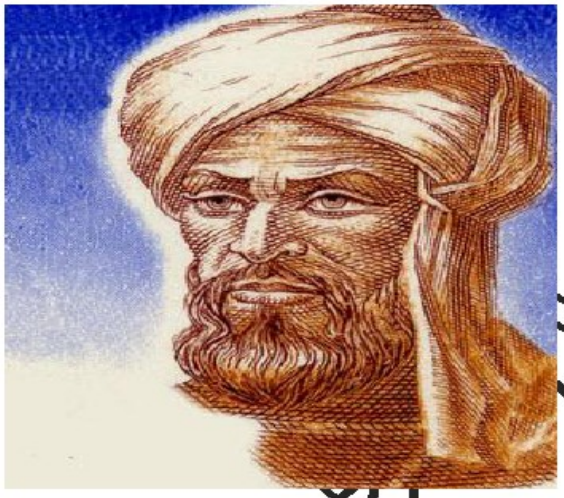
النهائية في الرياضيات



سلسلة مذكرة النهائية فى الرياضيات

- النهائية للصف الأول الإعدادي
- النهائية للصف الثاني الإعدادي
- النهائية للصف الثالث الإعدادي
- النهائية للصف الأول الثانوي
- النهائية للصف الثاني الثانوي + (ميكانيكا)
- النهائية للصف الثالث الثانوي + (الإحصاء)

إعداد أ. محمود جمعه

مدرس الرياضيات للثانوية العامة

تليفون ٠١٢٨٥٨٤٧٤٨٠

توزيع المنهج للفصل الدراسى الاول

أولاً : الوحدة الأولى (الجبر والعلاقات والدوال)

الدرس الاول : حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

الدرس الثانى : مقدمة عن الاعداد المركبة

الدرس الثالث : تحديد نوع جذرى المعادلة

الدرس الرابع : العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

الدرس الخامس : إشارة الدالة

الدرس السادس : متباينات الدرجة الثانية

ثانياً : الوحدة الثانية (التشابه)

الدرس الاول : تشابه المضلعات

الدرس الثانى : تشابه المثلثات

الدرس الثالث : العلاقة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين

الدرس الرابع : تطبيقات التشابه فى الدائرة

ثالثاً : الوحدة الثالثة (نظريات التناسب فى المثلث)

الدرس الاول : المستقيمات المتوازية والاجزاء المتناسبة

الدرس الثانى : منصفا الزاوية والاجزاء المتناسبة

الدرس الثالث : تطبيقات التناسب فى الدائرة

رابعاً : الوحدة الرابعة (حساب المثلثات)

الدرس الاول : الزاوية الموجهه

الدرس الثانى : وحدات قياس الزاوية

الدرس الثالث : الدوال المثلثية

الدرس الرابع : العلاقة بين الدوال المثلثية

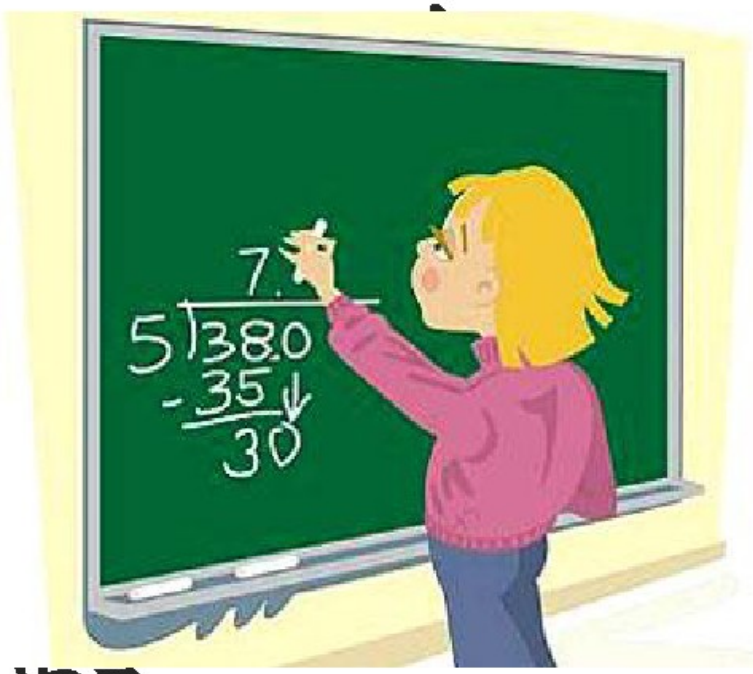
الدرس الخامس : التمثيل البيانى للدوال المثلثية

الدرس السادس : إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية

النهائية في الرياضيات

الصـــــف الأول الثانـــــوى

الفصل الدراسي الأول



أولاً: الجبر

إعـــداد أ. محمود جمعه

مدرس الرياضيات للثانوية العامة

تليفون ٠١٢٨٥٨٤٧٤٨٠

الدرس الاول : حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س (س – ٣) = ٠

س = ٠ | س – ٣ = ٠

س = ٣

م . ح = { ٠ ، ٣ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : ٢س (٣س + ٦) = ٠

٢س = ٠ | ٣س + ٦ = ٠

س = ٠ | ٣س = –٦

س = –٢

م . ح = { ٠ ، –٢ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س^{٢} – س = ٠

س (س – ١) = صفر

س = ٠ | س – ١ = ٠

س = ١

م . ح = { ٠ ، ١ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س^{٢} + ٣س = ٠

س (س + ٣) = ٠

س = ٠ | س + ٣ = ٠

س = –٣

م . ح = { ٠ ، –٣ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س (س^{٢} − ١) = ٠

س (س − ١) (س + ١) = ٠

س = ٠	س − ١ = ٠	س + ١ = ٠
	س = ١	س = −١

م . ح = { ٠ ، −١ ، ١ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : (س − ٤)^{٢} = ٠

(س − ٤) (س − ٤) = ٠

س − ٤ = ٠

س = ٤ ، م . ح = { ٤ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س^{٢} + ٩ = ٠ م . ح = ∅

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س^{٢} − ٢س = −١

س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(س − ١) (س − ١) = ٠

س − ١ = ٠

س = ١

م . ح = { ١ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س^{٢} −٦س = −٩

س^{٢} −٦س + ٩ = ٠

(س − ٣) (س − ٣) = ٠

س − ٣ = ٠

س = ٣

م . ح = { ٣ }

أوجد مجموعة حل المعادلتين : $س^٢ - س = ١٢$

$س^٢ - س - ١٢ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٤) = ٠$

$س + ٣ = ٠$	$س - ٤ = ٠$
$س = -٣$	$س = ٤$

م . ح = { -٣ ، ٤ }

حل بالقانون العام : $س^٢ - ٦س + ٧ = ٠$ مقرباً الناتج لاقرب رقم عشرى واحد

أ = ١ ب = -٦ حـ = ٧

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ٧}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٢٨}}{٢}$$

$$س = \frac{٦ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٦ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٢(٣ \pm \sqrt{٢})}{٢} = ٣ \pm \sqrt{٢}$$

س = ٤,٤١٤ ، س = ١,٥٨

م . ح لاقرب رقم عشرى واحد = { ٤,٤١٤ ، ١,٥٨ }

أوجد مجموعة حل المعادلة بالقانون العام : $س^٢ - ٣(س - ١) = ٥$

$س^٢ - ٣س + ٦ = ٥$ ، $س^٢ - ٣س + ١ = صفر$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤}}{٢}$$

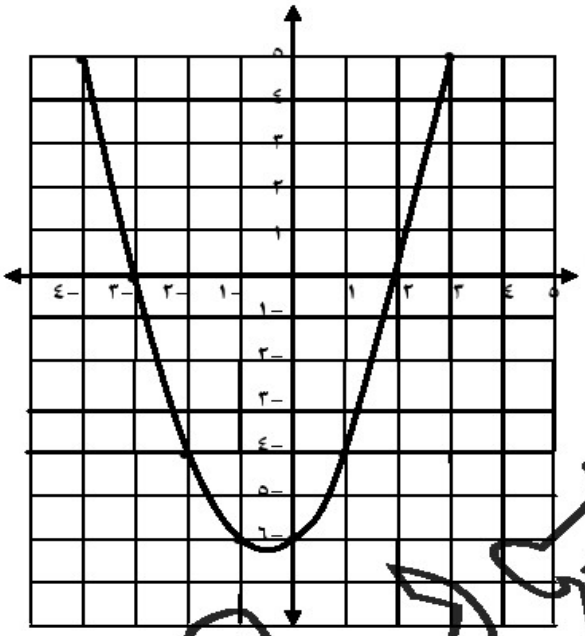
$$س = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

س = ٢,٦١ ، س = ٠,٣٨ ، م . ح = { ٢,٦١ ، ٠,٣٨ }

حل بيانياً س^{٢} + س = ٦ ثم حقق الحل جبرياً

س^{٢} + س − ٦ = صفر نفرض الفترة [−٤ ، ٣]

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	−٤	−٦	−٦	−٤	٠	٦



مجموعة الحل هى ناتج تقاطع المنحنى مع محور السينات فقط : ٢ ، −٣

م . ح = { ٢ ، − ٣ }

و يمكننا التحقق جبرياً عن طريق التحليل / القانون العام / بالالة الحاسبة

س^{٢} + س − ٦ = صفر

(س − ٢) (س + ٣) = ٠

س = ٢ ، س = −٣ م . ح = { ٢ ، − ٣ }

حل بيانياً : ٦س^{٢} = ٦ − ٥س ثم حقق الحل جبرياً

٦س^{٢} + ٥س − ٦ = صفر نفرض الفترة [−٢ ، ١]

(كمل الحل والرسم)

س	−٢	−١	٠	١
ص	٨	−٥	−٦	٥

حل بيانياً : $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س = ١ ثم حقق الحل جبرياً

لتبسيط المسالة بالضرب × ١٠ : ٥س^{٢} − ٦س = ١٠ ، ٥س^{٢} − ٦س − ١٠ = ٠ (كمل الحل)

س	٠	١	٢	٣
ص	−١٠	−١١	−٢	١٧

الدرس الثانى : مقدمة عن الأعداد المركبة

العدد التخيلي (ت) : هي جذور تربيعية لأعداد سالبه

أمثلة على الاعداد التخيلية : ٢ ت ، −٣ت ، ٥ ت ، $\sqrt{٢}$ ت

★ قوى الاعداد التخيلية الصحيحة

$ت^{١} = ت$ ، $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -١ \times ت = -ت$

$ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$ ، $ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$

★ قاعدة الوجه العام للأعداد التخيلية

$ت^{٤ن} = ١$ ، $ت^{٤ن+١} = ت$ ، $ت^{٤ن+٢} = -١$ ، $ت^{٤ن+٣} = -ت$

اختصر مما يأتى : $ت^{٣٠}$ ، $ت^{٤٣}$ ، $ت^{-٦١}$ ، $ت^{٤ن+١٩}$

$ت^{٣٠} = ت^{٤\times٧+٢} = ت^{٤ن+٢} = -١$ ، $ت^{٤٣} = ت^{٤\times١٠+٣} = ت^{٤ن+٣} = -ت$

$ت^{-٦١} = ت^{٦١} = ت^{٤\times١٥+١} = ت^{٤ن+١} = ت$ فتكون $ت^{-٦١} = -ت$

$ت^{٤ن+١٩} = ت^{٤ن+٣+١٦} = ت^{٤ن+٣} \times ت^{١٦} = ت^{٤ن+٣} \times ت^{٤ن} = ت^{٤ن+٣} \times ١ = -ت$

★ العمليات على الأعداد المركبة :

★ **(٧ − ٤ت) + (٢ + ت)** = ٧ − ٤ب + ٢ + ت = ٩ − ٣ت

★ **(١٢ − ٥ت) − (٧ − ٩ت)** = ١٢ − ٥ت − ٧ + ٩ت = ٥ + ٤ت

★ **(٢ + ٣ت) (٣ − ٤ت)** = ٦ − ٨ت + ٩ت − ١٢ت^{٢} = ١٨ + ت

★ **(٤ − ٣ت) (٤ + ٣ت)** = ١٦ + ١٢ت − ١٢ت − ٩ت^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

★ **(٧ − ٤ت) + (٢ + ت)** = ٧ − ٤ب + ٢ + ت = ٩ − ٣ت

★ **(٥ − ٦ت) (٣ + ٢ت)** = ١٥ + ١٠ت − ١٨ت − ١٢ت^{٢} = ٢٧ − ٨ت

★ $(١ + ٢ت^{٣})(٢ + ٣ت^{٥} + ٤ت^{٦}) = (١ + ٢ \times -ت)(٢ + ٣ \times ت + ٤ \times -ت)$

$= (١ - ٢ت)(٢ + ٣ت - ٤ت) = (١ - ٢ت)(٢ - ت)$

$= ٢ - ت - ٤ت + ٢ت^{٢} = -٥ت$

★ $(٢ + ٣ت)^{٢}(٢ - ٣ت) = (٤ + ١٢ت + ٩ت^{٢})(٢ - ٣ت) = (١٢ت - ٥)(٢ - ٣ت)$

$= ٢٤ت - ٣٦ت - ١٠ + ١٥ت^{٢}$

$= ١٥ت - ٢٥$

★ **معادلات على الأعداد التخيلية :**

حل المعادلة : $س^{٢} - ٤ = ٠$ فى ح م . ح = {٢ ، -٢}

حل المعادلة : $س^{٢} + ٢٥ = ٠$ فى ت م . ح = {٥ت ، -٥ت}

حل المعادلة : $٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١$ فى الأعداد التخيلية

$٩س^{٢} = ٦١ - ١٢٥$

$٩س^{٢} = -٦٤$

$س^{٢} = -\frac{٦٤}{٩}$

$س = \pm \frac{٨}{٣}ت$ م . ح = $\{\pm \frac{٨}{٣}ت\}$

حل المعادلة : $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$ فى مجموعة الأعداد التخيلية

$٣س^{٢} = -٢٧$

$س^{٢} = -٩$

$س = \pm ٣ت$ م . ح = {٣ت ، -٣ت}

حل المعادلة : $٤ص^{٢} + ٢٠ = ٠$ فى مجموعة الأعداد التخيلية

$٤ص^{٢} = -٢٠$

$ص^{٢} = -٥$ ، $ص = \pm \sqrt{٥}ت$ ، م . ح = $\{\pm \sqrt{٥}ت\}$

حل المعادلة : $\frac{٣}{٥}$ ع^{٢} + ١٥ = ٠ في مجموعة الأعداد التخيلية

$\frac{٣}{٥}$ ع^{٢} = −١٥

ع^{٢} = −٢٥

ناخذ الجذر التربيعى للطرفين

ع = ± ٥ ت

م . ح = {+٥ت ، −٥ت}

* **تساوي عددين مركبين :** أ + ب ت = حـ + ء ت نستنتج : أ = حـ ، ب = ء

أوجد قيمتى س ، ص التى تحققان المعادلة : س + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت

س = ٥

س − ٢ص = ١

٥ − ٢ص = ١

−٢ص = ١ − ٥

−٢ص = −٤

ص = ٢

أوجد قيمتى س ، ص التى تحققان المعادلة : (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ت

٢س + ١ = ٥

٢س = ٤

س = ٢

٤ص = −١٢

ص = −٣

أوجد قيمتى س ، ص التى تحققان : (٢س − ٣) + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

٢س − ٣ = ٧

٢س = ١٠

س = ٥

٣ص + ١ = ١٠

٣ص = ٩

ص = ٣

أوجد قيمتى س ، ص التى تحققان : ٢س − ص + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت

٢س − ص = ٥ ، س − ٢ص = ١

٢(٢ص + ١) − ص = ٥ ، س = ٢ص + ١

٤ص + ٢ − ص = ٥

٣ص = ٣

ص = ١ بالتعويض للحصول على س

س = ٢ص + ١

س = ٢ × ١ + ١ = ٣

* **قسمة الأعداد المركبة : نضرب × مرافق المقام**

* **قيمة :** $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت} = \frac{٢٦}{٣ - ٢ت} \times \frac{٣ + ٢ت}{٣ + ٢ت} = \frac{٢٦ (٢ + ٣ت)}{٩ - ٤ت^{٢}} = \frac{٢٦ (٢ + ٣ت)}{١٣}$

* **قيمة :** $\frac{٢}{١ + ت} = \frac{٢}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٢ (١ - ت)}{١ - ت^{٢}} = \frac{(١ - ت)}{٢}$

* **قيمة :** $\frac{(٣ + ت) (٣ - ت)}{٣ - ٤ت} = \frac{٩ - ت^{٢}}{٣ - ٤ت} = \frac{١٠}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{١٠ (٣ + ٤ت)}{٢٥}$

أوجد شدة التيار الكهربائى الكلية المار بمقاومتين متصلتين حيث تكون المقاومة الأولى = ٣ − ٢ت ، والمقاومة الثانية = $\frac{٢}{١ - ت}$

$م_{١} = ٣ - ٢ت$ ، $م_{٢} = \frac{٢}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{٢ (١ + ت)}{١ - ت^{٢}} = ١ + ت$

شدة التيار = $م_{١} + م_{٢}$ = (٣ − ٢ت) + (١ + ت) = ٣ − ٢ت + ١ + ت = ٤ − ت

ومنا يمكن استنتاج قانون : $م_{١}$ = شدة التيار − $م_{٢}$ أو قانون : $م_{٢}$ = شدة التيار − $م_{١}$

الدرس الثالث : تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

لتحديد نوع الجذرين دون حل المعادلة نستخدم المميز : المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ

إذا كان المميز = عدد موجب : ب^{٢} − ٤ أ حـ > صفر فإن الحل جذران حقيقان مختلفان

إذا كان المميز = صفر : ب^{٢} − ٤ أ حـ = صفر فإن الحل جذران متساويان

إذا كان المميز = عدد سالب : ب^{٢} − ٤ أ حـ < صفر فإن الحل جذران مركبان أو تخيلان

حدد نوع جذرى المعادلة : ٥ س^{٢} + س − ٧ = ٠ دون حلها

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ١ − ٤ × ٥ × −٧ = ١ + ١٤٠ = ١٤١

المميز > ٠ الجذران حقيقان مختلفان (عددهم ٢)

حدد نوع جذرى المعادلة : س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠ دون حلها

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × ١ = ٤ − ٤ = صفر

المميز = ٠ جذران متساويان (العدد واحد)

حدد نوع جذرى المعادلة : ٥ س − س^{٢} − ٣٠ = ٠ دون حلها

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٢٥ − ٤ × −١ × −٣٠ = ٢٥ − ١٢٠ = −٩٥

المميز < ٠ الجذران مركبان أو تخيلان

حدد نوع جذرى المعادلة : س (س − ٢) = ٥ دون حلها

س^{٢} − ٢س − ٥ = صفر

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × −٥ = ٤ + ٢٠ = ٢٤

المميز > ٠ جذران مختلفان

حدد نوع جذرى المعادلة : س (س + ٥) = ٢(س −٧) دون حلها

س^{٢} + ٥س = ٢س − ١٤

س^{٢} +٥س − ٢س + ١٤ = صفر

س^{٢} +٣س + ١٤ = صفر

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ١٤ = ٩ − ٥٦ = −٤٧

المميز < ٠ الجذران مركبان

برهن أن جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ مركبان ثم استخدام القانون العام لايجادهما

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ٢ × ٢ = ٩ − ١٦ = −٧

المميز < ٠ جذران مركبان

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤}$$

$$س = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\, ت}{٤}$$ فيكون الحل $$\frac{٣ + \sqrt{٧}\, ت}{٤} \quad \frac{٣ - \sqrt{٧}\, ت}{٤}$$

إذا كان الجذران متساويان فإن المميز = صفر
إذا كان الجذران مختلفان فإن المميز > صفر
إذا كان الجذران مركبان فإن المميز < صفر

إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + (ك − ٢) س + ٤ = صفر متساويان فأوجد قيمة ك

المميز = صفر

ب^{٢} − ٤ أ حـ = صفر

(ك − ٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = صفر

ك^{٢} − ٤ك − ١٢ = صفر

(ك + ٢) (ك − ٦) = صفر

ك = −٢ ، ك = ٦

إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٤س + ك = صفر مختلفان فأوجد قيمة ك

المميز < صفر

ب^{٢} – ٤ أ حـ < صفر

١٦ – ٤ × ١ × ك < صفر

١٦ – ٤ ك < صفر

٤ك > ١٦

ك > ٤ ك ∈] ٤ ، ∞ [

إذا كان جذرا المعادلة : م س^{٢} – ٤ س + ٨ = ٠ مركبان فأوجد قيمة ك

المميز < صفر

ب^{٢} – ٤ أ حـ < صفر

١٦ – ٤ × م × ٨ < صفر

١٦ – ٣٢ م < صفر

٣٢م > ١٦ ÷ ٣٢

ك > $\frac{١}{٢}$ ك ∈] $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [

إذا كان الجذران : س^{٢} + ٢ (م – ١) س + (٢ م + ١) = ٠ متساويان فأوجد قيمة م

س^{٢} + (٢م – ٢) س + (٢م + ١) = ٠

المميز = صفر

ب^{٢} – ٤ أ حـ = صفر

(٢م – ٢)^{٢} – ٤ × ١ × (٢م + ١) = صفر

٤ م^{٢} – ٨م + ٤ – ٨م – ٤ = صفر

٤ م^{٢} – ١٦م = صفر

٤م (م – ٤) = صفر

م = ٠ ، م = ٤

الدرس الرابع : العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

نفرض أن الجذران : ل ، م : مجموع الجذرين : ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم : ٢س^{٢} + ٥س − ١٢ = صفر

مجموع الجذرين : ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٥}{٢}$

حاصل ضربهم : ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١٢}{٢}$ = −٦

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم : ٣س^{٢} = ٢٣س − ٣٠

نعدلها الاول : ٣س^{٢} − ٢٣س + ٣٠ = صفر

مجموع الجذرين : ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٢٣}{٣}$

حاصل ضربهم : ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{٣٠}{٣}$ = ١٠

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم : ٢س^{٢} = ٣س

نعدلها الاول : ٢س^{٢} − ٣س = صفر

مجموع الجذرين : ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥

حاصل ضربهم : ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{صفر}{٢}$ = صفر

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم : (٢س – ٣) (س + ٢) = صفر

مجموع الجذرين : ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٥}{٢}$

حاصل ضربهم : ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١٢}{٢}$ = – ٦

---

* **أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر معناها ب =** صفر
* **أحد الجذرين معكوس ضربى للآخر معناها أ =** حـ

إذا كان أحد جذرى س^{٢} – (ب – ٣) س + ٥ = ٠ معكوس جمعى للآخر فأوجد قيمة ب

أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر معناها ب = صفر

– (ب – ٣) = صفر

(ب – ٣) = صفر

ب = ٣

إذا كان أحد جذرى س^{٢} + (ك – ١) س – ٣ = ٠ معكوس جمعى للآخر فأوجد قيمة ك

أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر معناها ب = صفر

ك – ١ = صفر

ك = ١

أحد جذرى ٤ ك س^{٢} + ٧س + ك^{٢} + ٤ = ٠ معكوس ضربى للآخر فأوجد قيمة ك

أحد الجذرين معكوس ضربى للآخر معناها أ = حـ

٤ك = ك^{٢} + ٤

ك^{٢} – ٤ك + ٤ = صفر

(ك – ٢) (ك – ٢) = صفر

ك – ٢ = صفر

ك = ٢

س = ٣ أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + م س + ٢٧ = ٠ فأوجد قيمة م و الجذر الآخر

(٣)^{٢} + م (٣) + ٢٧ = ٠

٩ + ٣ م + ٢٧ = ٠

٣ م + ٣٦ = ٠

٣ م = − ٣٦

م = − ١٢

المعادلة تكون : س^{٢} − ١٢ س + ٢٧ = صفر

(س − ٣) (س − ٩) = صفر

س = ٣ ، س = ٩ الجذر الآخر هو ٩

(١ + ت) أحد جذور المعادلة : س^{٢} − ٢ س + أ = ٠ ، فأوجد قيمة أ والجذر الآخر

س = ١ + ت ، (١ + ت)^{٢} − ٢(١ + ت) + أ = صفر

١ + ٢ت + ت^{٢} − ٢ − ٢ت + أ = صفر

١ + ت^{٢} −٢ + أ = صفر

−٢ + أ = صفر

أ = ٢

المعادلة : س^{٢} −٢س + ٢ = صفر

نطبق القانون العام لايجاد الجذران ومنها هنعرف الجذر الآخر لتعذر التحليل

أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة س^{٢} − ١٢ س + ك = ٠ متساويين

الجذرا متساويان معناها المميز = صفر

ب^{٢} − ٤ أ حـ = صفر

١٤٤ − ٤ × ١ × ك = صفر

١٤٤ − ٤ك = صفر

ك = ٣٦

إذا كان (ك + ٣) س^{٢} + (٢ − ك) س + ٤ = ٠ فأوجد قيمة ك فى الحالات الاتية :-
(أ) أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر (ب) مجموع جذرى المعادلة = ٥

فى حالة (أ) ، ب = صفر

٢ − ك = صفر

ك = ٢

فى حالة (ب) ، مجموع الجذرين = ٥

$\frac{-ب}{أ}$ = ٥

$\frac{ك - ٢}{ك + ٣}$ = ٥ مقص

ك − ٢ = ٥ك + ١٥

٥ك − ك = −٢ − ١٥

٤ك = −١٧ ÷ ٤

ك = $-\frac{١٧}{٤}$

إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢س^{٢} + ٧س + ٣م = صفر
يساوى مجموع جذرى المعادلة : س^{٢} − (م +٤) س = صفر فأوجد قيمة م

حاصل ضرب جذرى المعادلة الأولى = مجموع الجذرين فى المعادلة الثانية

$\frac{حـ}{أ} = \frac{-ب}{أ}$

$\frac{٣م}{٢} = \frac{م + ٤}{١}$ مقص

٣م = ٢م + ٨

٣م − ٢م = ٨

م = ٨

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها $س^{٢} - (ل + م)\ س + ل\ م = صفر$

معنى القانون : $س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهم = صفر

كون المعادلة التربيعية التى جذراها : ٤ ، −٣

مجموع الجذرين = ل + م = ٤ + (−٣) = ٤ − ٣ = ١

حاصل ضربهـــم = ل م = ٤ × −٣ = −١٢

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهم = صفر

$س^{٢}$ − س −١٢ = صفر

كون المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{٤ + ٩}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

حاصل ضربهـــم = ل م = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

$س^{٢} - \frac{١٣}{٦}$ س + ١ = صفر ×٦

$٦س^{٢}$ − ١٣س + ٦ = صفر

كون المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت}$ ، $\frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت}$

$= \frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{-٢ + ٢ت + ٢ت - ٢ت^{٢}}{١ - ت^{٢}} = \frac{-٢ + ٤ت + ٢}{١ + ١} = ٢ت$

$= \frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{-٤ - ٢ت - ٨ت - ٤ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}} = \frac{-٤ - ١٠ت + ٤}{٤ + ١} = -٢ت$

مجموع الجذرين = ل + م = ٢ ت + (−٢ت) = ٢ت − ٢ت = صفر

حاصل ضربهـــم = ل م = ٢ت × −٢ت = $-٤ت^{٢}$ = ٤ ((كمل كتابة المعادلة))

كون المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

$$= \frac{٣}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{٣ت}{ت^{٢}} = \frac{٣ت}{-١} = -٣ت$$

$$= \frac{٣ + ٣ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{٣ + ٣ت + ٣ت + ٣ت^{٢}}{١ - ت^{٢}} = \frac{٦ت}{٢} = ٣ت$$

مجموع الجذرين = ل + م = −٣ ت + ٣ت = صفر

حاصل ضربهم = ل م = −٣ت × ٣ت = −٩ت^{٢} = ٩

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهم = صفر

س^{٢} + ٩ = صفر

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية اخرى

معناها احنا نستخرج الجذرين ونكون معادلة جديدة

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهم = صفر

ل ، م جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ١ = صفر فكون معادلة جذراها : ل^{٢} ، م^{٢}

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٣}{٢}$

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ} = \frac{-١}{٢}$

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين = ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ ل م = $(\frac{٣}{٢})^{٢} - ٢(\frac{-١}{٢}) = \frac{١٣}{٤}$

حاصل ضربهم = ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = $(\frac{-١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$

س^{٢} − $\frac{١٣}{٤}$ س + $\frac{١}{٤}$ = صفر × ٤

٤س^{٢} − ١٣س + ١ = صفر

ل ، م جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ١ = صفر كون معادلة جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين = $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$ = $\frac{٣}{٢}$ ÷ $\frac{-١}{٢}$ = −٣

حاصل ضربهم = $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$ = ١ ÷ $\frac{-١}{٢}$ = −٢

المعادلة هى : س^{٢} + ٣س −٢ = صفر

ل ، م جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ١ = صفر كون معادلة جذراها $\frac{م}{ل}$ ، $\frac{ل}{م}$

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين = $\frac{م}{ل}$ + $\frac{ل}{م}$ = $\frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م}$ = $\frac{١٣}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{١٣}{٢}$

حاصل ضربهم = $\frac{م}{ل}$ × $\frac{ل}{م}$ = ١

المعادلة هى : س^{٢} + $\frac{١٣}{٢}$ س + ١ = صفر × ٢

٢س^{٢} + ١٣س + ٢ = صفر

ل ، م جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ١ = صفر كون معادلة جذراها ل + م ، ل م

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين = ل + م + ل م = $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{-١}{٢}$ = ١

حاصل ضربهم = (ل + م) (ل م) = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{-١}{٢}$ = − $\frac{٣}{٤}$

المعادلة هى : س^{٢} − س − $\frac{٣}{٤}$ = صفر × ٤

٤س^{٢} − ٤س − ٣ = صفر

قوانين لازم تحفظها كويس جدا (مهمة جدا)

ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ ل م ، ل^{٢} − م^{٢} = (ل − م) (ل + م)

(ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ ل م

$\frac{ل}{م}$ + $\frac{م}{ل}$ = $\frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م}$ = $\frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

$\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$

$\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$

(ل + ١) + (م + ١) = (ل + م) + ٢ ،، (ل + ١) (م + ١) = (ل م) + (ل + م) + ١

(ل − ١) + (م − ١) = (ل + م) − ٢

(ل − ١) (م − ١) = (ل م) + (ل + م) − ٢

المسائل اللفظية وتحويلها لصيغ رياضية

* الجذران متساويان ← ل ، ل

* أحد الجذران معكوس جمعي للآخر : ب =صفر ← ل ، − ل

* أحد الجذران معكوس ضربي للآخر : أ = جـ ← ل ، $\frac{١}{ل}$

* أحد الجذران ضعف الآخر ← ل ، ٢ ل

* أحد الجذران ثلاثة أمثال الآخر ← ل ، ٣ ل

* أحد الجذران ثلاثة أمثال المعكوس الضربي للآخر ← ل ، $\frac{٣}{ل}$

* أحد الجذران يزيد عن الآخر بمقدار ٧ ← ل ، ل + ٧

* أحد الجذران يزيد عن المعكوس الجمعي للآخر بمقدار ٧ ← ل ، −ل + ٧

* أحد الجذران يزيد عن المعكوس الضربي للآخر بمقدار ٧ ← ل ، $\frac{١}{ل}$ + ٧

* أحد الجذران مربع الآخر ← ل ، ل^{٢}

* النسبة بين الجذران = ٢ : ٣ ← ٢ل ، ٣ ل

* مجموع الجذران ٢ ← ل ، ٢ − ل

* حاصل ضرب الجذران ٧ ← ل ، $\frac{٧}{ل}$

إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + ٣س + ك = ثلاثة أمثال الآخر ن فأوجد : ك

نفرض أن الجذران المطلوبان هما : ل ، ٣ل

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٣}{١}$ = -٣

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{ك}{١}$ = ك

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين = ل + ٣ل = ٤ ل ، حاصل ضربهم = ل × ٣ل = ٣ ل^{٢}

٤ ل = -٣

ل = - $\frac{٣}{٤}$

٣ل^{٢} = ك

٣ × $\frac{٩}{١٦}$ = ك

ك = $\frac{٢٧}{١٦}$

إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} - ك س + ٣ = ٠ يزيد عن الاخر بمقدار ٢ فأوجد ك

نفرض أن الجذران المطلوبان هما : ل ، ل + ٢

المعادلة المعطاة : مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{ك}{١}$ = ك

حاصل ضربهم = ل م = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{٤}{١}$ = ٣

المطلوبة : مجموع الجذرين = ل + ل + ٢ = ٢ل + ٢ ، حاصل ضربهم = ل (ل + ٢) = ل^{٢} + ٢ل

٢ل + ٢ = ك

عند ل = ١ ، ٢ + ٢ = ك ، ك = ٤

عند ل = -٢ ، -٤ + ٢ = ك ، ك = -٢

ل^{٢} + ٢ل = ٣

ل^{٢} + ٢ل - ٣ = صفر

ل^{٢} + ٢ل - ٣ = صفر

(ل - ١) (ل + ٢) = صفر

ل = ١ أو ل = -٢

الدرس الخامس : إشارة الدالة

أولا : إشارة الدالة الثابتة

د(س) > ٠ الدالة موجبة لكل س ∈ ح ، د(س) < ٠ الدالة سالبة لكل س ∈ ح

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٥

د(س) > ٠ الدالة موجبة لكل س ∈ ح

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = −٣

د(س) < ٠ الدالة سالبة لكل س ∈ ح

ثانياً : إشارة الدالة الخطية

نفس إشارة س د(س) = ٠ عكس إشارة س

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = س − ٢

س − ٢ = ٠

س = ٢

−−−−−−−−− ٢ ++++++++++

الدالة موجبة عندما س > ٢ فى الفترة] ٢ ، ∞ [

الدالة سالبة عندما س < ٢ فى الفترة] −∞ ، ٢ [

الدالة = صفر عندما س = ٢

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٤ − س

٤ − س = ٠

س = ٤

++++++++++ ٤ −−−−−−−−−

الدالة سالبة عندما س > ٤ فى الفترة] ٤ ، ∞ [

الدالة موجبة عندما س < ٤ فى الفترة] −∞ ، ٤ [

الدالة = صفر عندما س = ٤

ثالثاً : إشارة الدالة التربيعية

لها ثلاثة أفكار

(أولا) إذا كان المميز : ب^{٢} – ٤ أ حـ > ٠

نفس إشارة س^{٢} ل عكس إشارة س^{٢} م نفس إشارة س^{٢}

(ثانياً) إذا كان المميز : ب^{٢} – ٤ أ حـ = ٠

نفس إشارة س^{٢} ل نفس إشارة س^{٢}

(ثالثاً) إذا كان المميز : ب^{٢} – ٤ أ حـ < ٠

نفس إشارة س^{٢}

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = س^{٢} – ٢س – ٣

= ب^{٢} – ٤ أ حـ = ٤ – ٤ × ١ × –٣ = ٤ + ١٢ = ١٦ > ٠

المميز > ٠ الجذران حقيقيان مختلفان

س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠

+++++++++ ٣ --------- –١ +++++++++

(س + ١) (س –٣) = ٠

س = –١ ، س = ٣

الدالة موجبة فى الفترة : ح – [–١ ، ٣]

الدالة سالبة فى الفترة :]–١ ، ٣[

الدالة = ٠ عند س = { –١ ، ٣ }

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٤س^{٢} – ٤س + ١

= ب^{٢} – ٤ أ حـ = ١٦ – ٤ × ٤ × ١ = ١٦ – ١٦ = ٠

المميز = ٠ الجذران حقيقيان متساويان

٤س^{٢} – ٤س + ١ = ٠

+++++++++ ٠,٥ +++++++++

(٢س – ١) (٢س – ١) = ٠

س = ٠,٥

الدالة موجبة فى الفترة : ح – { ٠,٥ }

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = − ٢س − س^{٢} − ٤

= ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × −١ × −٤ = ٤ − ١٦ = −١٢ < ٠

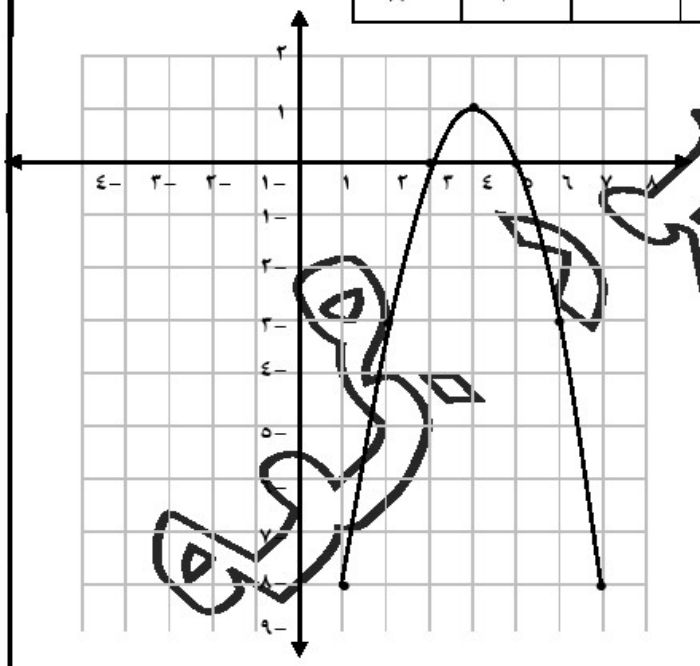
المميز < ٠ الجذران مركبان أى ليست هناك جذور حقيقية

الدالة سالبة فى ح

إذا كانت : د ← ح حيث د(س) = − س^{٢} + ٨س − ١٥

أولاً : ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٧] ثانياً : عين من الرسم إشارة الدالة

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	−٨	−٣	٠	١	٠	−٣	−٨



م . ح = { ٣ ، ٥ }

الدالة سالبة فى الفترة [١ ، ٣[

الدالة موجبة فى الفترة]٣ ، ٥[

الدالة = صفر فى المجموعة {٣ ، ٥}

إذا كانت : [−٢ ، ٤] ← ح حيث د(س) = ٢ − س فعين الفترة التى تكون سالبة

٢ − س = صفر

س = ٢

++++++++++ ٢ ----------

−٢ ٤

الفترة هى]٢ ، ٤]

الدرس السادس : متباينات الدرجة الثانية

حل المتباينة : $س^٢ - ٥س - ٦ > ٠$

د(س) = $س^٢ - ٥س - ٦ = ٠$

(س + ١) (س − ٦) = ٠

س = −١ س = ٦

م . ح = ح − [−١ ، ٦]

++++++++ ١- --------- ٦ ++++++++

حل المتباينة : $س^٢ + ٢س > ٨$

د(س) = $س^٢ + ٢س - ٨ = ٠$

(س − ٢) (س + ٤) = ٠

س = ٢ س = −٤

م . ح = ح − [−٤ ، ٢]

++++++++ ٤- --------- ٢ ++++++++

حل المتباينة : $س^٢ + س > ١٢$

د(س) = $س^٢ + س - ١٢ = ٠$

(س − ٣) (س + ٤) = ٠

س = ٣ س = −٤

م . ح = ح − [−٤ ، ٣]

++++++++ ٤- --------- ٣ ++++++++

حل المتباينة : $(س + ٣)^٢ \geq ١٠ - ٣(س + ٣)$

$س^٢ + ٦س + ٩ \geq ١٠ - ٣س - ٩$

$س^٢ + ٦س + ٩ \geq -٣س + ١$

$س^٢ + ٦س + ٣س + ٩ - ١ \geq ٠$

((أكمل الحل))

++++++++ ٨- --------- ١- ++++++++

حل المتباينة : ٥س^{٢} + ١٢ س ≤ ٤٤

٥س^{٢} + ١٢س − ٤٤ = ٠

٥س^{٢} + ١٢س − ٤٤ = ٠

(٥س + ٢٢) (س − ٢) = ٠

٥س + ٢٢ = ٠ ، س − ٢ = ٠

س = − $\frac{٢٢}{٥}$ ، س = ٢

م . ح = ح − [− $\frac{٢٢}{٥}$ ، ٢]

حل المتباينة : (س + ٢)^{٢} + (س + ١) (س − ٤) < صفر

س^{٢} + ٤س + ٤ + س^{٢} − ٤س + س − ٤ = ٠

٢س^{٢} + س = صفر

س (٢س + ١) = صفر ((أكمل الحل))

حل المتباينة : ٣ − ٢س^{٢} ≤ س فى د : د ⟵ ح

٣ − ٢س^{٢} − س = صفر

٢س^{٢} + س − ٣ = صفر

(٢س + ٣)(س − ١) = صفر

٢س + ٣ = ٠ ، س − ١ = ٠

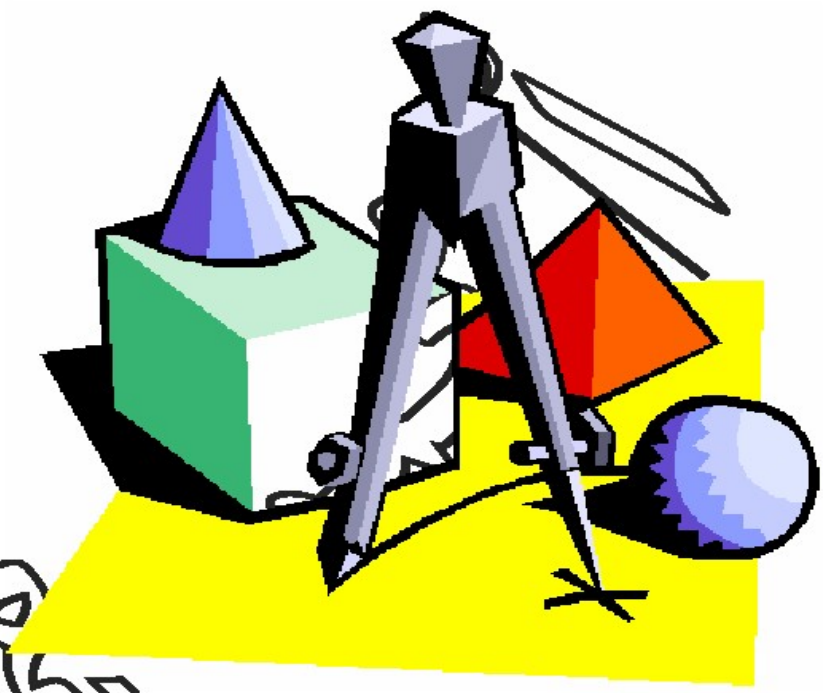
س = − $\frac{٣}{٢}$ ، س = ١

م . ح = [−١.٥ ، ١]

النهائية في الرياضيات

الصـــف الأول الثـــانـــوى

الفصل الدراسي الأول



ثانياً: الهندسة

إعـــداد أ. محمود جمعه

مدرس الرياضيات للثانوية العامة

تليفـون ٠١٢٨٥٨٤٧٤٨٠

(٣٠)

الدرس الأول : تشابه المضلعات

يتشابه المضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة و الاضلاع المتناظرة متناسبة

إذا كان المضلع أ ب حـ ء هـ يشابه س ص ع ن و فإن :

ق(أ) = ق(س) ، ق(ب) = ق(ص) ، ق(حـ) = ق(ع) ، ق(ء) = ق(ن) ، ق(هـ) = ق(و)

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ن و}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{س و}} = \frac{\text{محيط أ ب حـ ء هـ}}{\text{محيط س ص ع ن و}}$$

خاصية مهمه : $\frac{\text{ضلع الأول}}{\text{محيط الأول}} = \frac{\text{ضلع الثانى}}{\text{محيط الثانى}}$

مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٣سم ، ٤سم ومحيط الثانى = ٢٨سم فأوجد عرض الثانى

$$\frac{\text{ضلع الأول}}{\text{محيط الأول}} = \frac{\text{ضلع الثانى}}{\text{محيط الثانى}}$$

$$\frac{٣}{\text{س}} = \frac{٤}{٢٨}$$ ((مقص))

$$\text{س} = \frac{٣ \times ٢٨}{٧} = ٦\text{سم}$$

طول الثانى = ٦سم ، العرض = ٢٨ − ٦ = ٢٢سم

خماسيان منتظمان متشابهان ، ضلع الأول = ٤سم ومحيط الثانى = ٣٦سم فأوجد ضلع الثانى

$$\frac{\text{ضلع الأول}}{\text{محيط الأول}} = \frac{\text{ضلع الثانى}}{\text{محيط الثانى}}$$

$$\frac{٤}{٢٠} = \frac{\text{س}}{٣٦}$$ ((مقص))

$$\text{س} = \frac{٤ \times ٣٦}{٢٠} = ٧,٢\text{سم}$$

خاصية مهمه : $\frac{\text{ضلع}^2}{\text{ضلع}^2} = \frac{\text{مساحة}}{\text{مساحة}}$

مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعيهما ٣ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما ٩ : ٤

مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٥ : ٣ فإن النسبة بين مساحتيهما ٢٥ : ٩

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ وكانت مساحة الأول = ٢٧سم^2 أوجد م.الآخر

$$\frac{\text{ضلع}^2}{\text{ضلع}^2} = \frac{\text{مساحة}}{\text{مساحة}}$$

$$\frac{٩}{٤} = \frac{٢٧}{\text{س}} \quad \text{((مقص))}$$

$$\text{س} = \frac{٤ \times ٢٧}{٩} = ١٢\text{سم}^2$$

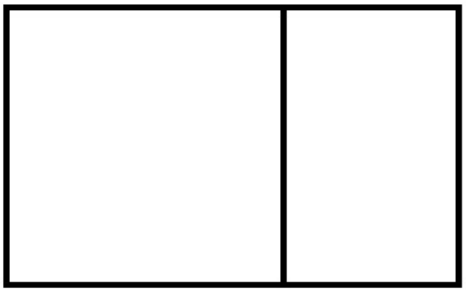
مساحة الثانى = ١٢سم^2

---

* **يتشابه المضلعان** إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة
* **النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين =** النسبة بين ضلعيهما
* **النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين =** مربع النسبة بين ضلعيهما
* **جميع الأشكال المنتظمة مثل المربعات تكون** متشابهه
* **المثلثان المتساويا الساقين يكونان** متشابهان
* **المثلثان المتساويا الأضلاع يكونان** متشابهان
* **إذا كان معامل التشبيه > ١ فإن التشابه يدل على** التكبير
* **إذا كان معامل التشبيه < ١ فإن التشابه يدل على** التصغير
* **إذا كان معامل التشبيه = ١ فإن التشابه يدل على** التطابق

★ المستطيل الذهبي :

هو مستطيل يمكن تقسيمه الى مربع ومستطيل اخر مشابه للمستطيل الأصلى



★ النسبة الذهبية :

هى نسبة المستطيل الذهبى وتكون ١,٦١٨ : ١ تقريباً

★ علماء استخدموا المستطيل الذهبي :

ليوناردو دافينشى ، فيبوناتشى

((صاحب لوحة الموناليزا))

((صاحب شهرة واسعه فى ايطاليا))

★ من الأمثلة العصرية للمستطيل الذهبي : شاشات الكمبيوتر والتلفزيون البلازما LCD

★ المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

★ كل الأضلاع المنتظمة مضلعات متشابهه

★ كل الأضلاع المتطابقة مضلعات متشابهه **و العكس ليس بالضرورة** صحيح

★ إذا تساوت زاويتان فى مثلثان كان المثلثان متشابهان

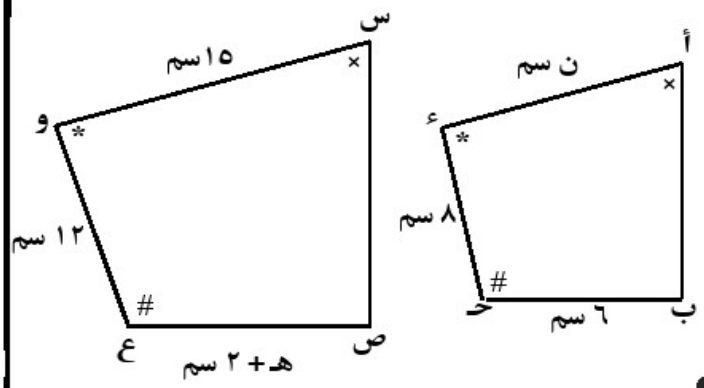
★ قانون مقياس الرسم (بالصف السادس الابتدائى) = $\frac{\text{الطول فى الرسم}}{\text{الطول فى الحقيقة}}$

★ قانون الطول = مقياس الرسم × الطول فى الرسم مع الاعتبار ان يكونوا نفس الوحدات

إذا كانت المسافة بين مدينة كفر الدوار واسكندرية هى ٤٠ كم
و طولها على الخريطة ٢سم فأوجد مقياس الرسم المستخدم فى الخريطة

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{٢ سم}}{\text{٤٠ × ١٠٠٠ سم}} = \frac{\text{٢}}{\text{٤٠٠٠٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٢٠٠٠٠}}$$

في الشكل المقابل : المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع و
أوجد : (أ) معامل التشابه (ب) قيم ن ، هـ



البرهان :

أ ب حـ ء ~ س ص ع و

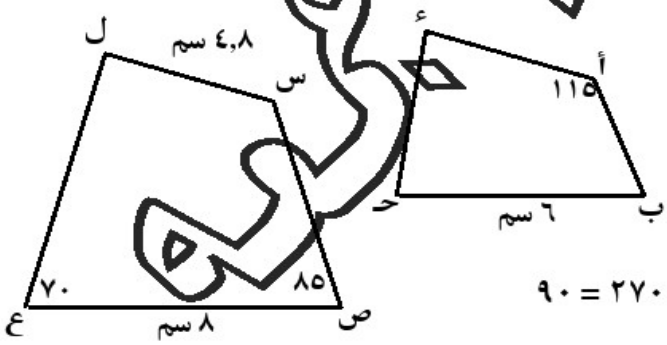
$\frac{\text{أ ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع و}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س و}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{٦}{\text{هـ}+٢} = \frac{٨}{١٢} = \frac{\text{ن}}{١٥}$

هـ+ ٢ = $\frac{٦ \times ١٢}{٨}$ = ٩سم ، هـ = ٩ − ٢ = ٧سم ، ن = $\frac{٨ \times ١٥}{١٢}$ = ١٠ سم

معامل التشابه هو $\frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$ وفى هذه الحالة يدل على التصغير لان البسط < المقام

في الشكل : المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل احسب : ق(س ل ع) ، طول أ ء
و إذا كان محيط المضلع أ ب حـ ء = ١٩,٥ سم فاحسب محيط : س ص ع ل



البرهان :

∵ أ ب حـ ء ~ س ص ع ل

∴ ق(س) = ق(أ) = ١١٥ ، ∴ ق(ع) = ق(حـ) = ٧٠

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

∴ ق(ل) = ق(ء) = ٣٦٠ − (٨٥ + ٧٠ + ١١٥) = ٣٦٠ − ٢٧٠ = ٩٠

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{٦}{٨} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{٤,٨} = \frac{١٩,٥}{\text{محيط س ص ع ل}}$

أ ء = $\frac{٦ \times ٤,٨}{٨}$ = ٣,٦ سم ، محيط س ص ع ل = $\frac{٨ \times ١٩,٥}{٦}$ = ٢٦سم

في الشكل المقابل : أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٥سم ، ب حـ = ٨سم
أوجد بعدى مستطيل آخر مشابه له إذا كان معامل التشابه ١،٤ سم
ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستطيلين

البرهان :

∵ أ ب حـ ء ~ س ص ع ل

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}} = \text{معامل التشابه}$$

$$\frac{٥}{\text{س ص}} = \frac{٨}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}} = \frac{١٤}{١٠}$$

$$\text{س ص} = \frac{٥ \times ١٠}{١٤} = ٣,٥٧ \text{ سم}$$

$$\text{ص ع} = \frac{٨ \times ١٠}{١٤} = ٥,٧١ \text{ سم}$$

مساحة المستطيل أ ب حـ ء = الطول × العرض = ٥ × ٨ = ٤٠ سم^{٢}

مساحة المستطيل س ص ع ل = الطول × العرض = ٣,٥٧ × ٥,٧١ = ٢٠,٣٨ سم^{٢}

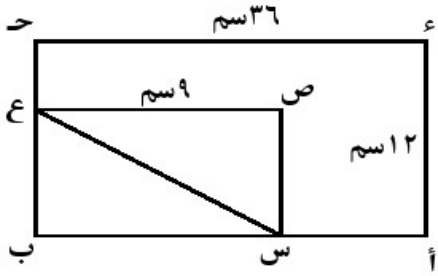
مساحة المنطقة المحصورة بينهما = مساحة أ ب حـ ء – مساحة س ص ع ل

مساحة المنطقة المحصورة بينهما = ٤٠ – ٢٠,٣٨ = ١٩,٦٢ سم^{٢}

((خلي بالك : المسألة لم تكن مرسومة بالسؤال حاول رسمها أكثر من مرة لتتقن رسمها وتفهمها جيداً))

★ **إذا تناظرت أضلاع مضلعان كان المضلعان** متشابهان

في الشكل المقابل : المستطيل أ ب حـ ء يشابه المضلع س ب ع ص حيث :
أ ء = ١٢سم ، ء حـ = ٣٦سم ، ص ع = ٩سم
أوجد أوجد طول كلاً من : س ص ، س ع



البرهان :

∵ أ ب حـ ء ~ س ب ع ص

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ص}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ص}}$

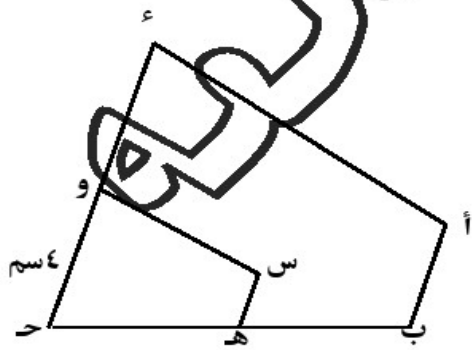
$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ع}} = \frac{٣٦}{٩} = \frac{١٢}{\text{س ص}}$

س ص = $\frac{١٢ \times ٩}{٣٦}$ = ٣سم

وبتطبيق نظريقة فيثاغورث على المثلث ص س ع

$(\text{س ع})^٢ = (\text{س ص})^٢ + (\text{ص ع})^٢ = ٩ + ٨١ = ٩٠$سم^٢ ، س ع = $٣\sqrt{١٠}$ سم

في الشكل : المضلع أ ب حـ ء يشابه المضلع س هـ حـ و حيث و حـ = ٤سم
وإذا كانت س هـ = نصف أ ب فأوجد طول و ء



البرهان : نفرض أن أ ب = ٢ص سم ، س هـ = ص سم

∵ أ ب حـ ء ~ س هـ حـ و

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ و}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س و}}$

$\frac{٢\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{حـ ء}}{٤} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س و}}$

٨ص = حـ ء ص

حـ ء = ٨سم ، و ء = ٨ − ٤ = ٤سم

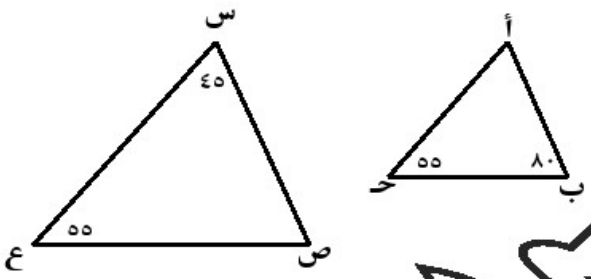
الدرس الثانى : تشابه المثلثات

مسلمة : إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهان

* **يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتا القاعدة فى إحداهما إحدى زاوية القاعدة فى الآخر**

* **يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر**

فى الشكل المقابل : برهن أن : المثلثان متشابهان مع ترتيب رؤوس التشابه



فى المثلث أ ب حـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ق(ب أ حـ) = ١٨٠ − (٨٠ + ٥٥) = ٤٥

فى المثلث س ص ع

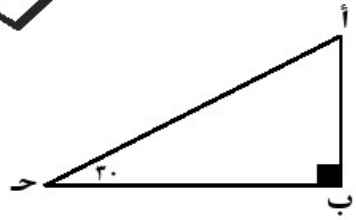
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ق(س ص ع) = ١٨٠ − (٨٠ + ٤٥) = ٥٥

∵ ق(أ) = ق(س) = ٤٥ ، ق(حـ) = ق(ع) = ٥٥

∴ المثلث أ ب حـ ~ المثلث س ص ع

فى الشكل المقابل : برهن أن : المثلثان متشابهان برؤوس نظائرهما



فى المثلث أ ب حـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ق(ب أ حـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ٦٠

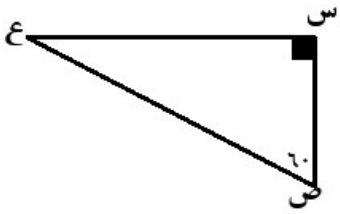
فى المثلث س ص ع

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

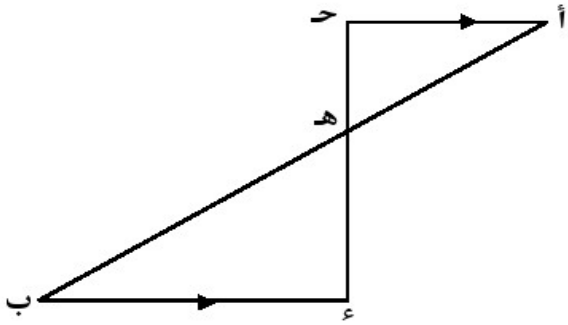
∴ ق(س ع ص) = ١٨٠ − (٩٠ + ٦٠) = ٣٠

∵ ق(أ) = ق(ص) = ٦٠ ، ق(ب) = ق(س) = ٩٠

∴ المثلث أ ب حـ ~ المثلث ص س ع



في الشكل المقابل : برهن أن : المثلثان متشابهان برؤوس تناظرهما



∵ $\overline{\text{أ حـ}}$ // $\overline{\text{ء ب}}$

∴ ق(أ) = ق(ب) بالتبادل

∴ ق(حـ) = ق(ء) بالتبادل

∴ ق(أ هـ حـ) = ق(ب هـ ء) بالتقابل بالرأس

∴ المثلث أ حـ هـ ~ المثلث ب ء هـ

في الشكل المقابل : (أ) برهن أن : المثلث أ ء هـ ~ المثلث أ ب حـ
(ب) أوجد طول كلاً من : أ ء ، ب حـ

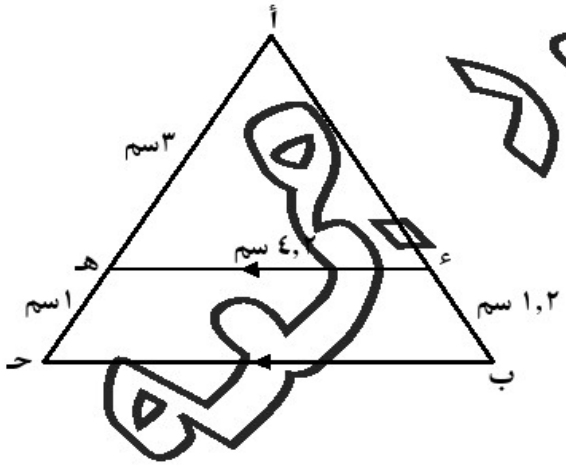
البرهان :

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(أ ء هـ) = ق(أ ب حـ) بالتناظر

∴ ق(أ هـ ء) = ق(أ حـ ب) بالتناظر

∴ المثلث أ ء هـ ~ المثلث أ ب حـ



$$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{محيط أ ء هـ}}{\text{محيط أ ب حـ}}$$

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ء + ١,٢}} = \frac{٤,٢}{\text{ب حـ}} = \frac{٣}{٤}$$

٤ أ ء = ٣ أ ء + ٣,٦

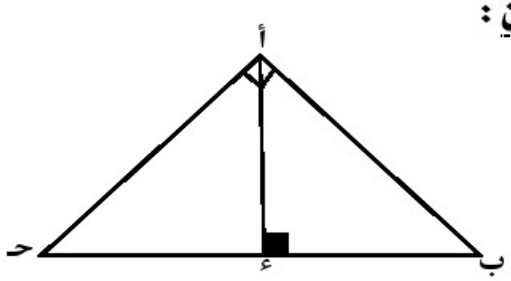
نتيجة (١)

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى

نتيجة (٢)

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود الوتر انقسم المثلث الى مثلثين كلاً منهما يشابه الأصلى

بتطبيق نظرية إقليدس أو التشابه ينتج أن :



$(\text{أ ب})^2 = \text{ب ء} \times \text{ب حـ}$

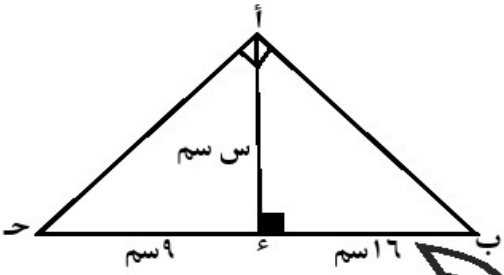
$(\text{أ حـ})^2 = \text{حـ ء} \times \text{ب حـ}$

$(\text{أ ء})^2 = \text{ب ء} \times \text{ء حـ}$

$\text{أ ء} = \dfrac{\text{أ ب} \times \text{أ حـ}}{\text{ب حـ}}$ لو عملنا مقص هينتج

$\text{أ ء} \times \text{ب حـ} = \text{أ ب} \times \text{أ حـ}$

في الشكل المقابل : ب ء = ١٦ سم ، ء حـ = ٩ سم . أوجد قيمة س



البرهان :

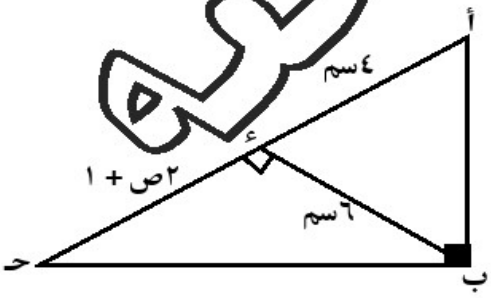
$\because (\text{أ ب})^2 = \text{ب ء} \times \text{ب حـ}$

$\therefore (\text{أ ب})^2 = ١٦ \times ٢٥$

$\therefore (\text{أ ب})^2 = ٤٠٠ \text{ سم}^2$

$\therefore \text{أ ب} = ٢٠ \text{ سم}$

في الشكل المقابل : أ ء = ٤ سم ، ء حـ = ٢ص + ١ سم ، ب ء = ٦ سم . أوجد ص



البرهان :

$\because (\text{ب ء})^2 = \text{ء أ} \times \text{ء حـ}$

$\therefore (٦)^2 = ٤ \times (٢\text{ص} + ١)$

$\therefore ٣٦ = ٨\text{ص} + ٤$

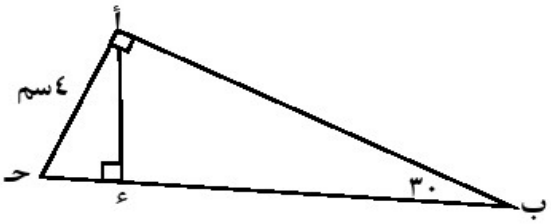
$\therefore ٨\text{ص} + ٤ = ٣٦$

$\therefore ٨\text{ص} = ٣٦ - ٤$

$\therefore ٨\text{ص} = ٣٢$ ، ص = ٤سم

$\therefore \text{ء حـ} = ٢\text{ص} + ١ = ٢ \times ٤ + ١ = ٨ + ١ = ٩ \text{ سم}$

في الشكل المقابل : أوجد طول كلاً من أ ب ، ب ء ، أ ء



البرهان :

∵ ق(أ) = ٩٠ ، ق(ب) = ٣٠

∴ الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

∴ أ حـ = نصف ب حـ

∴ ب حـ = ٢ أ حـ = ٨سم

∵ بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث أ ب حـ

∴ $(\text{أ ب})^2 = (\text{ب حـ})^2 - (\text{أ حـ})^2 = ٦٤ - ١٦ = ٤٨$ ، أ ب = $٤\sqrt{٣}$ سم

∵ ق(أ ء ب) = ٩٠ ، ق(ب) = ٣٠

∴ الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

∴ أ ء = نصف أ ب = $٢\sqrt{٣}$ سم

∵ بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث أ ب

∴ $(\text{ب ء})^2 = (\text{أ ب})^2 - (\text{أ ء})^2 = ٤٨ - ١٢ = ٣٦$ ، ب ء = ٦ سم

نظرية (١)

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان

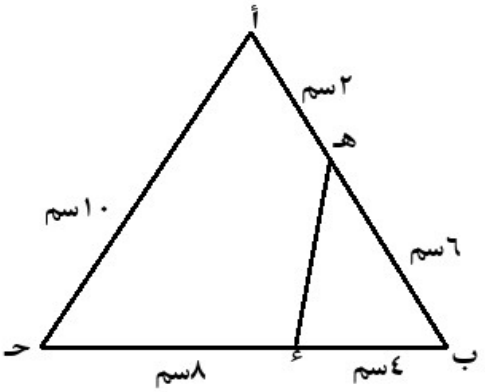
نظرية (٢)

إذا طابقت زاوية فى مثلث زاوية من مثلث آخر و تناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتين الزاويتان كان المثلثان متشابهان

تذكر

- الزاويتان المحيطيتان المشتركتان فى نفس القوس متساويتان فى القياس
- قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركتان معاً فى نفس القوس
- قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركتان معاً فى نفس القوس
- قياس الزاوية المحيطية = قياس الزاوية المماسية المشتركتان معاً فى نفس القوس
- قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المماسية المشتركتان معاً فى نفس القوس

في الشكل المقابل : (أ) برهن أن : المثلث ب ء هـ ~ المثلث ب أ حـ
(ب) أوجد : ء هـ (حـ) برهن أن : الشكل أ حـ ء هـ رباعى دائرى



البرهان :

المثلثان : ب ء هـ ، ب أ حـ فيهما

∵ (ب) زاوية مشتركة

∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ حـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{\text{ء هـ}}{١٠} = \frac{٦}{١٢}$

∴ ء هـ = $\frac{٤ \times ١٠}{٨}$ = ٥ سم

∵ Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ حـ

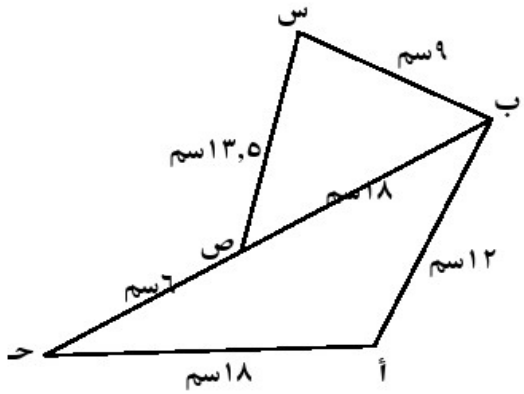
∴ ق(ب ء هـ) الخارجة عن الشكل الرباعى أ هـ ء حـ = ق(ب أ حـ)

∴ الشكل أ هـ ء حـ رباعى دائرى

((خاصية : الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعى الدائرى تساوى المقابلة للمجاورة لها))

محمود جمعه

في الشكل المقابل : (أ) برهن أن : المثلث أ ب حـ ~ المثلث س ب ص
(ب) ب حـ ينصف زاوية (أ ب س)



المثلثان : أ ب حـ ، س ب ص فيهما

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

∵ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ص}} = \frac{٢٤}{١٨} = \frac{٤}{٣}$

∵ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{س}} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$

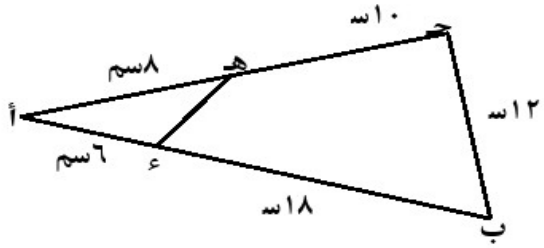
∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{س ص}}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ س ب ص

∴ ق(أ ب حـ) = ق(س ب ص)

∴ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف (أ ب س)

في الشكل المقابل : (أ) المثلث أ ب حـ ~ المثلث أ هـ ء أوجد طول ء هـ



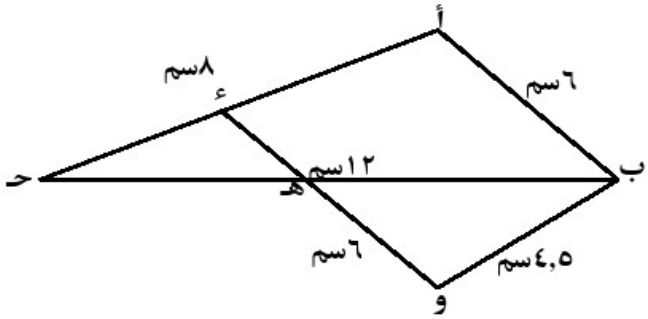
∵ Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{٢٤}{٨} = \frac{١٢}{\text{هـ ء}} = \frac{١٨}{٦}$

∴ ء هـ = $\frac{١٢ \times ٦}{١٨}$ = ٤ سم

في الشكل المقابل : ب حـ = ١٢سم ، أ حـ = ٨سم ، ب و = ٤,٥سم
برهن أن : Δ أ ب حـ ~ Δ و ب هـ . ثم أوجد طول ب هـ ثم برهن أن : ء هـ = ء حـ



المثلثان : أ ب حـ ، و ب هـ فيهما

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{و ب}} = \frac{٦}{٤,٥} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

∵ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{و هـ}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{و هـ}}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ و ب هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{و ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{و هـ}}$

∵ $\frac{٦}{٤,٥} = \frac{١٢}{\text{ب هـ}} = \frac{٨}{٦}$

∴ ب هـ = $\frac{١٢ \times ٦}{٨}$ = ٩سم

∵ ق(ء هـ حـ) = ق(ب هـ و) بالتقابل بالرأس

∵ ق(ب هـ و) = ق(أ حـ ب) من تشابه المثلثان أ ب حـ ، و ب هـ

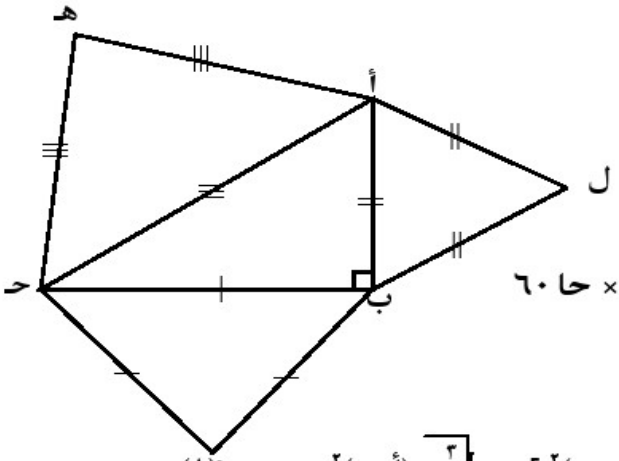
∴ ق(ء هـ حـ) = ق(ء حـ ب)

∴ المثلث ء هـ حـ متساوى الساقين

∴ ء هـ = ء حـ

محمود جمعه

أ ب حـ قائم الزاوية فى ب رسمت المثلثات المتساوية الاضلاع أ ب ل ، ب حـ و أ حـ هـ فبرهن أن : م . △ أ ب ل + م . △ ب حـ و = م . △ أ حـ هـ



∵ ق(أ ب حـ) = ٩٠

∴ (أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

الطرف الأيمن = م. △ أ ب ل + م. △ ب حـ و

= $\frac{١}{٢}$ × أ ل × ل ب × حا ٦٠ + $\frac{١}{٢}$ × ب و × و حـ × حا ٦٠

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × (أ ب)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × (ب حـ)^{٢}

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (أ ب)^{٢} + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (ب حـ)^{٢} = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ [(أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}] = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (أ حـ)^{٢} ⟵ (١)

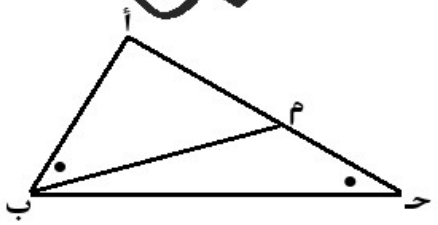
الطرف الأيسر = م. △ أ حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ × أ هـ × هـ حـ × حا ٦٠

الطرف الأيسر = م. △ أ حـ هـ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × (أ حـ)^{٢} = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (أ حـ)^{٢} ⟵ (٢)

∵ من ١ ، ٢ نستنتج أن

∴ م. △ أ ب ل + م. △ ب حـ و = م. △ أ حـ هـ وهو المطلوب

أ ب حـ فيه أ حـ > أ ب ، م ∈ أ حـ ، ق(أ ب م) = ق(حـ) برهن أن : (أ ب)^{٢} = أ م × أ حـ



∵ المثلثان أ ب م ، أ حـ ب فيهما

∴ ق(أ) زاوية مشتركة ، ق(أ ب م) = ق(حـ)

∴ △ أ ب م ~ △ أ حـ ب

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ ب}}$ مقص بين النسبة الأول والثالثه

أ ب × أ ب = أ م × أ حـ ، (أ ب)^{٢} = أ م × أ حـ

الدرس الثالث : العلاقة بين مثلثين متشابهين

نظرية (٣)

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين أى ضلعين متناظرين فيهما

* **النسبة بين محيطى أى مثلثين متشابهين** تساوى النسبة بين أى ضلعين متناظرين فيهما
* **النسبة بين أى ضلعين متناظرين = ٣ : ٧ فإن النسبة بين محيطيهما** ٣ : ٧
* **النسبة بين أى ضلعين متناظرين = ٣ : ٧ فإن النسبة بين مساحتيهما** ٩ : ٤٩

إذا كانت النسبة بين أى ضلعين متناظرين فى مثلثين ٢ : ٥ وكان محيط الأول = ٢٠ فأوجد الآخر

$$\frac{\text{ضلع}}{\text{ضلع}} = \frac{\text{محيط}}{\text{محيط}}$$

$$\frac{٢}{٥} = \frac{٢٠}{\text{س}}$$ ((مقص))

$$\text{س} = \frac{٥ \times ٢٠}{٢} = ٥٠\text{سم}$$

محيط الآخر = ٥٠سم

النسبة بين أى ضلعين متناظرين فى مثلثين ٣ : ٢ وكان مساحة الثانى = ٨٠ فأوجد مساحة الأول

$$\frac{\text{ضلع}^٢}{\text{ضلع}^٢} = \frac{\text{مساحة}}{\text{مساحة}}$$

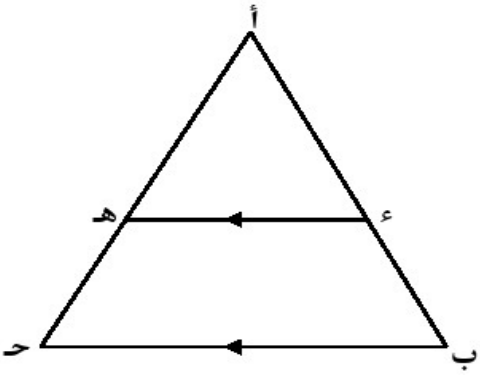
$$\frac{٩}{٤} = \frac{\text{س}}{٨٠}$$ ((مقص))

$$\text{س} = \frac{٩ \times ٨٠}{٤} = ١٨٠\text{سم}^٢$$

مساحة الأول = ١٨٠سم

في الشكل المقابل : أ ء : ء ب = ٣ : ٤ ، مساحة المثلث أ ب حـ = ٧٨٤ سم^{٢}
(أ) أوجد مساحة المثلث أ ء هـ (ب) أوجد مساحة شبه المنحرف ء ب حـ هـ

∵ ء هـ // ب حـ ∴ ق(أ ء هـ) = ق(أ ب حـ) ∴ ق(أ هـ ء) = ق(أ حـ ب



∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{أ ء هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{أ ب حـ}} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}\right)^{٢}$

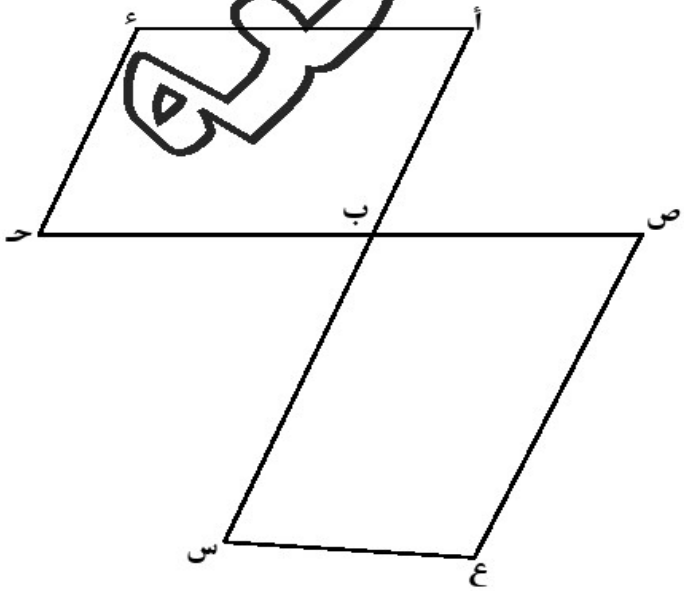
∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{أ ء هـ}}{٧٨٤} = \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{أ ء هـ}}{٧٨٤} = \frac{٩}{٤٩}$ ، مساحة Δ أ ء هـ = $\frac{٩ \times ٧٨٤}{٤٩}$ = ١٤٤ سم^{٢}

∴ مساحة شبه المنحرف ء ب حـ هـ = مساحة المثلث أ ب حـ – مساحة المثلث أ ء هـ

∴ مساحة شبه المنحرف ء ب حـ هـ = ٧٨٤ – ١٤٤ = ٦٤٠ سم^{٢}

أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، س ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : ب س = $\frac{١}{٢}$ أ ب
ص ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ص ∉ $\overline{\text{حـ ب}}$ حيث : ب ص = $\frac{١}{٢}$ ب حـ
رسم متوازى الاضلاع (ب س ع ص) فبرهن أن : م.س ب ص ع = ٤ م.أ ب حـ ء



∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب س}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ص}} = \frac{١}{٢}$

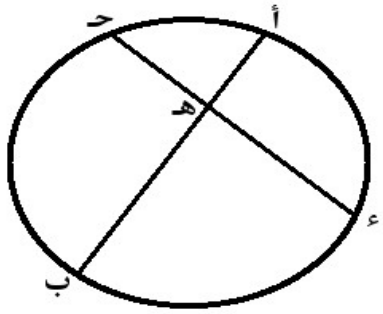
∴ ▱ أ ب حـ ء ~ ▱ س ب ص ع

∴ $\frac{\text{م . أ ب حـ ء}}{\text{م . س ب ص ع}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\text{م . أ ب حـ ء}}{\text{م . س ب ص ع}} = \frac{١}{٤}$ ((مقص))

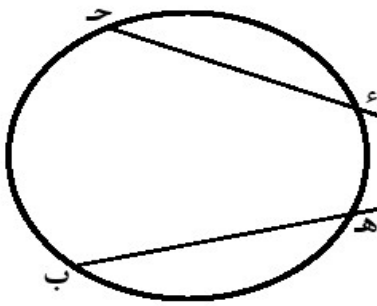
∴ ٤ م . أ ب حـ = م . س ب ص ع

الدرس الرابع : تطبيقات التشابه فى الدائرة



إذا كان الوتران متقاطعان داخل الدائرة

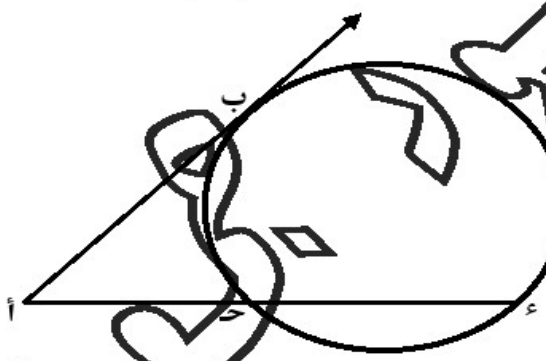
أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء



إذا كان الوتران متقاطعان خارج الدائرة

أ ء × ء حـ = أ هـ × هـ ب

أ ء × أ حـ = أ هـ × أ ب



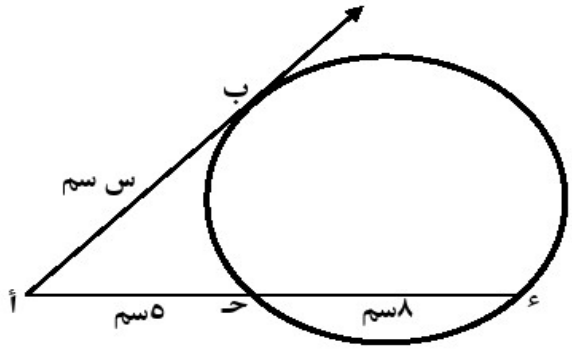
إذا كان مماس وتر متقاطعان خارج الدائرة

(المماس)^{٢} = الصغير × الكبير كله

(أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء

نتيجة (١) إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع و مماس فإن حاصل ضرب طول القاطع فى طول جزئه الخارجى يساوى مربع طول المماس

فى الشكل المقابل : أوجد قيمة س لاقرب سم



البرهان :

∵ (المماس)^{٢} = الصغير × الكبير كله

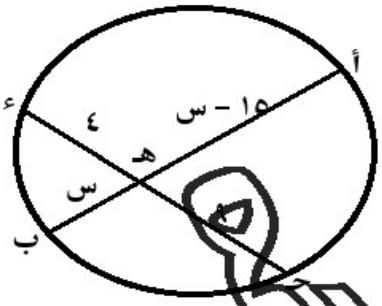
∴ (أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء

∴ س^{٢} = ٥ × ١٣

∴ س^{٢} = ٦٥ سم

∴ س = ٨,١ سم تقريباً

فى الشكل المقابل : أوجد قيمة س



البرهان :

∵ أ هـ × هـ ب = ء هـ × هـ حـ

∴ (١٥ – س) (س) = ٤ × ٩

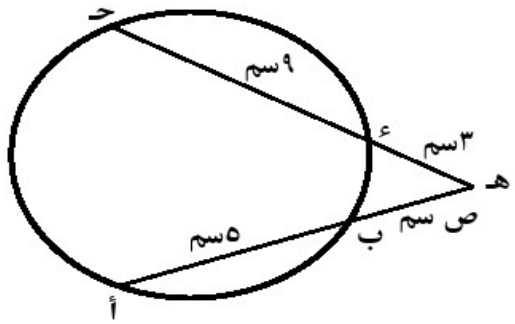
∴ ١٥س – س^{٢} = ٣٦

∴ س^{٢} – ١٥س + ٣٦ = ٠

∴ (س – ٣) (س – ١٢) = ٠

س = ٣سم أو س = ١٢ سم

فى الشكل المقابل : أوجد قيمة ص



البرهان :

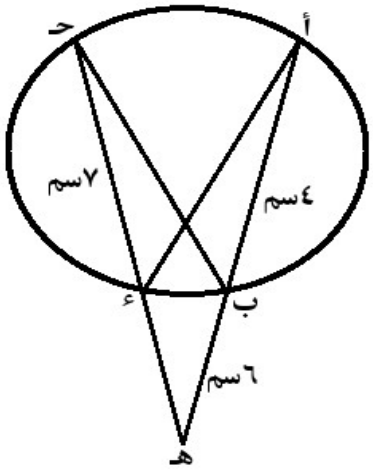
∵ هـ ء × ء حـ = هـ ب × ب أ

∴ ٣ × ٩ = ص × ٥

∴ ٢٧ = ٥ ص

∴ ص = ٥,٤ سم

أ ب ، حـ ء وترا فى دائرة بحيث : أ ب ∩ حـ ء = { هـ } أ ب = ٤سم ، حـ ء = ٧ سم
فبرهن أن : المثلث أ ء هـ ~ المثلث حـ ب هـ ثم أوجد طول : حـ هـ



البرهان :

∵ ق(ب أ ء) المحيطية = ق(ب حـ ء) المحيطية ⟵ (١)

المثلثان : أ ء هـ ، حـ ب هـ فيهما

∵ (هـ) زاوية مشتركه ⟵ (٢)

∵ من ١ ، ٢ نستنتج أن :

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ حـ ب هـ

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{حـ هـ}}$$

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{٦} = \frac{١٠}{٧ + \text{ء هـ}}$$

ء هـ (٧ + ء هـ) = ٦٠

ء هـ^{٢} + ٧ ء هـ − ٦٠ = ٠

(ء هـ − ٥) (ء هـ + ١٢) = ٠

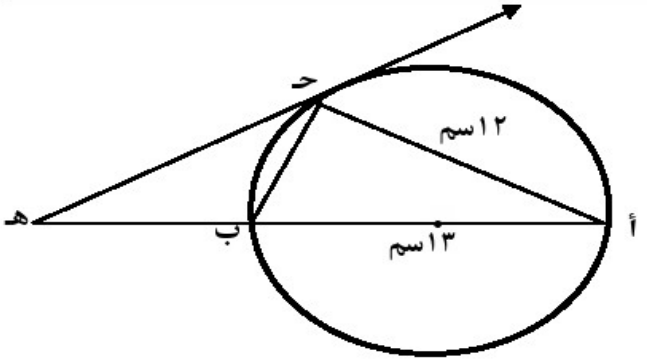
ء هـ − ٥ = صفر ء هـ + ١٢ = صفر

ء هـ = ٥ سم ء هـ = −١٢ مرفوضة لان مفيش طول بالسالب

لاتنسى الفكرة

الزاويتان المحيطيتان المشتركتان معاً فى نفس القوس متساويتان فى القياس

في الشكل المقابل : أ ب = ١٣ سم ، أ حـ = ١٢ سم ، حـ هـ مماس للدائرة عند حـ
برهن أن : Δ هـ حـ ب ~ Δ هـ أ حـ ثم أوجد طول حـ هـ ومساحة المثلث أ ب حـ



البرهان :

∵ أ ب قطر فى الدائرة

∴ ق(أ حـ ب) = ٩٠

∴ (ب حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} − (أ حـ)^{٢}

∴ (ب حـ)^{٢} = ١٦٩ − ١٤٤

∴ (ب حـ)^{٢} = ٢٥سم^{٢}

∴ ب حـ = ٥سم

∵ المثلثان : هـ حـ ب ، هـ أ حـ فيهما

ق(هـ حـ ب) المماسية = ق(أ) المحيطية ، ق(هـ) زاوية مشتركة

∴ Δ هـ حـ ب ~ Δ هـ أ حـ نفرض أن ب هـ = س ، أ هـ = ١٣ + س

$$\frac{\text{هـ حـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ حـ}}$$

$$\frac{\text{هـ حـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{٥}{١٢} = \frac{\text{س}}{\text{حـ هـ}}$$

∴ $\text{س} = \frac{٥\ \text{حـ هـ}}{١٢}$ ⟵ (١)

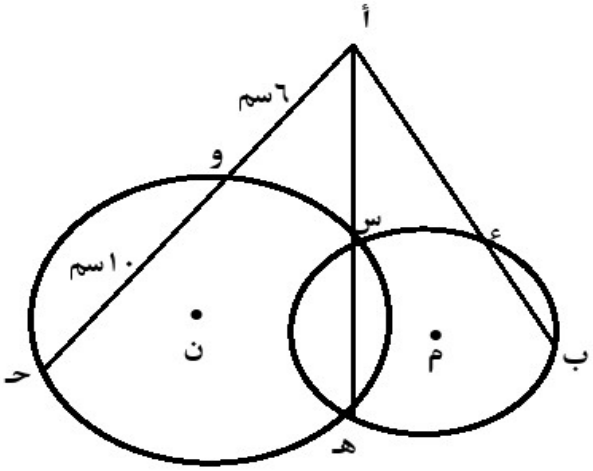
∴ (حـ هـ)^{٢} = س × (١٣ + س) ⟵ (٢) بالتعويض من ١ فى ٢

∴ $(\text{حـ هـ})^{٢} = \frac{٥\ \text{حـ هـ}}{١٢} \times \left(١٣ + \frac{٥\ \text{حـ هـ}}{١٢}\right)$

∴ $\text{حـ هـ} = \frac{٢٥\ \text{حـ هـ}}{١٤٤} + \frac{٦٥}{١٢} \times ١٤٤$

١٤٤ حـ هـ = ٢٥ حـ هـ + ٧٨٠ ، حـ هـ = ٦,٥٥ = ٧سم

في الشكل المقابل : أ ء = ٣ ء ب ، أ و = ٦س ، و حـ = ١٠ سم ، س هـ وتر مشترك
برهن أن : حـ و ء ب رباعى دائرى ثم أوجد طول أ ء



∵ أ ب ∩ أ هـ = { أ }

∴ أ ء × ء ب = أ س × س هـ ⟵ (١)

∵ أ حـ ∩ أ هـ = { أ }

∴ أ و × و حـ = أ س × س هـ ⟵ (٢)

∴ أ ء × ء ب = أ و × و حـ

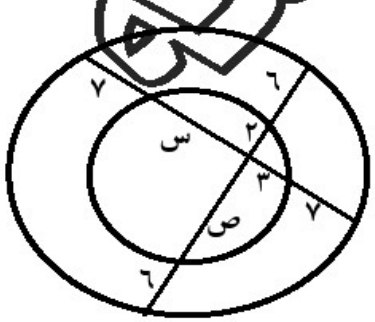
∴ الشكل ء ب حـ و رباعى دائرى

∴ ٣س × س = ٦ × ١٠

∴ ٣س^{٢} = ٦٠ ÷ ٢

∴ س^{٢} = ٢٠ ، س = $\sqrt{٢٠}$ سم

في الشكل المقابل : دائرتان متحدتا المركز . أوجد قيمتى س ، ص بالبرهان



∵ فى الدائرة الصغرى

∴ ٢ص = ٣س ⟵ (١)

∵ فى الدائرة الكبرى

∴ ٨ × (ص + ٦) = ١٠ (س + ٧) ⟵ (٢)

∴ ٤ × (ص + ٦) = ٥ (س + ٧) بالتعويض من المعادلة الأولى

∴ ٤ ص + ٢٤ = ٥ ($\frac{٢ص}{٣}$ + ٧)

∴ ٤ ص + ٢٤ = $\frac{١٠ص}{٣}$ + ٣٥ × ٣

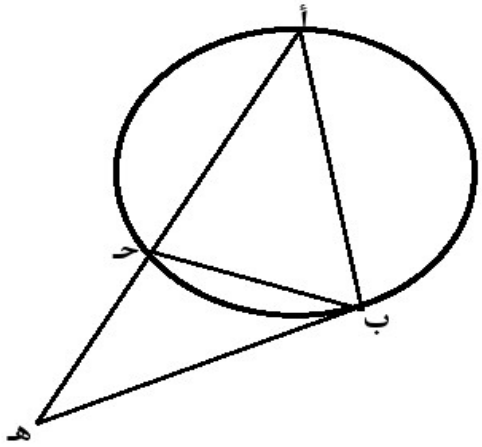
∴ ١٢ص + ٧١ = ١٠ص + ١٠٥

∴ ١٢ص − ١٠ص = ١٠٥ − ٧١

∴ ٢ص = ٣٤ ÷ ٢

∴ ص = ١٧سم بالتعويض فى المعادلة الأولى س = ١١,٣ سم

أ ب حـ مثلث فيه أ ب : ب حـ = ٤ : ٣ رسم دائرة ماره برؤوسه ، من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع أ حـ فى هـ
برهن أن : مساحة المثلث أ ب حـ : مساحة المثلث أ ب هـ = ٧ : ١٦



البرهان :

Δ أ ب هـ ، Δ حـ ب هـ فيهما

∵ ق(ب أ حـ) المحيطية = ق(حـ ب هـ) المماسية

∵ ق(هـ) زاوية مشتركة

∴ Δ هـ أ ب ~ Δ هـ ب حـ

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ أ ب}}{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ ب}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ أ ب}}{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ ب حـ}} = \frac{١٦}{٩}$

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ}} = \frac{١٦}{٧}$

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}} = \frac{٧}{١٦}$ ((مقص))

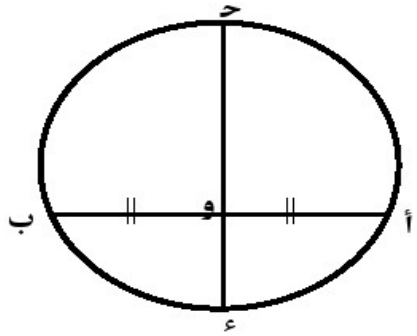
∴ مساحة Δ أ ب حـ : مساحة Δ أ ب هـ = ٧ : ١٦

محمود جمعه

لا تنسى الفكرة

- قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس
- قياس الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس
- قياس الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المماسية المشتركة معها فى نفس القوس

في الشكل المقابل : أ ب = ١٨ سم ، و ء = ٣ سم أوجد طول هـ ء بالبرهان



∵ أ و = و ب = ٩ سم

∵ أ ب ∩ حـ ء = {و}

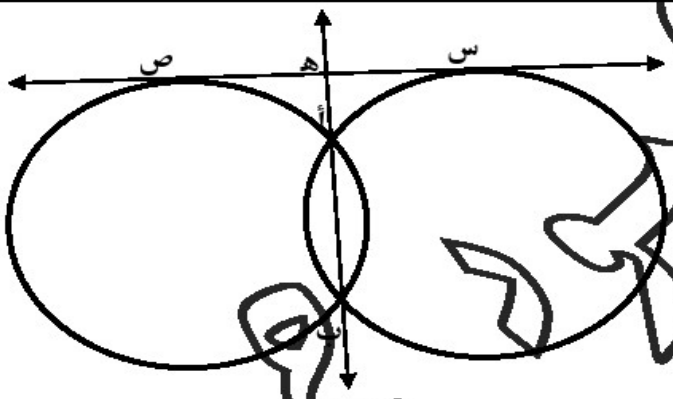
∴ أ و × و ب = حـ و × و ء

∴ ٩ × ٩ = حـ و × ٣

∴ ٢٧ حـ و = ٣

∴ حـ و = ٩ سم

دائرتان متقاطعتان في أ ، ب رسم مماس مشترك يمسانهما في س ، ص وكان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ = { هـ } فبرهن أن هـ منتصف س ص



∵ حـ س مماس للدائرة

∴ (س حـ)^{٢} = أ هـ × ب هـ ⟵ (١)

∵ حـ ص مماس للدائرة

∴ (حـ ص)^{٢} = أ هـ × ب هـ ⟵ (٢)

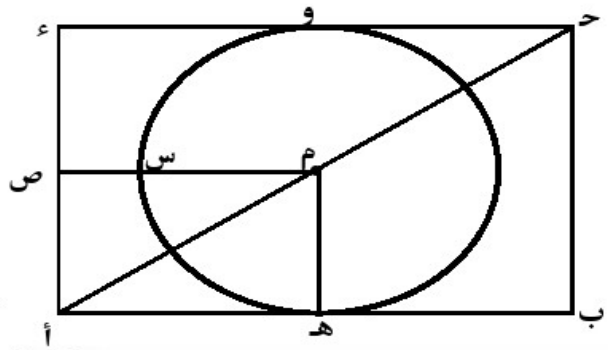
∴ (س هـ)^{٢} = (هـ ص)^{٢}

∴ س هـ = هـ ص

∴ هـ منتصف س ص

في الشكل : أ ب حـ ء مستطيل ، م دائرة طول قطرها ٦ سم ، س ص = ٢ سم وكانت م. △ أ هـ م : م. △ أ ب حـ = ١ : ٤ أوجد ب حـ

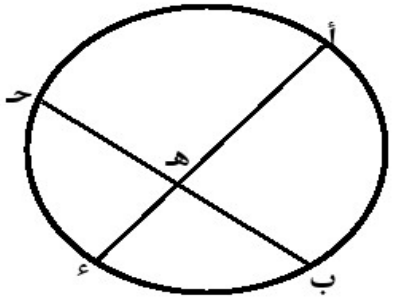
∵ طول قطر الدائرة = ٦ سم ∴ م هـ = م س = ٣ سم



∵ $\frac{\text{م. △ أ هـ م}}{\text{م. △ أ ب حـ}} = \frac{١}{٤}$

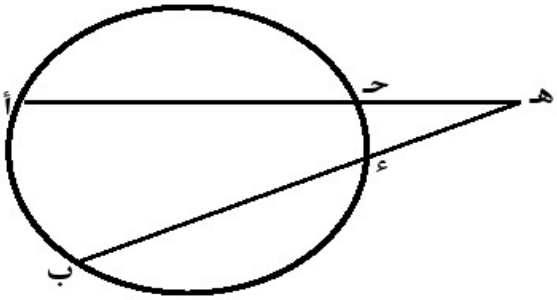
∴ $\frac{(\text{م هـ})^{٢}}{(\text{ب حـ})^{٢}} = \frac{١}{٤}$ ،، $\frac{٩}{(\text{ب حـ})^{٢}} = \frac{١}{٤}$

∴ (ب حـ)^{٢} = ٣٦ سم^{٢} ، ب حـ = ٦ سم

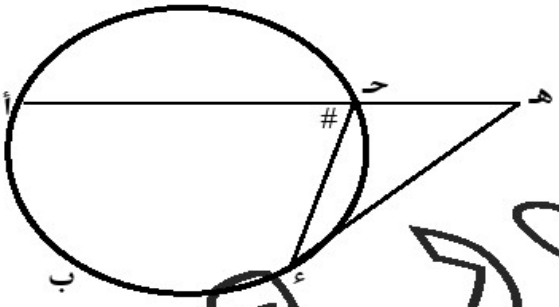


ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ب) + ق(حـ ء)]

ق(ب هـ ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب ء) + ق(أ حـ)]

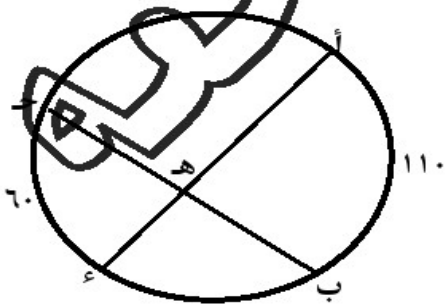


ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ب) – ق(حـ ء)]



ق(أ حـ ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ب ء) – ق(حـ ء)]

<u>في الشكل المقابل :</u> بالزوايا الموضحة بالرسم أوجد ق(أ هـ ب) ، ق(أ هـ حـ)



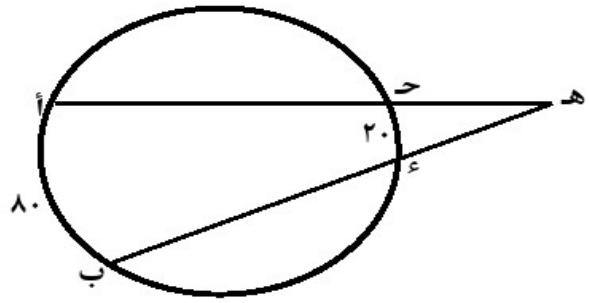
∵ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ب) + ق(حـ ء)]

∴ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [١١٠ + ٦٠]

∴ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٧٠ = ٨٥

∴ ق(أ حـ حـ) = ١٨٠ – ٨٥ = ٩٥

في الشكل المقابل : بالزوايا الموضحة بالرسم أوجد ق(أ هـ ب)

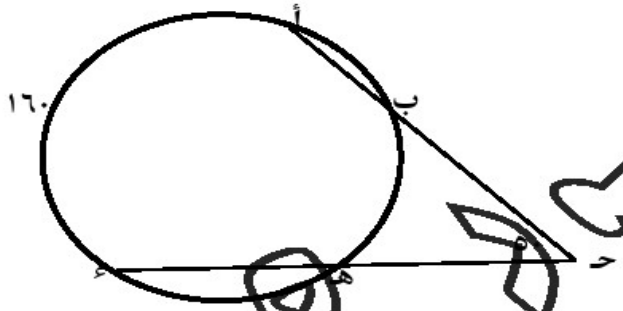


∵ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ب) − ق(حـ ء)]

∴ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [٨٠ − ٢٠]

∴ ق(أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ = ٣٠

في الشكل المقابل : بالزوايا الموضحة بالرسم أوجد قياس القوس (ب هـ)



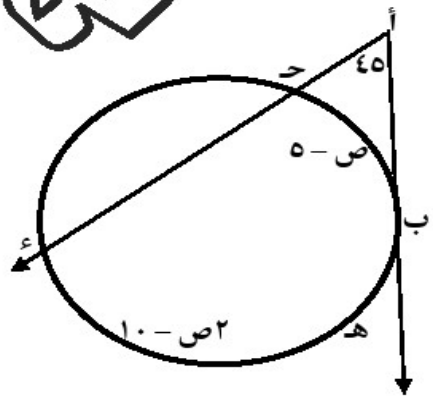
∵ ق(أ حـ ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ ء) − ق(ب هـ)]

∴ ٥٠ = $\frac{١}{٢}$ [١٦٠ − ق(ب هـ)]

∴ ١٦٠ − ق(ب هـ) = ١٠٠

∴ ق(ب هـ) = ١٦٠ − ١٠٠ = ٦٠

في الشكل المقابل : بالقياسات الموضحه بالرسم أوجد قيمة ص



∵ ق(أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(هـ ء) − ق(ب حـ)]

∴ ٤٥ = $\frac{١}{٢}$ [٢ص − ١٠ − ص + ٥]

∴ ٤٥ = $\frac{١}{٢}$ [ص − ٥]

∴ ص − ٥ = ٩٠

∴ ص = ٩٠ + ٥ = ٩٥

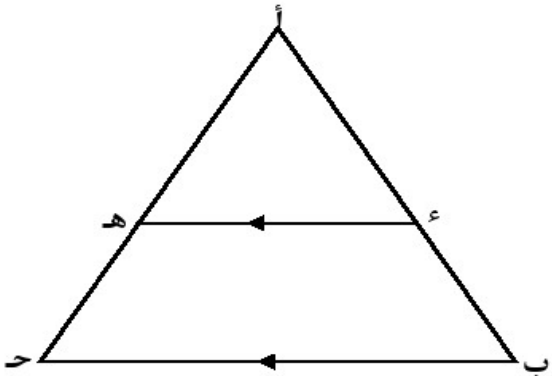
الدرس الأول : المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية (١)

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة

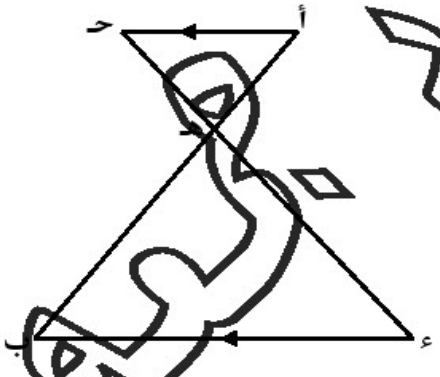
عكس النظرية

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع المثلث وقسمهما الى قطع اطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث



$$\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$$

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$$



$$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ء ب}}$$

$$\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ء ب}}$$

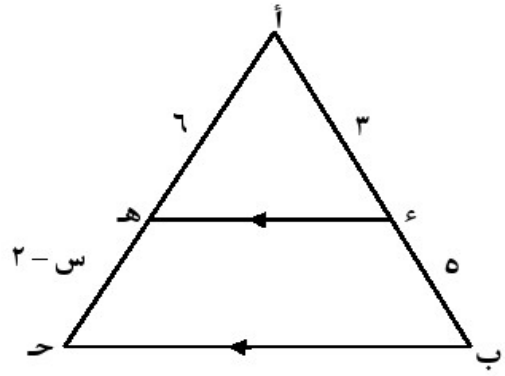
نظرية تاليس العامة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع اطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر

نظرية تاليس الخاصة

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر متساوية

في الشكل المقابل : بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد قيمة س



البرهان :

∵ ء هـ // ب حـ

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ}}$

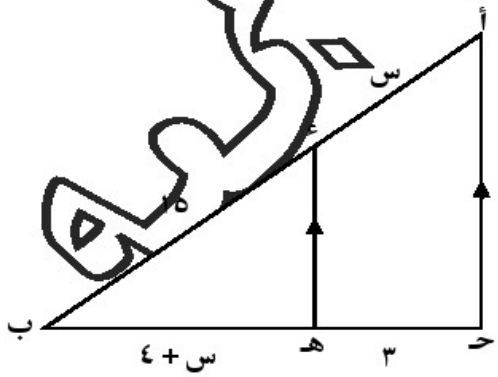
∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{٦}{\text{س} - ٢}$

∴ س – ٢ = $\frac{٥ \times ٦}{٣}$

∴ س – ٢ = ١٠

∴ س = ١٠ + ٢ = ١٢ سم

في الشكل المقابل : بالأطوال الموضحه على الرسم أوجد قيمة س



البرهان :

∵ ء هـ // أ حـ

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء أ}}$

∴ $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{١٥}{\text{س}}$

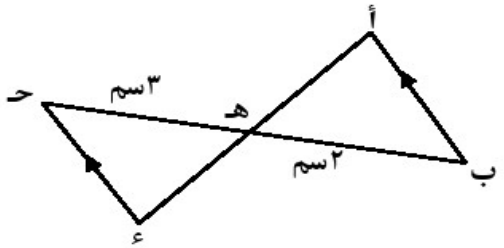
∴ $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٤٥$

∴ $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٤٥ =$ صفر

∴ (س – ٥) (س + ٩) = ٠

س = ٥ سم س = – ٩ مرفوضة

في الشكل المقابل : أ ء = ٢٠ سم . بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد طول أ هـ



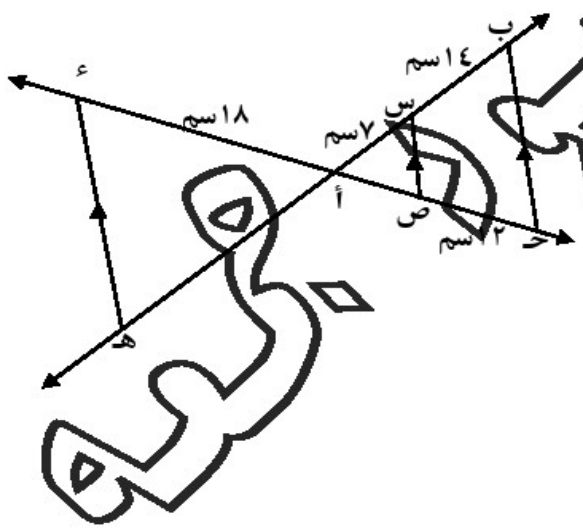
∵ أ ب // ء حـ

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{٢٠} = \frac{٢}{٥}$

∴ أ هـ = $\frac{٢ \times ٢٠}{٥}$ = ٨سم

في الشكل المقابل : أ ب = ٢١ سم . بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد طول أ هـ



∵ ب حـ// س ص

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص حـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س ب}}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{١٢} = \frac{٧}{١٤}$

∴ أ ص = $\frac{١٢ \times ٧}{١٤}$ = ٦سم

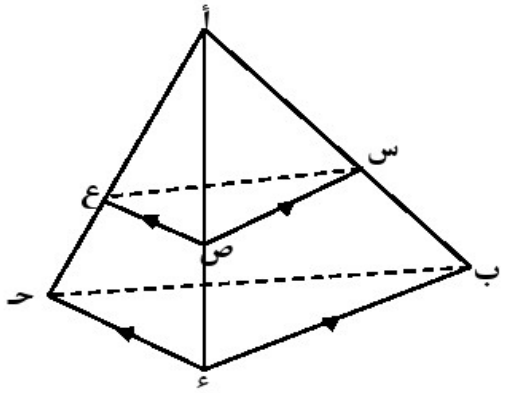
∵ س ص// ب هـ

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{٧}{\text{أ هـ}} = \frac{٦}{١٨}$

∴ أ هـ = $\frac{٧ \times ١٨}{٦}$ = ٢١سم

في الشكل المقابل : س ص // ب ء ، ص ع // ء حـ فبرهن أن : س ع // ب حـ



∵ س ص // ب ء

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص ء}}$ ← (١)

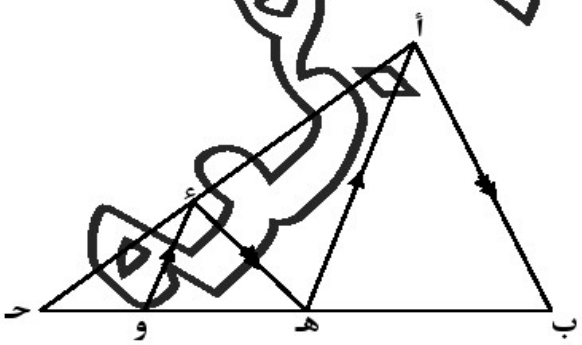
∵ ص ع // ء حـ

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص ء}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع حـ}}$ ← (٢)

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع حـ}}$

∴ س ع // ب حـ

في الشكل المقابل : برهن أن : (حـ هـ)^{٢} = حـ و × حـ ب



∵ أ ب // ء هـ

∴ $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ أ}}$ ← (١)

∵ ء و // أ هـ

∴ $\frac{\text{حـ و}}{\text{حـ هـ}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ أ}}$ ← (٢)

∴ $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{حـ هـ}}$

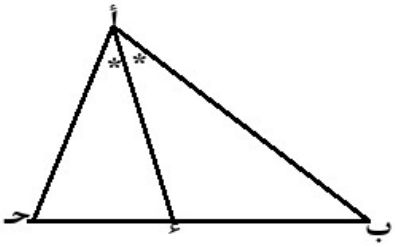
∴ حـ هـ × حـ هـ = حـ و × حـ ب

∴ (حـ هـ)^{٢} = حـ و × حـ ب

الدرس الثانى : منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

نظرية (٣)

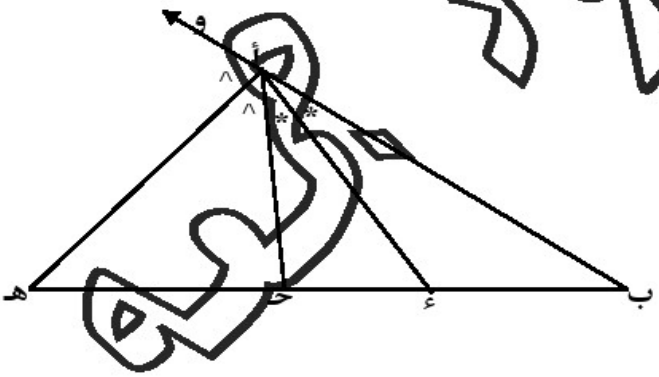
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج الى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين



أولاً : التقسيم من الداخل

∵ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$



ثانياً : التقسيم من الخارج

∵ أ هـ ينصف (حـ أ و) من الخارج

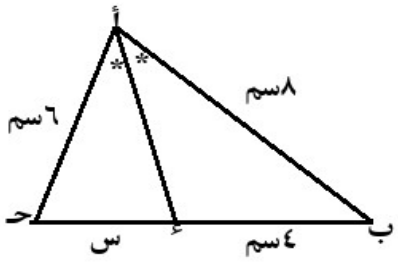
∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}}$

نتائج

- المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية الحادة يكونان متعامدان
- المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين يوازى قاعدة المثلث
- منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة

في الشكل المقابل : بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد قيمة س



∵ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{٤}{\text{س}} = \frac{٨}{٦}$

∴ س = $\frac{٤ \times ٦}{٨}$ = ٣ سم

∴ س= ٣ سم

في الشكل المقابل : بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد قيمة ص

∵ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{ص} + ١}{٦} = \frac{١٥}{٩}$

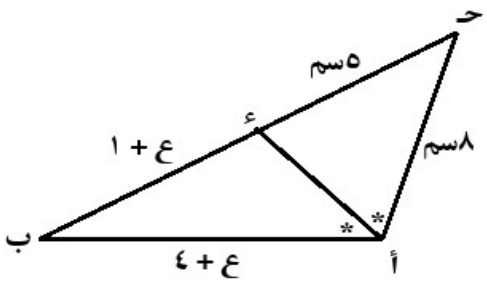
∴ ص + ١ = $\frac{٦ \times ١٥}{٩}$ = ١٠سم

∴ ص + ١ = ١٠سم

∴ ص = ١٠ − ١

∴ ص = ٩سم

في الشكل المقابل : بالأطوال الموضحه بالرسم أوجد قيمة ع



∵ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{س} + ١}{٥} = \frac{\text{س} + ٤}{٨}$

∴ ٨ (س + ١) = ٥ (س + ٤)

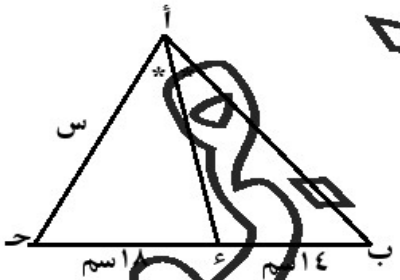
∴ ٨س + ٨ = ٥س + ٢٠

∴ ٨س − ٥س = ٢٠ − ٨

∴ ٣س = ١٢

∴ س = ٤سم

في الشكل المقابل : محيط المثلث أ ب حـ = ٨٠سم أوجد قيمة س



∵ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{١٤}{١٨} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∵ محيط المثلث أ ب حـ = ٨٠سم ، ب حـ = ٣٢ سم

∴ أ ب + أ حـ + ٣٢ = ٨٠ سم

∴ أ ب + أ حـ = ٨٠ − ٣٢ = ٤٨ سم

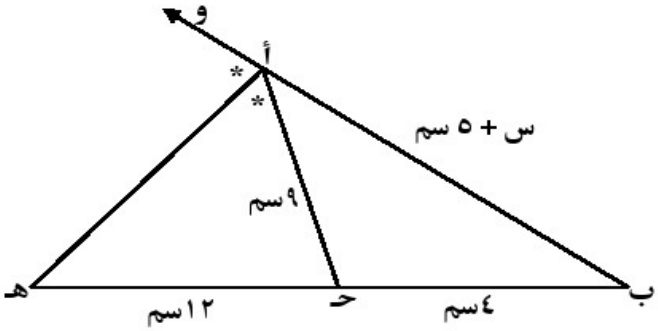
∴ أ ب = ٤٨ − أ حـ

$\frac{٤٨ - \text{أ حـ}}{\text{أ حـ}}$ $\frac{٧}{٩}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{٧}{٩}$

∴ $\frac{٤٨ - \text{أ حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٧}{٩}$ ∴ ٤٣٢ − ٩ أ حـ = ٧ أ حـ ∴ أ حـ = ٢٧سم

في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



∵ أ هـ ينصف (حـ أ و) من الخارج

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$

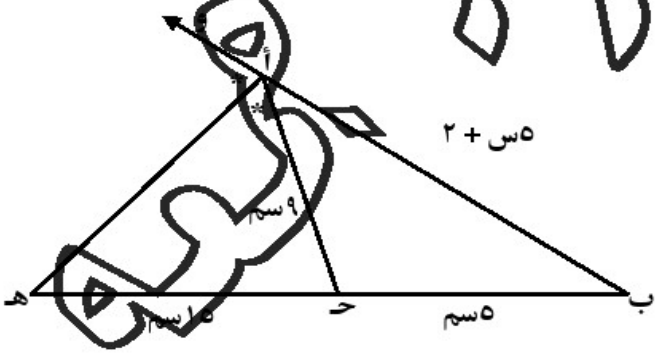
∴ $\frac{\text{س} + ٥}{٩} = \frac{١٦}{١٢}$

∴ $\text{س} + ٥ = \frac{٩ \times ١٦}{١٢}$

∴ س + ٥ = ١٢

∴ س = ١٢ − ٥ = ٧ سم

في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



∵ أ هـ ينصف (حـ أ و) من الخارج

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$

∴ $\frac{٥\text{س} + ٢}{٩} = \frac{٢٠}{١٥}$

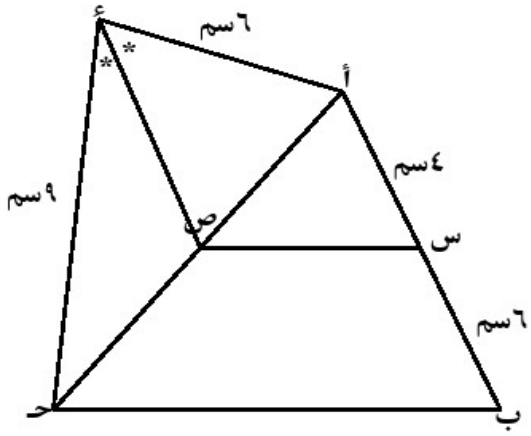
∴ $٥\text{س} + ٢ = \frac{٩ \times ٢٠}{١٥}$

∴ ٥س + ٢ = ١٢ سم

∴ ٥س = ١٠

∴ س = ٢

في الشكل المقابل : برهن أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$



∵ ء ص ينصف (أ ء حـ) من الداخل

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}}$

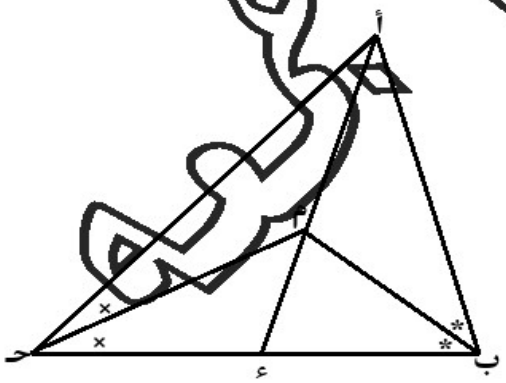
∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص حـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∵ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص حـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س ب}}$

∴ س ص // ب حـ

في الشكل المقابل : برهن أن : أ ب : أ حـ = ب ء : ء حـ



∵ ب م ينصف (أ ب ء) من الداخل

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$ ⟵ (١)

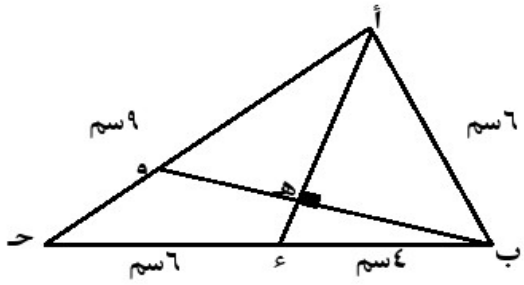
∵ م حـ ينصف (أ حـ ء) من الداخل

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$ ⟵ (٢)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$

∴ أ ب : أ حـ = ب ء : ء حـ

في الشكل المقابل : برهن أن : أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل



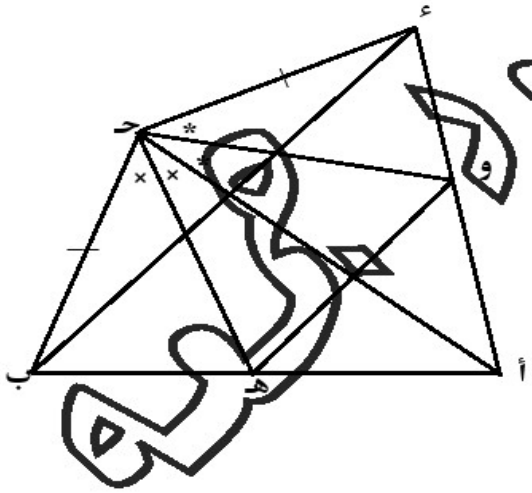
∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ⟵ (١)

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ⟵ (٢)

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ أ ء ينصف (ب أ حـ) من الداخل

في الشكل المقابل : برهن أن : وهـ // ء ب من البيانات الموضحه بالرسم



∵ حـ و ينصف (أ حـ ء) من الداخل

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و ء}}$ ⟵ (١)

∵ حـ هـ ينصف (أ حـ ب) من الداخل

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}}$ ⟵ (٢)

∵ ء حـ = حـ ب ⟵ (٣)

∴ $\frac{\text{أ و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}}$ فى المثلث أ ء ب

∴ وهـ // ب ء

الدرس الثالث : تطبيقات التناسب فى الدائرة

أولاً : قوة نقطة بالنسبة للدائرة قوة النقطة = (المسافة)^{٢} – (نصف القطر)^{٢}

ق$_{م}$(أ) = (أ م)^{٢} – نق^{٢}

- إذا كانت قوة النقطة > صفر فإن النقطة تقع خارج الدائرة
- إذا كانت قوة النقطة = صفر فإن النقطة تقع على الدائرة
- إذا كانت قوة النقطة < صفر فإن النقطة تقع داخل الدائرة

حدد موقع ق$_{م}$(أ) = ١١ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

ق$_{م}$(أ) = ١١ ، قوة النقطة > صفر فإن النقطة تقع خارج الدائرة

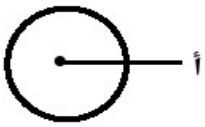
ق$_{م}$(أ) = (أ م)^{٢} – نق^{٢}

١١ = (أ م)^{٢} – ٢٥

(أ م)^{٢} = ١١ + ٢٥

(أ م)^{٢} = ٣٦

أ م = ٦ سم ، المسافة من مركز الدائرة الى النقطة أ = ٦ سم



حدد موقع ق$_{م}$(ب) = صفر بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

ق$_{م}$(ب) = صفر ، قوة النقطة = صفر فإن النقطة تقع على الدائرة

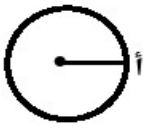
ق$_{م}$(ب) = (ب م)^{٢} – نق^{٢}

صفر = (ب م)^{٢} – ٢٥

(ب م)^{٢} = ٢٥

(ب م)^{٢} = ٥

ب م = ٥ سم ، المسافة من مركز الدائرة الى النقطة ب = ٥سم



حدد موقع قم(جـ) = -١٦ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

قم(حـ) = -١٦ ، قوة النقطة < صفر فإن النقطة تقع داخل الدائرة

ق٢(حـ) = (حـ م)٢ – نق٢

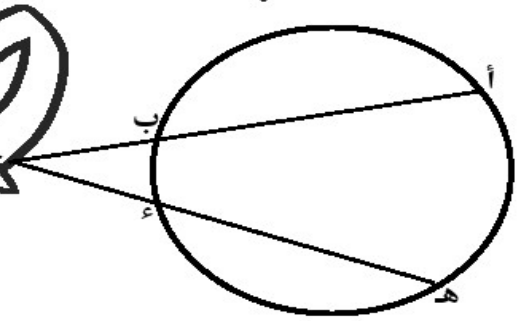
-١٦ = (حـ م)٢ – ٢٥

(حـ م)٢ = -١٦ + ٢٥

(حـ م)٢ = ٩

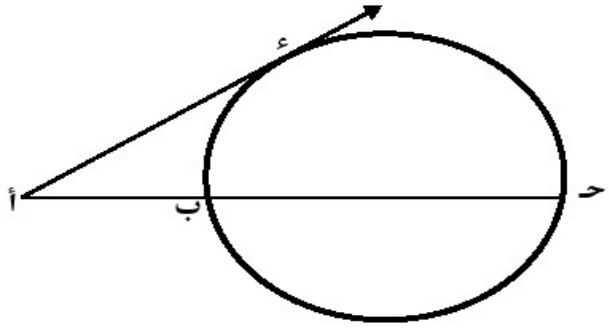
حـ م = ٣ سم

فى حالة عدم توفر نصف قطر للدائرة وتوفر وتران متقاطعان خارج الدائرة



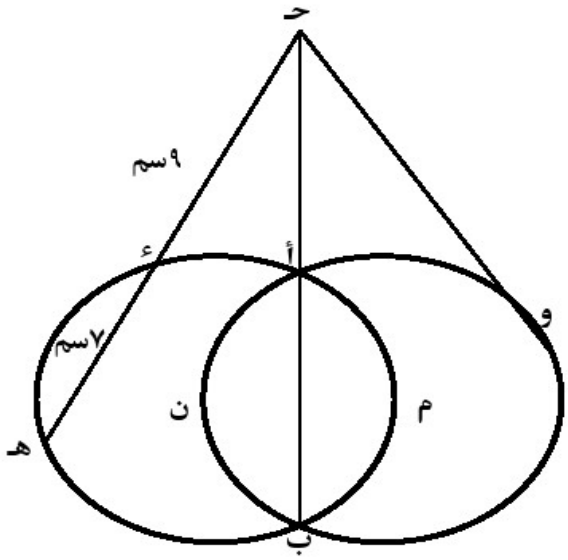
قوة حـ = حـ ب × ب أ = حـ ء × ء هـ

فى حالة عدم توفر نصف قطر للدائرة وتوفر وتران متقاطعان خارج الدائرة



قوة أ = (أ ء)٢ = أ ب × أ حـ

في الشكل المقابل : (أ) برهن أن : ق م(حـ) = ق ن (حـ)
(ب) إذا كان : أ ب = ١٠ سم ، أوجد طول : حـ و ، أ حـ



في الدائرة م

∵ (حـ و)^{٢} = حـ أ × حـ ب (١)

في الدائرة ن

∵ حـ أ × حـ ب = حـ ء × حـ هـ (٢)

∴ (حـ و)^{٢} = حـ ء × حـ هـ

∴ ق م(حـ) = ق ن(حـ)

∴ (حـ و)^{٢} = ٩ × ١٦ = ١٤٤ سم^{٢}

∴ حـ و = ١٢ سم

∵ (حـ و)^{٢} = حـ أ × حـ ب

∴ ١٤٤ = س × (س + ١٠)

∴ ١٤٤ = س^{٢} + ١٠س

∴ س^{٢} + ١٠س − ١٤٤ = صفر

∴ (س − ٨) (س + ١٨) = صفر

∴ س − ٨ = صفر أ حـ + ١٨ = صفر

∴ س = ٨ = أ حـ س = − ١٨ مرفوضة مفيش طول بالسالب

في هذه المسألة نلاحظ أن أ ب محور أساسى للدائرتين أ ، ب

- إذا تقاطع قاطعان داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس

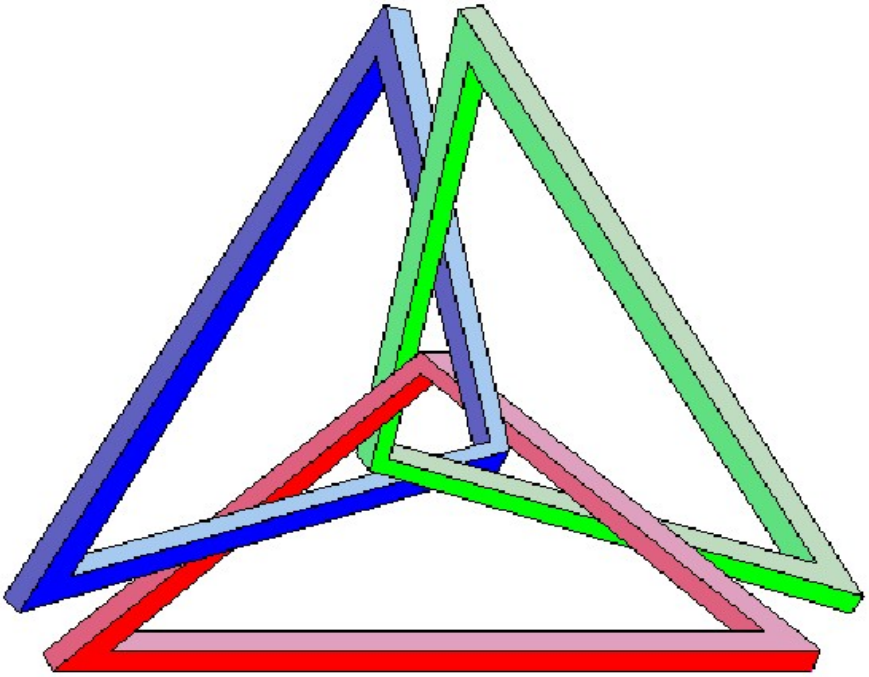
- إذا تقاطع وتران خارج الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها

- القاطع والمماس أو (المماسان للدائرة) المتقاطعان خارج دائرة يكون قياس زاوية تقاطعهما مساوياً نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها

النهائية في الرياضيات

الصـــــف الأول الثانـــــوى

الفصل الدراسي الأول



ثالثاً: حساب المثلثات

إعـــداد أ. محمود جمعه

مدرس الرياضيات للثانوية العامة

تليفون ٠١٢٨٥٨٤٧٤٨٠

الدرس الاول : الزاوية الموجهه

الزاوية الموجهه

هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية لهما نفس نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية

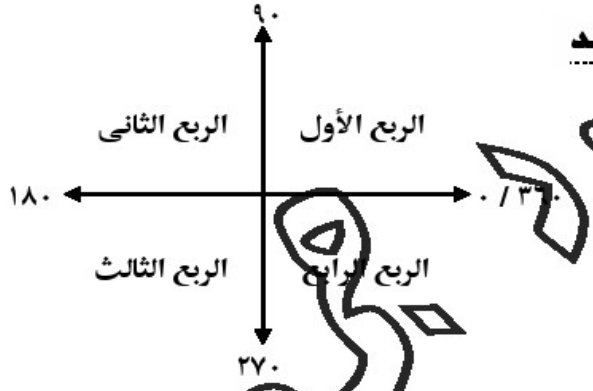
الوضع القياس للزاوية الموجهه

رأس الزاوية يكون نقطة الأصل و يكون ضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات

قياس الزاوية الموجهه

- يكون القياس موجب إذا كان إتجاه الزاوية عكس إتجاه عقارب الساعة
- يكون القياس سالب إذا كان إتجاه الزاوية مع إتجاه عقارب الساعة

موقع الزاوية فى المستوى الإحداثى المتعامد



الربع الأول : (+ ، +) ، $٠ < \theta < ٩٠$

الربع الثانى : (− ، +) ، $٩٠ < \theta < ١٨٠$

الربع الثالث : (− ، −) ، $١٨٠ < \theta < ٢٧٠$

الربع الرابع : (+ ، −) ، $٢٧٠ < \theta < ٣٦٠$

الزوايا المتكافئه هى زوايا لها نفس الضلع النهائى لزاوية موجهه فى الوضع القياسى

الزوايا الربعية هى الزوايا التى يقع ضلعها النهائى على محورى الإحداثيات

وحدات قياس الزوايا الدرجات ° والدقائق ′ والثوانى ″ : الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقه = ٦٠ ثانية

عين الربع الذى تقع فيه هذه الزوايا : ٤٨ ، ٢١٧ ، ١٣٥ ، ٢٩٥ ، ٢٧٠ ، ٩٠

أولاً : ٤٨ تقع فى الربع الأول

ثانياً : ٢١٧ تقع فى الربع الثالث

ثالثاً : ١٣٥ تقع فى الربع الثانى

رابعاً : ٢٩٥ تقع فى الربع الرابع

خامساً : ٢٧٠ زاوية ربعية

سادساً : ٢٧٠ زاوية ربعية

أوجد القياس السالب للزوايا الاتية : ٢٧٥ ، ٢٧٠ ، ٢١٠ ، ٣١٥

القياس السالب للزاوية (٢٧٥) = ٢٧٥ – ٣٦٠ = – ٨٥

القياس السالب للزاوية (٢٧٠) = ٢٧٠ – ٣٦٠ = – ٩٠

القياس السالب للزاوية (٢١٠) = ٢١٠ – ٣٦٠ = – ١٥٠

القياس السالب للزاوية (٣١٥) = ٣١٥ – ٣٦٠ = – ٤٥

أوجد القياس الموجب للزوايا الاتية : –٢٣٥ ، –٥٢ ، –١٢٦ ، –٩٠ ، –٣٢٠

القياس الموجب للزاوية (–٢٣٥) = –٢٣٥ + ٣٦٠ = ١٠٧

القياس الموجب للزاوية (–٥٢) = –٥٢ + ٣٦٠ = ١٠٧

القياس الموجب للزاوية (–١٢٦) = –١٢٦ + ٣٦٠ = ٢٣٤

القياس الموجب للزاوية (–٩٠) = –٩٠ + ٣٦٠ = ٢٧٠

القياس الموجب للزاوية (–٣٢٠) = –٣٢٠ + ٣٦٠ = ٤٠

عين الربع الذى تقع فيه الزوايا الاتية : ٣٢٥ ، ٥٧٠ ، ٣٩٠ ، –٤٥٠

أولاً : ٣٢٥ تقع فى الربع الرابع

ثانياً : ٥٧٠ – ٣٦٠ = ٢١٠ تقع فى الربع الثالث

ثالثاً : ٣٩٠ – ٣٦٠ = ٣٠ تقع فى الربع الاول

رابعاً : –٤٥٠ + ٣٦٠ = – ٩٠ + ٣٦٠ = ٢٧٠ وتكون زاوية ربعية

خلى بالك : $\pi = ١٨٠$ أو $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤

متى تكون $\pi = ١٨٠$ ؟

عندما تكون زاوية ستينية أو زاوية قبلها حا أو حتا أو طا

الدرس الثانى : وحدات قياس الزاوية

أنواع قياس الزاوية الموجهه

- القياس الستينى : يكون درجات و دقائق و ثوانى
- القياس الدائرى : $\theta^{ء}$ يكون عبارة عن أرقام عشرية

القياس الدائرى $\theta^{ء}$: قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها نق تقابل قوساً فى الدائرة طوله ل

نتيجة : طول القوس = حاصل ضرب القياس الدائرى × طول نصف قطر الدائرة

القانون ((ل = $\theta^{ء}$ × نق))

الزاوية النصف قطريه : الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوساً يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة

العلاقة بين القياس الستينى و الدائرى

$$\frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{س}{١٨٠}$$

$$س = \frac{١٨٠ \times \theta^{ء}}{\pi} \quad ، \quad \theta^{ء} = \frac{س \times \pi}{١٨٠}$$

للتحويل الى القياس الدائرى نضرب × π ونقسم على ١٨٠

للتحويل الى القياس الستينى نضرب × ١٨٠ ونقسم على π

دائرة الوحدة : هى دائرة طول نصف قطرها يساوى الوحدة

زاوية الجراد (Grad) : هى زاوية قياسها $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة

حول القياسات الاتية الى قياسات ستينية : ٠,٧ ء ، ١,٦ ء ، ٢,٠٥ ء

أولاً : ٠,٧ ء = س = $\frac{\theta ء \times ١٨٠}{\pi}$ = $\frac{٠,٧ \times ١٨٠}{\pi}$ = بالالة = ٤٠,١٠٧ = ٤٠° ٦′ ٢٥″

ثانياً : ١,٦ ء = س = $\frac{\theta ء \times ١٨٠}{\pi}$ = $\frac{١,٦ \times ١٨٠}{\pi}$ = بالالة = ٩١,٦٧٣ = ٩١° ٤٠′ ٢٣″

ثالثاً : ٢,٠٥ ء = س = $\frac{\theta ء \times ١٨٠}{\pi}$ = $\frac{٢,٠٥ \times ١٨٠}{\pi}$ = بالالة = ١١٧,٤٥٦ = ١١٧° ٢٧′ ٢٢″

أوجد القياس الدائرى للزوايا الاتية : ٥٦,٧° ، ١٨′ ٢٥° ، ٥٠′ ١٦٠°

أولاً : ٥٦,٧° = θ ء = $\frac{س \times \pi}{١٨٠}$ = $\frac{٥٦,٧ \times \pi}{١٨٠}$ = بالالة = ٠,٩٨٩ = ٠,٩٩ ء

ثانياً : ١٨′ ٢٥° = θ ء = $\frac{س \times \pi}{١٨٠}$ = $\frac{١٨′ ٢٥° \times \pi}{١٨٠}$ = بالالة = ٠,٣٥٤ = ٠,٣٥ ء

ثالثاً : ٥٠′ ١٦٠° = θ ء = $\frac{س \times \pi}{١٨٠}$ = $\frac{٥٠′ ١٦٠° \times \pi}{١٨٠}$ = بالالة = ٢٨,٠٧ = ٢,٨١ ء

زاوية محيطية قياسها ٧٥ و تحصر قوساً طوله ١١ سم احسب نق

قياس الزاوية المركزية = ٢ قياس الزاوية المحيطية = ٢ × ٧٥ = ١٥٠° نحولها لدائرى

١٥٠° = θ ء = $\frac{س \times \pi}{١٨٠}$ = $\frac{١٥٠ \times \pi}{١٨٠}$ = بالالة = ٢,٦١ ء

ل = θ ء × نق

١١ = ٢,٦ × نق

نق = ٤,٢٣ = ٤,٢ سم الناتج مقرب لاقرب رقم عشرى واحد

نق = ٤,٢٣ = ٤سم الناتج مقرب لاقرب رقم عدد صحيح

أوجد القياس الدائرى والستينى للزاوية المركزية التى تقابل قوساً طوله ٨,٧ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٤ سم

ل = θ ʿ × نق

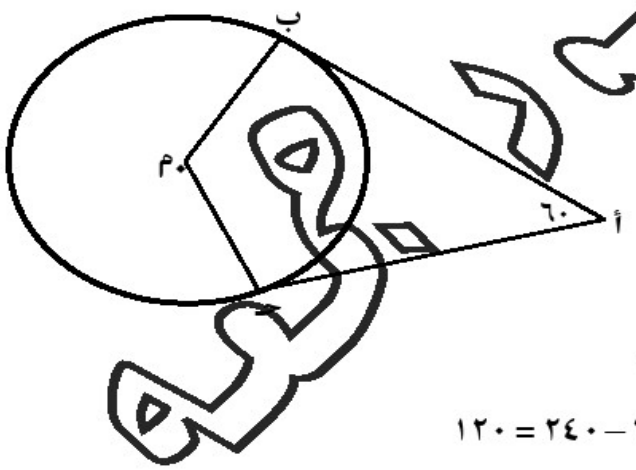
٨,٧ = θ ʿ × ٤

θ ʿ = ٢,١٧٥ ʿ

القياس الدائرى للزاوية المركزية = ٢,١٧٥ ʿ

٢,١٧٥ ʿ = س = $\frac{١٨٠ \times ٢,١٧٥}{\pi}$ = ١٢٤,٦١٨ = ٥″ ٣٧′ ١٢٤°

مماسان مرسومان من نقطة واحدة والزاوية بينهما ٦٠
أوجد طول القوس الأكبر المقابل للزاوية المركزية فى دائرة نصف قطرها ٥ سم



∵ أ ب مماس للدائرة م ، ب م (نصف قطر)

∴ ب م ⊥ أ ب

∴ ق(م ب أ) = ٩٠

∵ أ حـ مماس للدائرة م ، حـ م (نصف قطر)

∴ حـ م ⊥ أ حـ

∴ ق(أ حـ م) = ٩٠

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

∴ ق(ب م حـ) = ٣٦٠ − (٦٠ + ٩٠ + ٩٠) = ٣٦٠ − ٢٤٠ = ١٢٠

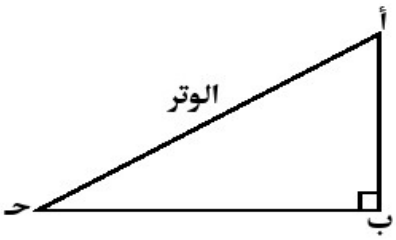
∴ ق(ب م حـ المنعكسه) = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠ ((نحولها الى قياس دائرى))

٢٤٠° = θ ʿ = $\frac{س \times \pi}{١٨٠}$ = $\frac{٢٤٠ \times \pi}{١٨٠}$ = بالالة = ٤,١٨٨ ʿ

ل = θ ʿ × نق

ل = ٤,١٨٨ × ٥ = ٢٠,٩٤ سم = ٢١ سم طول القوس لاقرب عدد صحيح = ٢١سم

الدرس الثالث : الدوال المثلثية



حا حـ = المقابل / الوتر = أ ب / أ حـ

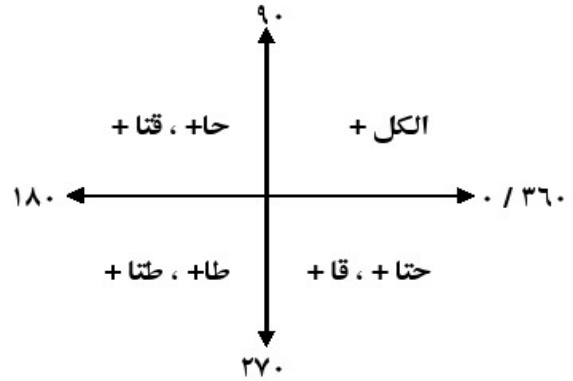
حتا حـ = المجاور / الوتر = ب حـ / أ حـ

طا حـ = المقابل / المجاور = أ ب / ب حـ

* **دائرة الوحدة :** دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الاطول
* **قانون دائرة الوحدة :** س^{٢} + ص^{٢} = ١
* **الدوال المثلثية الأساسية :** طا tan ، حتا cos ، حا sin
* **جيب تمام الزاوية حتا** هو الإحداثى السينى
* **جيب الزاوية حا** هو الإحداثى الصادى
* **ظل تمام الزاوية طا** هو الاحداثى الصادى ÷ الاحداثى السينى

مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية : قا مقلوب حتا ، قتا مقلوب حا ، طتا مقلوب طا

إشارات الدوال فى المستوى الاحداثى المتعامد



ملخص الإشارات فى جمله عفويه : كل جبار ظالم حته داهيه تاخده البعيد #

الدوال المثلثية لبعض الزوايا (سبق دراستها)

٣٠ = ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) و منها : حتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، طا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٦٠ = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) و منها : حتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ ، حا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، طا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$

٤٥ = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) و منها : حتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، طا ٤٥ = $\frac{١}{١}$

عين إشارات الدوال الاتية : جا ١٣٠ ، ظا ٣١٥ ، جتا ٦٥٠ ، قا(−٣٠)

- حا ١٣٠ تقع فى الربع الثانى : حا ١٣٠ تكون موجبة
- طا٣١٥ تقع فى الربع الرابع : طا ٣١٥ تكون سالبه
- جتا ٦٥٠ : لازم الزاوية تكون فى الوضع القياس [٠ ، ٣٦٠] ، ٦٥٠ − ٣٦٠ = ٢٩٠
- جتا ٦٥٠ : تقع فى الربع الرابع : جتا ٦٥٠ تكون موجبة
- قا (−٣٠) : لازم الزاوية تكون فى الوضع القياس [٠ ، ٣٦٠] ، −٣٠ + ٣٦٠ = ٣٣٠
- قا (−٣٠) : تقع فى الربع الرابع : قا(−٣٠) تكون موجبة

عين الدوال المثلثية لإحدى زوايا دائرة الوحدة : هـ = ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

حتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	← مقلوباها قا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	حتا = الاحداث السينى
حا هـ = $\frac{١}{٢}$	← مقلوباها قتا هـ = ٢	حا = الاحداث الصادى
طا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$	← مقلوباها طتا هـ = $\sqrt{٣}$	طا = الصادى ÷ السينى

إذا كانت هـ (٣أ ، -٤أ) زاوية موجهه فى الوضع القياسى والتى يمر ضلعها بدائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية إذا كانت أ > ٠

دائرة الوحدة نستنتج : $س^٢ + ص^٢ = ١$

$٩أ^٢ + ١٦أ^٢ = ١$

$٢٥أ^٢ = ١$

$أ^٢ = \frac{١}{٢٥}$

$أ = \pm \frac{١}{٥}$ والسالب مرفوض لان أ > ٠

الزاوية هـ = $(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥})$

حتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ مقلوباها كا هـ = $\frac{٥}{٣}$ حتا = الاحداث السينى

حا هـ = $\frac{-٤}{٥}$ مقلوباها قتا هـ = $\frac{٥}{-٤}$ حا = الاحداث الصادى

طا هـ = $\frac{-٤}{٣}$ مقلوباها طتا هـ = $\frac{٣}{-٤}$ طا = الصادى ÷ السينى

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

- صفر أو ٣٦٠ = (١ ، ٠) و منها : حتا ٠ = ١ ، حا ٠ = ٠ ، طا ٠ = ٠

  : حتا ٣٦٠ = ١ ، حا ٣٦٠ = ٠ ، طا ٣٦٠ = ٠

- ٩٠ = (٠ ، ١) و منها : حتا ٩٠ = ٠ ، حا ٩٠ = ١ ، طا ٩٠ = غير معرف

- ١٨٠ = (-١ ، ٠) و منها : حتا ١٨٠ = -١ ، حا ١٨٠ = ٠ ، طا ١٨٠ = صفر

- ٢٧٠ = (٠ ، -١) و منها : حتا ٢٧٠ = ٠ ، حا ٢٧٠ = -١ ، طا ٢٧٠ = غير معرف

الدرس الرابع : العلاقات بين الدوال المثلثية

الصفحه دى ياحفظها زى اسمك ياما تفهم سطر واحد وجيب انتا الباقى

جا (١٨٠ − θ) = جا θ ، جتا (١٨٠ − θ) = −جتا θ ، طا (١٨٠ − θ) = −طا θ

قتا (١٨٠ − θ) = قتا θ ، قا (١٨٠ − θ) = −قا θ ، ظتا (١٨٠ − θ) = −ظتا θ

جا (١٨٠ + θ) = −جا θ ، جتا (١٨٠ + θ) = −جتا θ ، طا (١٨٠ + θ) = طا θ

قتا (١٨٠ + θ) = −قتا θ ، قا (١٨٠ + θ) = −قا θ ، ظتا (١٨٠ + θ) = ظتا θ

جا (٣٦٠ − θ) = −جا θ ، جتا (٣٦٠ − θ) = جتا θ ، طا (٣٦٠ − θ) = −طا θ

قتا (٣٦٠ − θ) = −قتا θ ، قا (٣٦٠ − θ) = قا θ ، ظتا (٣٦٠ − θ) = −ظتا θ

جا (٣٦٠ + θ) = جا θ ، جتا (٣٦٠ + θ) = جتا θ ، طا (٣٦٠ + θ) = طا θ

قتا (٣٦٠ + θ) = قتا θ ، قا (٣٦٠ + θ) = قا θ ، ظتا (٣٦٠ + θ) = ظتا θ

جا (٩٠ − θ) = جتا θ ، جتا (٩٠ − θ) = جا θ ، طا (٩٠ − θ) = طتا θ

قتا (٩٠ − θ) = قا θ ، قا (٩٠ − θ) = قتا θ ، ظتا (٩٠ − θ) = ظا θ

جا (٩٠ + θ) = جتا θ ، جتا (٩٠ + θ) = −جا θ ، طا (٩٠ + θ) = −طتا θ

قتا (٩٠ + θ) = قا θ ، قا (٩٠ + θ) = −قتا θ ، ظتا (٩٠ + θ) = −ظا θ

جا (٢٧٠ − θ) = −جتا θ ، جتا (٢٧٠ − θ) = −جا θ ، طا (٢٧٠ − θ) = طتا θ

قتا (٢٧٠ − θ) = −قا θ ، قا (٢٧٠ − θ) = −قتا θ ، ظتا (٢٧٠ − θ) = ظا θ

جا (٢٧٠ + θ) = جتا θ ، جتا (٢٧٠ + θ) = −جا θ ، طا (٢٧٠ + θ) = −طتا θ

قتا (٢٧٠ + θ) = قا θ ، قا (٢٧٠ + θ) = −قتا θ ، ظتا (٢٧٠ + θ) = − ظا θ

طريقة أخرى بدل الحفظ

- الزاويتان (١٨٠ ، ٣٦٠) بتحافظ على الدالة يعنى حا تبقى حا ، حتا تبقى حتا ، طا تبقى طا
- الزاويتان (٩٠ ، ٢٧٠) بتقلب على الدالة يعنى حا تبقى حتا ، حتا تبقى حا ، طا تبقى طتا
- ثم نكتب إشارة الدالة على حسب الربع بتاعها

طريقة إيجاد الزوايا المجهولة (العامة)

- بنطرح من ١٨٠ لو الزاوية فى الربع الثانى او الثالث
- بنطرح من ٣٦٠ لو الزاوية فى الربع الرابع
- نكتب إشارة الدالة

أوجد بدون الالة قيمة كلاً من : حتا ١٢٠ ، جا ١٣٥ ، جتا ١٥٠

- حتا ١٢٠ (فى الربع الثانى نطرح من ١٨٠ والاشارة سالبه)= - حتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$
- جا ١٣٥ (فى الربع الثانى نطرح من ١٨٠ والاشارة موجبة)= حا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- جتا ١٥٠ (فى الربع الثانى نطرح من ١٨٠ والاشارة سالبه)= -حتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أوجد بدون الالة قيمة كلاً من : حا ٢١٠ ، جتا ٢٢٥ ، ظا ٢٤٠

- حا ٢١٠ (فى الربع الثالث نطرح من ١٨٠ والاشارة سالبه)= - حا ٣٠ = - $\frac{١}{٢}$
- جتا ٢٢٥ (فى الربع الثالث نطرح من ١٨٠ والاشارة سالبه)= - حتا ٤٥ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- ظا ٢٤٠ (فى الربع الثالث نطرح من ١٨٠ والاشارة موجبة)= ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

أوجد بدون الالة قيمة : جا (-٤٥) ، جتا(-٦٠) ، ظا(-٣٠) ، جا ٦٩٠

- حا (-٤٥) (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نطلع السالب قبل الجا)= - جا ٤٥ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- جتا (-٦٠) (جتا بتحذف الاشارة السالب)= حتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$
- ظا(-٣٠) (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نطلع السالب قبل الظا)= -ظا ٣٠ = - $\frac{١}{\sqrt{٣}}$
- جا(٦٩٠) (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نطرح من ٣٦٠)= جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

بدون استخدام الالة أوجد : جا ١٥٠ جتا (-٣٠٠) + جتا ٩٣٠ ظتا ٢٤٠

- حا ١٥٠ (فى الربع الثانى نطرح من ١٨٠ والاشارة موجبة)= حا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$
- جتا (-٣٠٠) (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نزود ٣٦٠)= حتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$
- جتا(٩٣٠) (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نطرح من ٣٦٠)= حتا ٢١٠ = - حتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- ظتا(٢٤٠) (فى الربع الثالث نطرح من ١٨٠ والاشارة موجبة) = ظتا ٦٠ = مقلوب ظا ٦٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$
- جا ١٥٠ جتا (-٣٠٠) + جتا ٩٣٠ ظتا ٢٤٠

$$= \left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\right) + \left[\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) \times \frac{١}{\sqrt{٣}}\right]$$

$$= \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$$

احسب قيمة المقدار لابسط صورة : جا ٦٠٠ جتا (−٣٠) + جا ١٥٠ جتا (−٢٤٠)

المقدار = جا ٦٠٠ جتا (−٣٠) + جا ١٥٠ جتا (−٢٤٠)

- جا ٦٠٠ (لازم الزاوية تكون فى الوضع القياسى نطرح من ٣٦٠) = جا ٢٤٠ = − جا ٦٠ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- جتا (−٣٠) (جتا بتحذف الاشاره السالب) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- جا(١٥٠) (فى الربع الثانى نطرح من ١٨٠ والاشارة موجبة)= جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$
- جتا(−٢٤٠) (جتا بتحذف الاشاره السالب) = جا ٢٤٠ = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

الأيمن = جا ٦٠٠ جتا (−٣٠) + جا ١٥٠ جتا (−٢٤٠)

$= (-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}) + (\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢})$

$= -\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٢}$

مجموعة الحل لزاويتان متتامتان

إذا كان : جا س = جتا ص ، قاس = قتاص ، ظاس = ظتا ص

نستفيد : س + ص = ٩٠ أى الزاوية اليمنى + الزاوية اليسرى = ٩٠

أوجد مجموعة حل المعادلة : جا ٢ θ = جتا θ

$٢\theta + \theta = ٩٠$

$٣\theta = ٩٠$

$\theta = ٣٠$ م . ح = { ٣٠ }

أوجد مجموعة حل المعادلة : جا (٣ θ + ١٥) = جتا (٢θ – ٥)

٣θ + ١٥ + ٢θ – ٥ = ٩٠

٥θ + ١٠ = ٩٠

٥θ = ٩٠ – ١٠

٥θ = ٨٠

θ = ١٦ م . ح = { ١٦ }

أوجد مجموعة حل المعادلة : قا (θ + ٢٠) = قتا (٣θ + ٣٠)

θ + ٢٠ + ٣θ + ٣٠ = ٩٠

٤θ + ٥٠ = ٩٠

٤θ = ٩٠ – ٥٠

٤θ = ٤٠

θ = ١٠ م . ح = { ١٠ }

الحـــل العـــام للمعـــادلات المثلثيـــة على صورة الزاويان

جا س = جتا ص ، قاس = قتاص ، ظا س = ظتا ص

- إذا كان : جا س = جتا ص نستفيد : س ± ص = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن
- إذا كان : قا س = قتا ص نستفيد : س ± ص = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن
- إذا كان : ظا س = ظتا ص نستفيد : س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن

أوجد الحل العام للمعادلة : جا ٢ θ = جتا θ

$$٢\theta \pm \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

$$٢\theta + \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

$$٣\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

$$\theta = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$$

$$٢\theta - \theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

$$\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$$

حل المعادلة : $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi ن$ ، $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

أوجد الحل العام للمعادلة : ظا ٤ θ = ظا ٢ θ

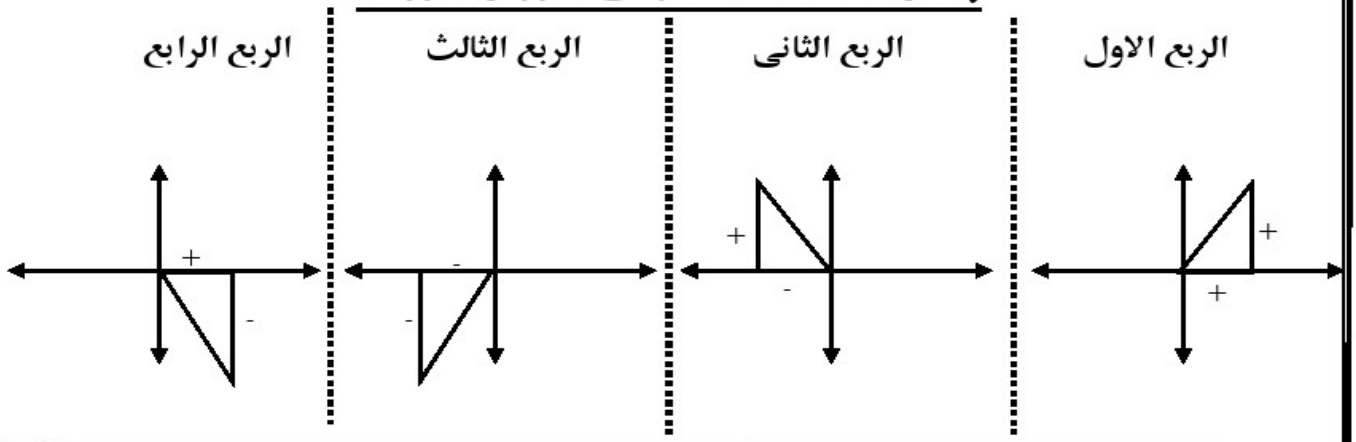
$$٤\theta + ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$$

$$٦\theta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن \quad \div ٦$$

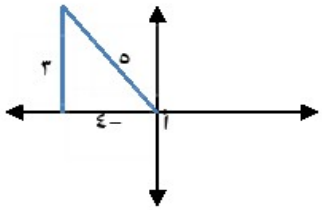
$$\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦} ن$$

الحل العام = $\frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٦} ن$

وضع المثلث القائم فى الارباع الاربعه



اذا كان : ٥حـا أ – ٣ = ٠ حيث أ ∈] ٩٠ ، ١٨٠ [، ١٢ طاهـ – ٥ = ٠ حيث هـ ∈]٠ ، ٩٠[
أوجد الدوال المثلثية ومقلوباتها ثم أوجد : حـتا (١٨٠ + أ) ، طتا (٢٧٠ – هـ)



ضلع^{٢} = ٢٥ – ٩ = ١٦ ، الضلع = ٤

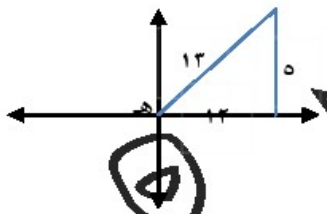
أولاً : ٥ حا أ – ٣ = ٠ في الربع الثاني

٥ حا أ = ٣

حا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، قتا أ = $\frac{٥}{٣}$

حتا أ = – $\frac{٤}{٥}$ قتا أ = – $\frac{٥}{٤}$

طا أ = – $\frac{٣}{٤}$ ، طتا أ = – $\frac{٤}{٣}$



وتر^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ ، الوتر = ١٣

ثانياً : ١٢ طا هـ – ٥ = ٠ في الربع الأول

١٢ طا هـ = ٥

طا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، طتا أ = $\frac{١٢}{٥}$

حا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ ، قتا هـ = $\frac{١٣}{٥}$

حتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، قا هـ = $\frac{١٣}{١٢}$

- **حـتا (١٨٠ + أ) =** – حتا أ = – (– $\frac{٤}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$
- **طتا (٢٧٠ – هـ) =** – طا هـ = – $\frac{٥}{١٢}$
- **حـتا (٩٠ + هـ) =** – حا هـ = – $\frac{٥}{١٣}$

الدرس الخامس : التمثيل البيانى للدوال المثلثية

أولا : دالة الجيب د(θ) = جا θ

مجال الدالة = ح =] − ∞ ، ∞ [

مدى الدالة = [−١ ، ١]

القيمة العظمى = ١ عند : $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

القيمة الصغرى = −١ عند : $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$

ثانياً : دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ

مجال الدالة = ح =] − ∞ ، ∞ [

مدى الدالة = [−١ ، ١]

القيمة العظمى = ١ عند : $\theta = \pm ٢\pi ن$

القيمة الصغرى = −١ عند : $\theta = \pm \pi + ٢\pi ن$

* **مدى الدالة د(س) = حا θ هو** [−١ ، ١]
* **مدى الدالة د(س) = حتا θ هو** [−١ ، ١]
* **مدى الدالة د(س) = ٢حتا θ هو** [−٢ ، ٢]
* **مدى الدالة د(س) = ٣حتا θ هو** [−٣ ، ٣]
* **مدى الدالة د(س) = ٤حا θ هو** [−٤ ، ٤]
* **مدى الدالة د(س) = ١,٥حا θ هو** [−١,٥ ، ١,٥]

الدرس السادس : إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية

أوجد مجموعة حل المعادلة : جتا θ = ٠,٥

θ = جتا$^{-1}$ ٠,٥ shift cos(0.5)

θ = ٦٠ (الأول ، الرابع)

الاول = θ = ٦٠

الرابع = ٣٦٠ − θ = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠

م . ح = { ٦٠ ، ٣٠٠ }

أوجد مجموعة حل المعادلة : جا θ = ٠,٥

θ = جا$^{-1}$ ٠,٥ shift sin(0.5)

θ = ٣٠ (الأول ، الثانى)

الاول = θ = ٣٠

الثانى = ١٨٠ − θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

م . ح = { ٣٠ ، ١٥٠ }

أوجد مجموعة حل المعادلة : ظا θ = ١

θ = ظا$^{-1}$ ١ shift tan (1)

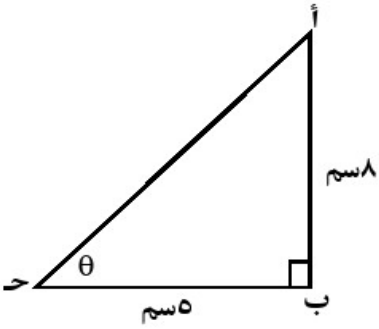
θ = ٤٥ (الأول ، الثالث)

الاول = θ = ٤٥

الثالث = ١٨٠ + θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥

م . ح = { ٤٥ ، ٢٢٥ }

سلم يستند على حائط رأسى طوله ٨سم ويبعد عنه بمقدار ٥سم أوجد زاوية الميل

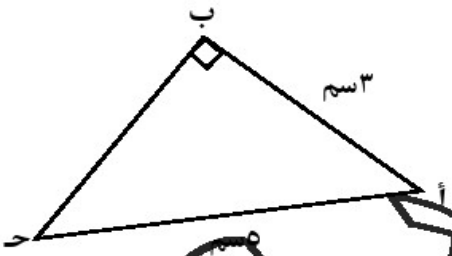


ظا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

ظا θ = $\frac{٨}{٥}$

ظا θ = ظا$^{-١}$ ($\frac{٨}{٥}$) = ٥٧° ٥٩′ ٤٥″

سلم طوله ٥سم يستند على حائط رأسى ويبعد عنه بمقدار ٣سم أوجد زاوية الميل

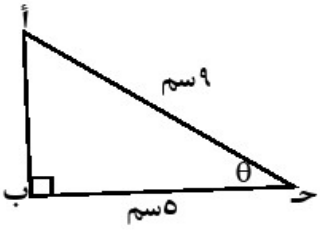


حتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المجاور}}$

حتا θ = $\frac{٣}{٥}$

حتا θ = حتا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٥}$) = ٣٦° ٥٢′ ١١″

سلم طوله ٩سم يستند على حائط رأسى ويبعد عنه بمقدار ٥سم أوجد زاوية الميل



حتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المجاور}}$

حتا θ = $\frac{٥}{٩}$

حتا θ = حتا$^{-١}$ ($\frac{٥}{٩}$) = ٥٦° ١٥′ ٣″