. صحيحة

6) النقطة التي يتقاطع فيها مستقيم مع دائرة في المستوى نفسه هي المماس المشترك. خطأ؛ نقطة التماس

7) القاطع هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط. خطأ؛ نقطتين

8) تكون الدائرتان متحدتين بالمركز إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين. خطأ؛ متطابقتين

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها حل الأسئلة 8-1 فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

12) 13.69 cm; 6.84 cm

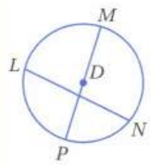
13) 8.5 yd; 4.25 yd

14) 34.54 ft; 17.27 ft

15) 71.9 mm; 35.95 mm

8-1 الدائرة ومحيطها (ص 181-174)

عُد إلى $\odot D$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 11–9.



9) سمِّ الدائرة. $\odot D$

10) سمِّ نصف قطر للدائرة. $\overline{DP}$ أو $\overline{DM}$

11) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{LN}$

أوجد القطر ونصف القطر للدائرة المُعطى محيطها في كل مما يأتي، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. 15–12. انظر الهامش.

12) $C = 43$ cm

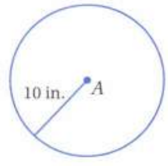
13) $C = 26.7$ yd

14) $C = 108.5$ ft

15) $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$.



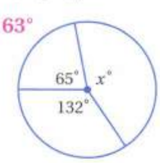
$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(10)$	بالتعويض
≈ 62.83	باستعمال الحاسبة

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

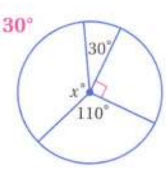
8-2 قياس الزوايا والأقواس (ص. 189-182)

أوجد قيمة $x°$ في كل من السؤالين الآتيين:

16) $163°$

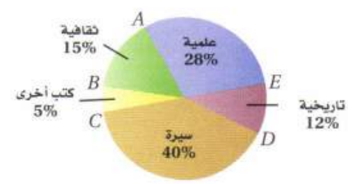


17) $130°$



18) **كتب:** أجرى مُعلم مسحًا حول الكتب التي يفضّل طلابه قراءتها، ومثّل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية كما في الشكل أدناه. أجب عمّا يأتي:

الكتب التي يُفضّلها الطلاب

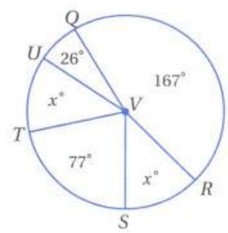


a) أوجد $m\widehat{AE}$ $100.8°$ b) أوجد $m\widehat{BC}$ $18°$

c) صف نوع القوس الذي تُمثّله فئة السيرة. قوس أصغر

مثال 2

أوجد قيمة $x°$ في الشكل الآتي:



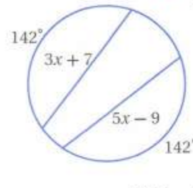
$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT +$ $m\angle TVU + m\angle UVQ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$167° + x° + 77° + x + 26° = 360°$	بالتعويض
$270° + 2x° = 360°$	بالتبسيط
$2x° = 90°$	بالطرح
$x° = 45°$	بالقسمة

233 الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

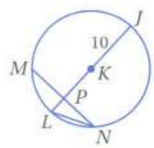
الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

8-3 الأقواس والأوتار (ص. 190-196)

19) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. 8



في $\odot K$، إذا كان $MN = 16,\ m\widehat{MLN} = 98°$، فأوجد كلّ قياس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



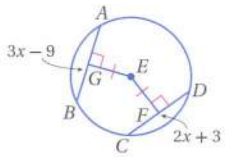
20) $m\widehat{NJ}$ 131°

21) LN 8.94

22) **بستنة:** يُبيّن الشكل عريشة يعلوها قوس من دائرة، إذا كان $\overline{CD}$ جزءًا من قطرها و $m\widehat{ACB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملةً، فأوجد $m\widehat{CB}$؟ 50.4°

مثال 3

جبر: في $\odot E$، إذا كان $EG = EF$، فأوجد AB.



بما أن الوترين $\overline{EG}$, $\overline{EF}$ متطابقان، فإن بعديهما عن E متساويان. إذن $AB = CD$.

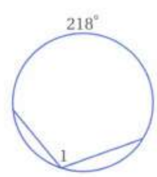
$AB = CD$	النظرية 8.5
$3x - 9 = 2x + 3$	بالتعويض
$3x = 2x + 12$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$x = 12$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

إذن $AB = 3(12) - 9 = 27$.

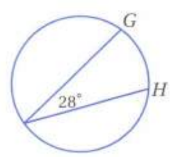
8-4 الزوايا المحيطية (ص. 197-203)

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

23) $m\angle 1$ 109°



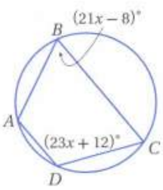
24) $m\widehat{GH}$ 56°



25) **شعارات:** إذا كان $m\angle 1 = 42°$ في الشعار المجاور، فأوجد $m\angle 5$. 42°

مثال 4

أوجد $m\angle D$ و $m\angle B$.



بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، فالزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

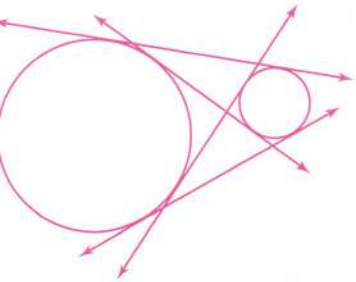
$m\angle D + m\angle B = 180°$	تعريف الزوايا المتكاملة
$(23x+12)° + (21x-8)° = 180°$	بالتعويض
$(44x+4)° = 180°$	بالتبسيط
$44x = 176$	بالطرح
$x = 4$	بالقسمة

إذن $m\angle D = (23(4) + 12)° = 104°$
و $m\angle B = (21(4) - 8)° = 76°$.

234 الفصل 8 الدائرة

إجابة:

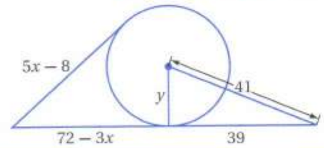
26)



8-5 المماسات (ص. 211-205)

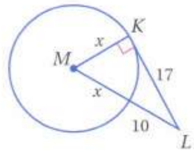
26) **خيال علمي:** كتب جابر قصة قصيرة، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوري بين كوكب معيّن ثنائي الأبعاد وقمره يكون ممكنًا إذا كان مسار الانتقال مماسًّا. ارسم المسارات الممكنة جميعها. انظر الهامش.

27) أوجد قيمة كل من x و y مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، قرِّب إجابتك إلى أقرب عشر. **$x = 10, y = 12.6$**



مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot M$ عند K كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.



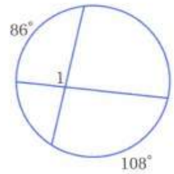
من النظرية 8.9، $\overline{MK} \perp \overline{KL}$ ؛ إذن $\triangle MKL$ مثلث قائم الزاوية.

$KM^2 + KL^2 = ML^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$	بالتعويض
$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$	بالضرب
$289 = 20x + 100$	بالتبسيط
$189 = 20x$	بالطرح
$9.45 = x$	بالقسمة

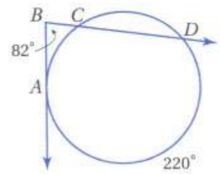
8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا (ص. 219-212)

أوجد القياسين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

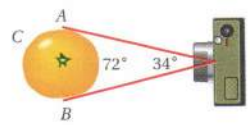
28) $m\angle 1$ **97°**



29) $m\widehat{AC}$ **56°**

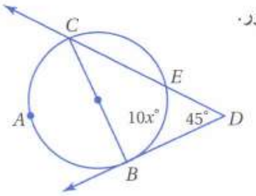


30) **تصوير:** أراد أحمد أن يلتقط صورة لبرتقالة. فأخذ اللقطة كما في الشكل أدناه، حيث كان خطا النظر مماسين لها. إذا كان قياس زاوية الرؤية لآلة التصوير °34، فأوجد $m\widehat{ACB}$.
140°



مثال 6

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



$\widehat{CAB}$ نصف دائرة؛ لأن $\overline{CB}$ قطر فيها.

إذن $m\widehat{CAB} = 180°$.

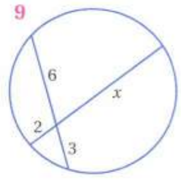
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$	النظرية 8.14
$45° = \frac{1}{2}(180 - 10x)°$	بالتعويض
$90 = 180 - 10x$	بالضرب
$-90 = -10x$	بالطرح
$9 = x$	بالقسمة

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة 235

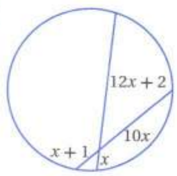
8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة (ص. 220-225)

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

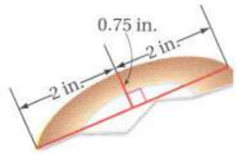
31) 9



32) 4

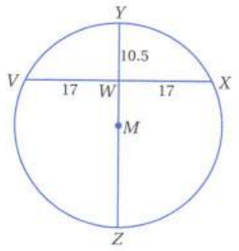


33) **علم الآثار:** وجد حمزة جزءًا من طبق أثري مكسور في أثناء حَفره حفرةً لزراعة شجرة. ما محيط الطبق الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **19.1 in.**



مثال 7

أوجد قطر الدائرة M.



$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$	النظرية 8.14
$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$	بالتعويض
$289 = 10.5 \cdot WZ$	بالتبسيط
$27.5 \approx WZ$	بقسمة كلا الطرفين على 10.5
$YZ = YW + WZ$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$YZ = 10.5 + 27.5$	بالتعويض
$YZ = 38$	بالتبسيط

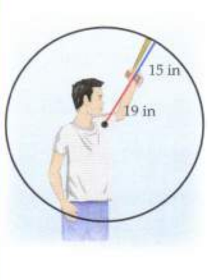
8-8 معادلة الدائرة (ص. 227-231)

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

34) مركزها $(-2, 4)$ ونصف قطرها 5. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

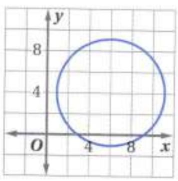
35) مركز $(1, 2)$ وقطرها 14. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 49$

36) **أخشاب:** يتعلم عادل في موقع تدريب خارج البيت إجراءات السلامة عند قطع الأخشاب، يتضمّن هذا التدريب تكوين دائرة بذراعه الممدودة للتأكد من عدم إصابة أي شيء فوقه عندما يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد ذراعه يصل إلى 19 in وطول مقبض آلة قطع الخشب 15 in، فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة لعادل؟ انظر الهامش.



مثال 8

اكتب معادلة الدائرة الممثّلة بيانيًّا أدناه.



مركز الدائرة $(6, 4)$ ونصف قطرها 5.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2$	$r = 5, (h, k) = (6, 4)$
$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$	بالتبسيط

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

نموذج التوقع

طلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع الفصل 8 ص(65)، وناقشهم حول تغيّر جاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

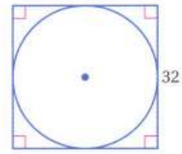
جابة:

36) نصف قطر الدائرة يساوي $19 + 15$ ويساوي 34 in، ومركزها (h, k) هو $(0, 0)$. إذن معادلة الدائرة هي $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 34^2$ أو $x^2 + y^2 = 34^2$.

الفصل 8 اختبار الفصل

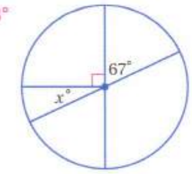
1) **برك سباحة:** عمق بركة سباحة دائرية الشكل 4 ft، وطول قطرها 25 ft. أوجد محيط هذه البركة مقربًا إلى أقرب قدم؟ **79 ft**

2) أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة الآتية: **32π**

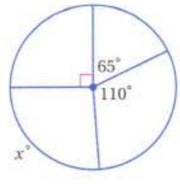


أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي:

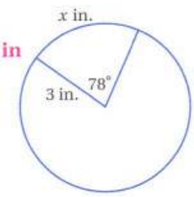
3) **$23°$**



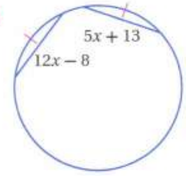
4) **$95°$**



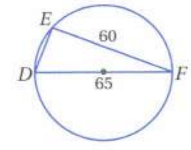
5) **4.1 in**



6) **3**

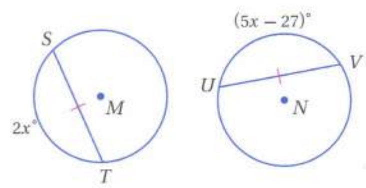


7) **اختيار من متعدد:** ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟ **B**



A 15   B 25   C 88.5   D المعلومات غير كافية

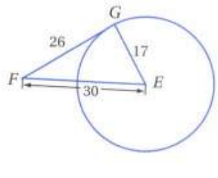
8) إذا كانت $\odot M \cong \odot N$، فأوجد قيمة x. **9**



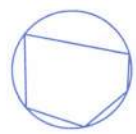
9) **اختيار من متعدد:** ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحدتين بالمركز؟ **A**

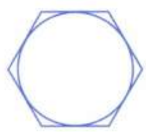
A 0   B 1   C 2   D عدد لانهائي من النقاط

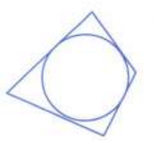
10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًا لـ $\odot E$. برّر إجابتك. **انظر الهامش.**



11) **اختيار من متعدد:** أي الأشكال أدناه يُمثّل دائرة تحيط بمضلع؟ **A**

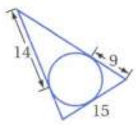
A


C


B


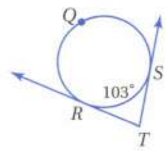
D


12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. **58**

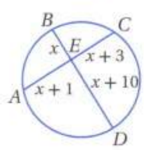


أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

13) $m\angle T$ **$77°$**



14) x **$\frac{1}{2}$**



15) **أزهار:** أرادت هند أن تحوّط جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت هند أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل الحد الخارجي لحوض الأزهار؟ **$x^2 + y^2 = 9$**

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.
تساعدك العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

إجابة:

10) لا؛ لأن $\triangle EFG$ ليس مثلثًا قائم الزاوية، إذن $\angle G$ ليست قائمة و لا يمكن أن يكون $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة.

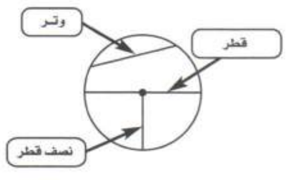
مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر: أحد المصادر الآتية:	فاختر: أحد المصدرين الآتيين:
الدروس: 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6 , 8-7, 8-8	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)	www.obeikaneducation.com
www.obeikaneducation.com	

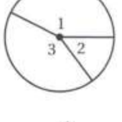
خصائص الدائرة

الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة خصائص وعلاقات خاصة.

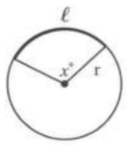
ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



$r = \frac{1}{2}d$
$d = 2r$
$C = 2\pi r$ أو πd



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360$



$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$

استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمّن العناصر الأساسية: **نصف القطر والقطر والوتر والقوس والمماس والقاطع**.
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة إلى العلاقة بين عناصر الدائرة.

الخطوة 2

اقرأ نص المسألة، وادرس أي شكل معطى بدقة وعناية.

- حدّد المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمّنها المسألة، وأيّ معلومات أخرى يمكن أن تُحدّدها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

حُلّ المسألة، وتحقّق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخصائص لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك، وتأكّد من كونها مقبولة ومنطقية.

1 التركيز

الهدف: تعيين عناصر الدائرة وإيجاد قياس ل من القوس والزاوية والقطع المستقيمة يها وكتابة معادلتها.

2 التدريس

سئلة التعزيز

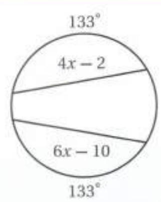
سأل:

- كيف تجد محيط الدائرة إذا علمت نصف قطرها؟
- ما الفرق بين الوتر والمماس والقاطع؟
- في الدائرة الواحدة أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا تطابق وتران ، فما العلاقة بين بعديهما عن المركز؟

مثال

اقرأ المسالة جيدًا، وحدّد المطلوب فيها ، ثم استعمل المعطيات لحلّها.

أوجد قيمة x في الشكل المجاور:



A 2 **C** 4

B 3 **D** 6

اقرأ المسألة وادرس الشكل جيدًا. أعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين. يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. يمكنك استعمال هذه الخاصية لتكوين معادلة بدلالة x، ومن ثم حلّها.

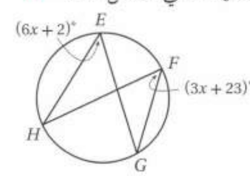
$4x - 2 = 6x - 10$	تعريف القطع المتطابقة
$4x - 6x = -10 + 2$	بالطرح
$-2x = -8$	بالتبسيط
$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$	بقسمة كلا الطرفين على 2−
$x = 4$	بالتبسيط

إذن قيمة x تساوي 4. فالإجابة هي C. تحقّق من إجابتك بتعويض 4 في كلّ من عبارتَي الوترين، فتجد أن طولَي الوترين متساويان.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي. ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على النموذج المخصص للإجابة.

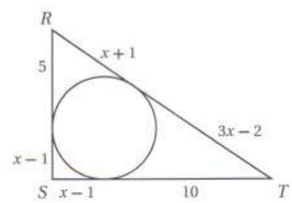
1) أوجد قيمة x في الشكل أدناه: D



A 4 **C** 6

B 5 **D** 7

2) يُحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه. ما محيط هذا المثلث؟ G

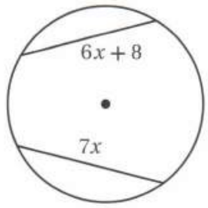


F 33 وحدة **H** 37 وحدة

G 36 وحدة **J** 40 وحدة

مثال إضافي

1 تدريب على اختبار معياري: اقرأ المسألة ثم حدد المعلومة التي تحتاج إلى معرفتها. ثم استعمل المعلومات المعُطاة في المسألة لإيجاد قيمة x.



تحتاج إلى معرفة ما إذا كان الوتران متطابقين. لا توجد معلومات كافية لإيجاد قيمة x.

3 التقويم

استعمل التمرينين 2 ,1 للتحقق من فهم الطلاب.

239 الفصل 8 الإعداد للاختبارات المعيارية

تشخيص أخطاء الطلاب

أجر مسحًا شاملاً لإجابات الطلاب عن كل فقرة. فقد تشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية.

1) A خمّن
B صحيحة
C أخطأ حسابيًّا
D أخطأ حسابيًّا

2) A لم يفهم النفي
B صحيحة
C لم يفهم البرهان غير المباشر
D تخمين

3) A استعمل المجموع °290 بدلاً من المجموع °360.
B استعمل المجموع °330 بدلاً من المجموع °360.
C صحيحة
D استعمل المجموع °380 بدلاً من المجموع °360

4) A أخطأ حسابيًّا
B أخطأ حسابيًّا
C صحيحة
D خمّن

5) A خمّن
B صحيحة
C خمّن
D خمّن

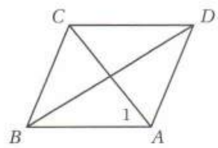
6) A صحيحة
B نسي العلاقة بين المماس ونصف القطر الذي طرفه نقطة التماس.
C نسي العلاقة بين المماس ونصف القطر الذي طرفه نقطة التماس.
D نسي العلاقة بين المماس ونصف القطر الذي طرفه نقطة التماس.

الفصل 8 اختبار معياري
تراكمي، الفصول 1-8

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

1) إذا كان $ABCD$ معينًا، وكان $m\angle ABC = 70°$ ، فأوجد $m\angle 1$؟ **B**

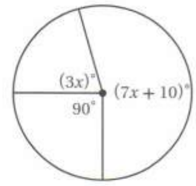


A $45°$ **C** $70°$
B $55°$ **D** $125°$

2) يقول محمد: "إذا كنت تقيم في جدة، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية". أيّ الافتراضات الآتية تبدأ به برهانًا غير مباشر لهذه العبارة؟ **B**

A افترض أن شخصًا يقيم في السعودية، لكنه لا يقيم في جدة.
B افترض أن شخصًا يقيم في جدة، لكنه لا يقيم في السعودية.
C افترض أن شخصًا يقيم في جدة، ويقيم في السعودية.
D افترض أن شخصًا يقيم في السعودية، ويقيم في جدة.

3) أوجد قيمة x في الشكل أدناه: **C**

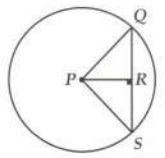


A 19 **C** 26
B 23 **D** 28

إرشادات للاختبار

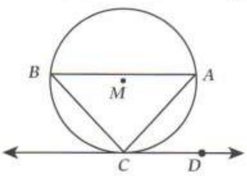
السؤال 3: استعمل خصائص الدائرة، لكتابة المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x.

4) نصف قطر $\odot P$ في الشكل أدناه يساوي 5 ، إذا كان $PR = 3$، فما طول $\overline{QS}$؟ **C**



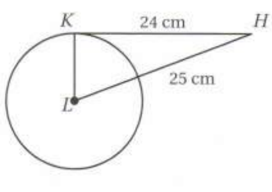
A 4 **C** 8
B 5 **D** 10

5) في $\odot M$ ، إذا كان $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ مماس لـ$\odot M$ عند النقطة C كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACD$؟ **B**



A $30°$ **C** $90°$
B $60°$ **D** $120°$

6) إذا كانت $\overline{HK}$ مماسًّا للدائرة L في الشكل أدناه، فأوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot L$. **A**

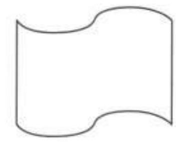


A 14π cm **C** 18π cm
B 16π cm **D** 20π cm

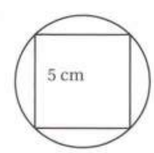
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك على نموذج الإجابة.

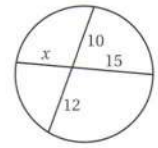
7) هل للشكل الآتي تماثل دوراني؟
وإذا كان كذلك، فأوجد رتبة هذا التماثل. نعم؛ الرتبة 2



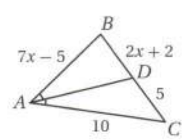
8) رُسمَ مربع طول ضلعه 5 cm داخل دائرة.
ما محيط هذه الدائرة ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر سنتمتر. **22.2 cm**



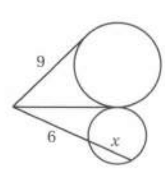
9) أوجد قيمة x في الشكل الآتي، مبيّنًا خطوات الحل. **8**



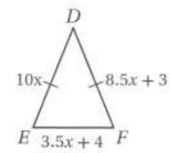
10) $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$ كما في الشكل المجاور. أوجد قيمة x. **3**



11) أوجد قيمة x في الشكل أدناه مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. **7.5**



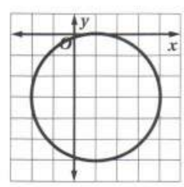
12) ما طول $\overline{EF}$ في المثلث أدناه؟ **11**



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

13) **استعمل الدائرة في الشكل أدناه لحل الأسئلة الآتية:**



a) ما مركز الدائرة؟ $(1, -3)$

b) ما نصف قطر الدائرة؟ 3 وحدات

c) اكتب معادلة الدائرة.
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	5−5	4−3	8−2	8−3	8−6	8−5	7−5	8−4	8−7	6−5	8−5	3−6	8−8

التقويم التكويني

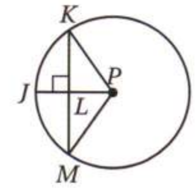
يمكنك تحديد مدى تقدم الطلاب في الفصل 8 من خلال:

- اختبار معياري تراكمي، ص (240-241)
- الاختبار التراكمي، ص (83-81)

الدرس 3-8، ص 196-195

20) المعطيات: $\odot P, \overline{KM} \perp \overline{JP}$

المطلوب: $\overline{JP}$ يُنصف $\overline{KM}, \widehat{KM}$.



البرهان:

العبارات (المبررات) :

1) $\overline{KM} \perp \overline{JP}$ (معطيات)

2) ارسم نصفي القطرين
$\overline{PK}, \overline{PM}$. (كل نقطتين يمر بهما مستقيم واحد)

3) $\overline{PK} \cong \overline{PM}$
(أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

4) $\overline{PL} \cong \overline{PL}$
(خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\angle PLM, \angle PLK$ قائمتان. (تعريف التعامد)

6) $\angle PLM \cong \angle PLK$
(جميع الزوايا القائمة متطابقة)

7) $\triangle PLM \cong \triangle PLK$ (HL)

8) $\overline{ML} \cong \overline{KL}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

9) $\overline{PJ}$ ينصف $\overline{KM}$. (تعريف المنصف)

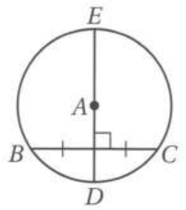
10) $\angle MPJ \cong \angle KPJ$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

11) $\widehat{MJ} \cong \widehat{KJ}$ (في الدائرة نفسها، يتطابق القوسان إذا تطابقت الزوايا المركزية المناظرة لهما)

12) $\overline{JP}$ ينصف $\widehat{KM}$. (تعريف المنصف)

24) المعطيات: $\odot A, \overline{AD}$ عمود منصف لـ $\overline{BC}$.

المطلوب: $\overline{ED}$ قطر في $\odot A$.



البرهان:

العبارات (المبررات) :

1) $\overline{ED}$ عمود منصف لـ $\overline{BC}$ (معطيات)

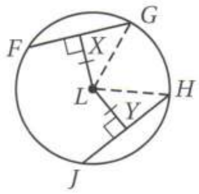
2) تقع A على بعدين متساويين عن B, C
(جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

3) A تقع على العمود المنصف لـ $\overline{BC}$.
(عكس نظرية العمود المنصف)

4) $\overline{ED}$ قطر للدائرة A. (تعريف القطر)

25) المعطيات: $\odot L, \overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}, \overline{LX} \cong \overline{LY}$

المطلوب: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$



البرهان:

العبارات (المبررات) :

1) $\overline{LG} \cong \overline{LH}$ (أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

2) $\overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}, \overline{LX} \cong \overline{LY}$ (معطيات)

3) $\angle LXG, \angle LYH$ قائمتان (تعريف المستقيمات المتعامدة)

4) $\triangle XGL \cong \triangle YHL$ (HL)

5) $\overline{XG} \cong \overline{YH}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

6) $XG = YH$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

7) $2(XG) = 2(YH)$ (خاصية الضرب)

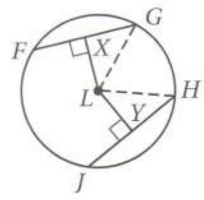
8) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ ؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$
(نصف القطر العمودي على الوتر ينصفه)

9) $FG = 2(XG), JH = 2(YH)$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

10) $FG = JH$ (بالتعويض)

11) $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

26) المعطيات: $\odot L$, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$,



$\overline{LH}, \overline{LG}$ أنصاف أقطار .

$\overline{LX} \perp \overline{FG}$; $\overline{LY} \perp \overline{JH}$

المطلوب: $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

البرهان:

العبارات (المبررات):

1) $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ ، $\overline{LG}, \overline{LH}$ أنصاف أقطار ، $\overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}$ (معطيات)

2) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ ؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$ ($\overline{LY}, \overline{LX}$ محتواتان في نصفي قطرين ونصف القطر العمودي على الوتر ينصف هذا الوتر)

3) $XG = \frac{1}{2}FG, YH = \frac{1}{2}JH$ (تعريف العمود المنصف)

4) $FG = JH$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}JH$ (خاصية الضرب)

6) $XG = YH$ (بالتعويض)

7) $\overline{XG} \cong \overline{YH}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

8) $\overline{LG} \cong \overline{LH}$ (جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

9) $\angle GXL, \angle HYL$ قائمتان (تعريف المستقيمات المتعامدة)

10) $\triangle XLG \cong \triangle YLH$ (HL)

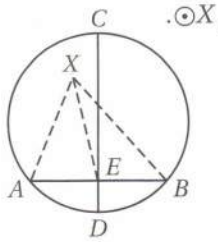
11) $\overline{LX} \cong \overline{LY}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

27) 17.3 تقريبًا ؛ P و Q تبعدان مسافات متساوية عن نقطتي طرفي $\overline{AB}$ ، إذن كلاهما واقعة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، لذلك نجد أن $\overline{PQ}$ هي العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، لذا فإن طول كل جزء من القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ يساوي 5. بما أن $\overline{PS}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$ ، حيث S نقطة تقاطع $\overline{PQ}, \overline{AB}$ ، فإن $\angle PSA$ قائمة. إذن $\triangle PSA$ قائم الزاوية. و بتطبيق نظرية فيثاغورس

$PS = \sqrt{(PA)^2 - (AS)^2}$, . وبالتعويض،

$PS = \sqrt{11^2 - 5^2} = \sqrt{96}$. وبالطريقة نفسها $\triangle ASQ$ قائم الزاوية فيه $SQ = \sqrt{(AQ)^2 - (AS)^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56}$. وبما أن $PQ = PS + SQ$ فإن $PQ = \sqrt{96} + \sqrt{56}$ أو 17.3 تقريبًا.

29a) المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف للوتر $\overline{AB}$ في $\odot X$.

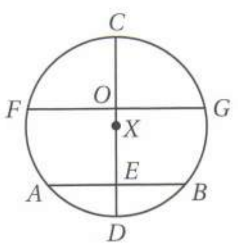


المطلوب: $\overline{CD}$ يمر بالنقطة X.

البرهان:

أفرض أن X لا تقع على $\overline{CD}$. ارسم $\overline{XE}$ وأنصاف الأقطار $\overline{XB}$, $\overline{XA}$. بما أن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ و E نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{EB} \cong \overline{AE}$ ، وكذلك $\overline{XA} \cong \overline{XB}$ ، لأن جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة. $\overline{XE} \cong \overline{XE}$ خاصية الانعكاس. لذا، $\triangle AXE \cong \triangle BXE$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\angle XEA \cong \angle XEB$. وبما أن $\angle XEB$, $\angle XEA$ متجاورتان متطابقتان تكوّنان $\angle AEB$ ، فإن $\overline{XE} \perp \overline{AB}$ لذا $\overline{XE}$ عمود منصف لِـ $\overline{AB}$ ، لكن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، وهذا يناقض كون العمود المنصف للقطعة المستقيمة وحيدًا، لذا، فالفرض خطأ. والمركز X يجب أن يقع على $\overline{CD}$.

29b) المعطيات: في $\odot X$. تقع X على $\overline{CD}$ و $\overline{FG}$ ينصف $\overline{CD}$ عند O.



المطلوب: O هي النقطة X.

البرهان:

بما أن النقطة X تقع على $\overline{CD}$ ، C, D تقعان على $\odot X$ ، فإن $\overline{CD}$ قطر للدائرة $\odot X$. وبما أن $\overline{FG}$ ينصف $\overline{CD}$ عند O، فإن O نقطة منتصف $\overline{CD}$. وبما أن نقطة منتصف القطر هي مركز الدائرة، فإن O هي مركز الدائرة. لذلك فالنقطة O هي النقطة X.

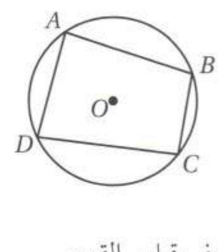
30) لا؛ إجابة ممكنة: في دائرة نصف قطرها 12، القوس الذي قياسه $60°$ يقابل وترًا طوله 12. إذا أصبح قياس القوس ثلاثة أمثال قياس القوس الأصلي؛ أي أصبح $180°$، فإن طول الوتر يساوي 24 لأنه أصبح قطرًا، وهذا لا يساوي ثلاثة أمثال 12.

الدرس 4-8 ، ص (202, 203)

18) البرهان:

العبارات	(المبررات)
1) $(m\angle T=\frac{1}{2}m\angle S$	معطيات
2) $m\angle S = 2m\angle T$	خاصية الضرب
3) $m\angle S = \frac{1}{2}m\widehat{TUR},$ $m\angle T = \frac{1}{2}m\widehat{URS}$	قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل
4) $\frac{1}{2}m\widehat{TUR} = 2\left(\frac{1}{2}m\widehat{URS}\right)$	بالتعويض
5) $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{URS}$	خاصية الضرب

27) المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ محاط بالدائرة O.



المطلوب: $\angle A$, $\angle C$ متكاملتان، $\angle B$, $\angle D$ متكاملتان.

البرهان: بتطبيق مسلمة جمع الأقواس وتعريف قياس القوس ومجموع الزوايا المركزية، يكون $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360°$.

وبما أن $m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{DCB}$ و $m\angle C = \frac{1}{2}m\widehat{DAB}$

فإن $\frac{1}{2}(m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB}) = m\angle C + m\angle A$

ولكن $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360°$

إذن $m\angle C + m\angle A = \frac{1}{2}(360°) = 180°$. وهذا يثبت أن $\angle C$ و $\angle A$ متكاملتان. ولأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي يساوي $360°$ فإن $m\angle A + m\angle C + m\angle B + m\angle D = 360°$. ولكن $m\angle A + m\angle C = 180°$ ، إذن $m\angle B + m\angle D = 180°$، وهذا يثبت أن هاتين الزاويتين متكاملتان أيضًا.

28) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ (مسلمة جمع الزوايا)

2) $m\widehat{ADC} = m\widehat{AD} + m\widehat{DC}$ (مسلّمة جمع الأقواس)

3) $\frac{1}{2}m\widehat{ADC} = \frac{1}{2}m\widehat{AD} + \frac{1}{2}m\widehat{DC}$ (خاصية الضرب)

4) $m\angle ABD = \frac{1}{2}m\widehat{AD},\ m\angle DBC = \frac{1}{2}m\widehat{DC}$

(قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرًا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل (الحالة 1)).

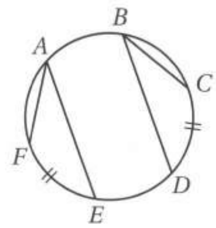
5) $\frac{1}{2}m\widehat{ADC} = m\angle ABD + m\angle DBC$

(بالتعويض (الخطوتان 3, 4))

6) $\frac{1}{2}m\widehat{ADC} = m\angle ABC$

(بالتعويض (الخطوتان 5, 1))

30) المعطيات: $\angle FAE$ و $\angle CBD$ محيطيتان؛ $\widehat{EF} \cong \widehat{DC}$



المطلوب: $\angle FAE \cong \angle CBD$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\angle FAE$ و $\angle CBD$ محيطيتان، $\widehat{EF} \cong \widehat{DC}$ (معطيات)

2) $m\angle FAE = \frac{1}{2}m\widehat{EF}; m\angle CBD = \frac{1}{2}m\widehat{DC}$

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

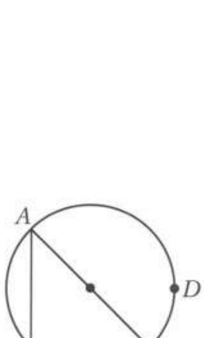
3) $m\widehat{EF} = m\widehat{DC}$ (تعريف تطابق الأقواس)

4) $\frac{1}{2}m\widehat{EF} = \frac{1}{2}m\widehat{DC}$ (خاصية الضرب)

5) $m\angle FAE = m\angle CBD$ (بالتعويض)

6) $\angle FAE \cong \angle CBD$ (تعريف تطابق الزوايا)

31) الجزء I: **المعطيات:** $\widehat{ADC}$ نصف دائرة.



المطلوب: $\angle ABC$ قائمة.

البرهان: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة،

$m\widehat{ADC} = 180°$ ، $\angle ABC$ محيطية،

$m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = 90°$

وهذا يعني أن $\angle ABC$ قائمة.

الجزء II: **المعطيات:** $\angle ABC$ قائمة.

المطلوب: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة.

البرهان: بما أن $m\angle ABC = 90°$ فإن قياس القوس المقابل لها يساوي $180°$. وبما أن قياس القوس المقابل يساوي $180°$، فهو نصف دائرة.

33) صحيحة دائمًا، المربع جميع زوايا المربع قائمة، إذن زواياه المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في دائرة.

34) صحيحة دائمًا، جميع زوايا المستطيل قائمة، إذن زواياه المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في نصف دائرة.

35) صحيحة أحيانًا، يمكن أن يكون المعيّن محاطًا بدائرة إذا كان مربعًا. بما أن الزوايا المتقابلة في المعين الذي لا يكون مربعًا ليست متكاملة، إذن لا يمكن أن يحاط هذا المعين بدائرة.

36) صحيحة أحيانًا، في حالة كون أي زاويتين متقابلتين متكاملتين.

38) المثلث الذي زواياه $90°-45°-45°$ يمكن أن يُحاط بدائرة يكون فيها قوسان أصغران متساويين، كل منهما يساوي $90°$. من النظرية 8.8، تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة إذا وفقط إذا كانت قائمة. إذن وتر المثلث القائم الزاوية يساوي قطر الدائرة. وباستعمال المثلثات، فإن طول ساق المثلث يساوي $\sin 45° \cdot 2r = \sqrt{2}\, r$

40) الزاوية المحيطية يقع رأسها على الدائرة. أما الزاوية المركزية فيقع رأسها عند مركز الدائرة. وإذا كانت الزاوية المحيطية والزاوية المركزية تقابلان القوس نفسه، فإن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية.

الدرس 8-5، ص (210, 211)

22) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند C؛ $\overline{AB}$ مماس للدائرة H عند B. (معطيات)

2) ارسم $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$. (أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد)

3) $\overline{AC} \perp \overline{CH}, \overline{AB} \perp \overline{BH}$ (مماس الدائرة عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس)

4) $\angle ACH, \angle ABH$ قائمتان. (تعريف تعامد المستقيمات)

5) $\overline{CH} \cong \overline{BH}$ (جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

6) $\overline{AH} \cong \overline{AH}$ (خاصية الانعكاس)

7) $(HL)\ \triangle ACH \cong \triangle ABH$

8) $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

25) البرهان: افترض أنّ ℓ ليس مماسًا لـ$\odot S$ عند T. لذا يجب أن يقطع الدائرة في نقطة أُخرى ولتكن Q. إذن $ST = SQ$. ولكن إذا كانت $\overline{ST} \perp \ell$ فإنّ $\overline{ST}$ يجب أن تكون أقصر قطعة مستقيمة من S إلى ℓ. وبما أنّ T, Q نقطتان مختلفتان واقعتان على ℓ، فإن هذا تناقض. لذا ℓ مماس لـ$\odot S$.

الدرس 8-6، ص (218, 219)

24) العبارات (المبررات)

1) $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة. (معطيات)

2) $m\angle DCE = \frac{1}{2} m\widehat{DE}$,
$m\angle ADC = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله)

3) $m\angle DCE = m\angle ADC + m\angle A$ (نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\widehat{DE} = \frac{1}{2} m\widehat{BC} + m\angle A$ (بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\widehat{DE} - \frac{1}{2} m\widehat{BC} = m\angle A$ (خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC}) = m\angle A$ (خاصية التوزيع)

25) العبارات (المبررات)

1) $\overline{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها. (معطيات)

2) $m\angle FLH = \frac{1}{2} m\widehat{HG}, m\angle LHM = \frac{1}{2} m\widehat{LH}$
(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

3) $m\angle LHM = m\angle FLH + m\angle F$
(نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\widehat{LH} = \frac{1}{2} m\widehat{HG} + m\angle F$
(بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\widehat{LH} - \frac{1}{2} m\widehat{HG} = m\angle F$
(خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{HG}) = m\angle F$
(خاصية التوزيع)

26) **العبارات (المبررات)**

1) $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة. (معطيات)

2) $m\angle STV = \frac{1}{2} m\, \widehat{SWT}$،
$m\angle RST = \frac{1}{2} m\, \widehat{ST}$
(قياس الزاوية بين المماس والقاطع عند نقطة التماس يساوي نصف قياس القوس المقابل)

3) $m\angle STV = m\angle RST + m\angle R$ (نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\widehat{SWT} = \frac{1}{2} m\, \widehat{ST} + m\angle R$
(بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\widehat{SWT} - \frac{1}{2} m\, \widehat{ST} = m\angle R$
(خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\, \widehat{ST}) = m\angle R$
(خاصية التوزيع)

27) **البرهان:**

$\angle CAB, \angle CAE$ زاويتان متجاورتان على مستقيم ولذلك
$m\angle CAB + m\angle CAE = 180°$.

وبما أن $\angle CAB$ منفرجة، فإن $\angle CAE$ حادة. ولذلك تنطبق عليها الحالة الأخرى للنظرية، أي أن $m\angle CAE = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$

لكن $m\widehat{CA} + m\widehat{CDA} = 360°$ ،

وبالتعويض فإن: $\frac{1}{2}m\widehat{CA} + \frac{1}{2}m\widehat{CDA} = 180°$ بحسب خاصية الضرب.

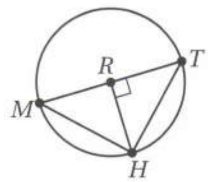
إذن، $m\angle CAE + \frac{1}{2}m\widehat{CDA} = 180°$. وبحسب خاصية التعدي ينتج أن:

$$m\angle CAB + m\angle CAE = m\angle CAE + \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$$

وبحسب خاصية الطرح ينتج أن $m\angle CAB = \frac{1}{2}m\widehat{CDA}$.

39) **المعطيات:** $\widehat{MHT}$ نصف دائرة.
$\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\widehat{MHT}$ نصف دائرة؛ $\overline{RH} \perp \overline{TM}$. (معطيات)

2) $\angle THM$ قائمة. (الزاوية المحيطية التي تقابل نصف دائرة تكون قائمة)

3) $\angle TRH$ قائمة (تعريف تعامد مستقيمين)

4) $\angle THM \cong \angle TRH$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

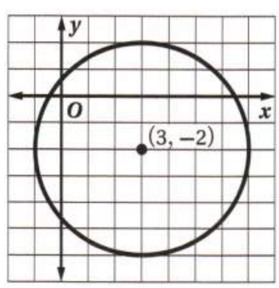
5) $\angle T \cong \angle T$ (خاصية الانعكاس)

6) $\triangle TRH \sim \triangle THM$ (مسلمة التشابه AA)

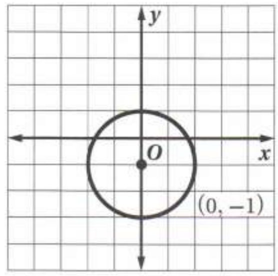
7) $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$ (تعريف تشابه المثلثات)

الدرس 8-8 ، ص (231–229)

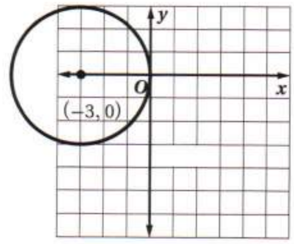
7) $(3, -2); 4$



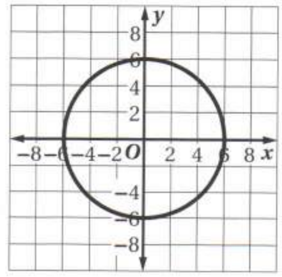
8) $(0, -1); 2$



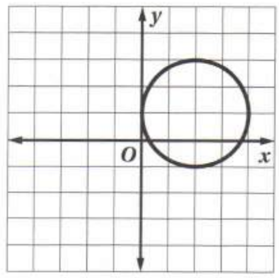
9) المركز $(-3, 0)$؛ نصف القطر 3



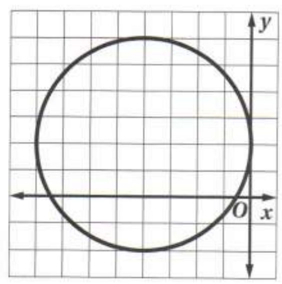
20) $6; (0, 0)$



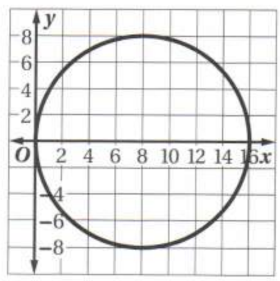
21) $2; (2, 1)$



22) $4; (-4, 2)$



23) $8; (8, 0)$



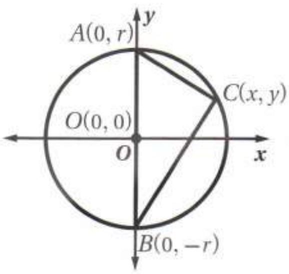
24) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$

25) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 8$

31) **المعطيات:** $\overline{AB}$ قطر في $\odot O$،

C نقطة على $\odot O$.

المطلوب: $\angle ACB$ قائمة.

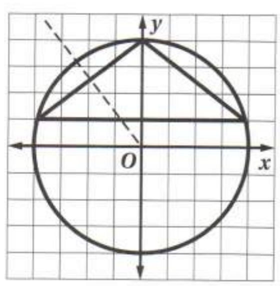


البرهان:

العبارات	(المبررات)
1) $\frac{y-r}{x}$	ميل $\overline{AC}$
2) $\frac{y-(-r)}{x} = \frac{y+r}{x}$	ميل $\overline{CB}$
3) $\frac{y-r}{x} \cdot \frac{y+r}{x} = \frac{y^2-r^2}{x^2}$	بالضرب
4) $= \frac{y^2-(x^2+y^2)}{x^2}$	$r^2 = x^2 + y^2$
5) $= \frac{y^2-x^2-y^2}{x^2}$	$-(x^2+y^2) = -x^2 - y^2$
6) $\frac{-x^2}{x^2} = -1$	بالتبسيط

بما أن حاصل ضرب ميلي $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ يساوي -1، فإن $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ و $\angle ACB$ قائمة.

33) إجابة ممكنة:



الرياضيات

المحتويات

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education