

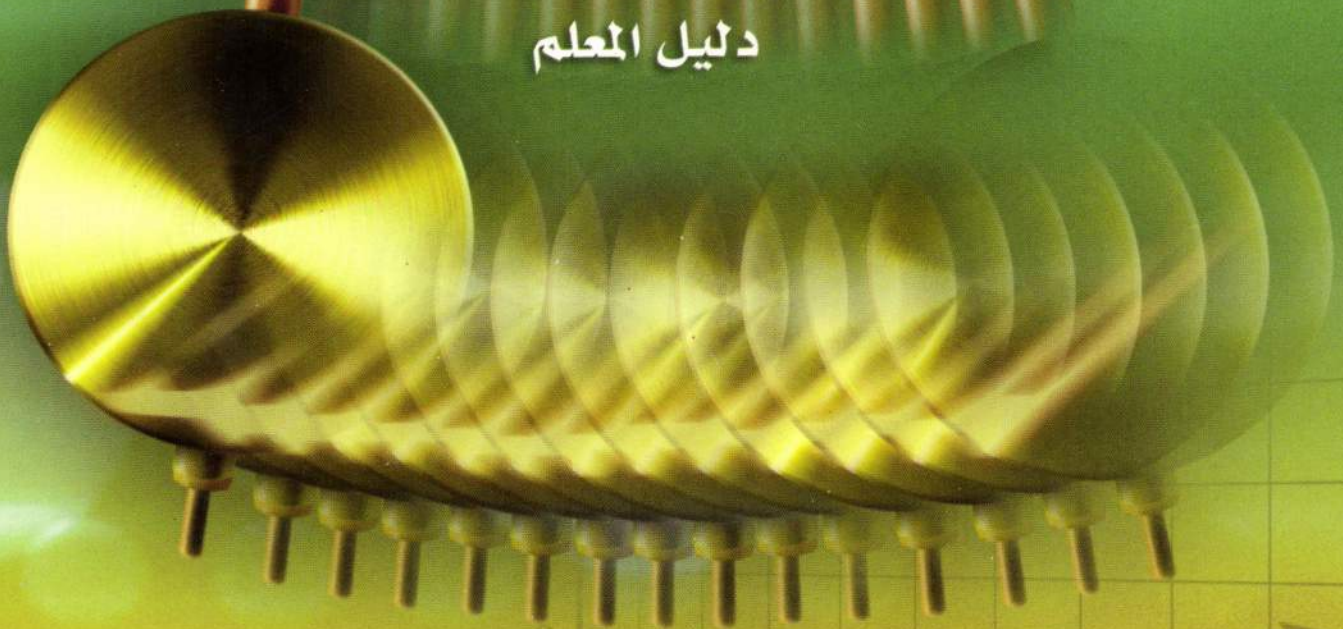


وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للفصل الثاني الثانوي - قسم العلوم الطبيعية
الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$





وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

العبيكان
Obekan

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة المعدلة

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Original Title:

Algebra2 © 2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M. Casey

Contributing Authors

Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content

Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented

Shelbik.cole

Graphing Calculator

Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency

Robert m . capraro

Pre-AP

Dixie Ross

Reading and Writing

Releah cassett lent
Lynn T. Havens

الرياضيات

الصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

أعدت النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبد الله البصيص
صلاح بن عبد الله الزيد
عبد الحكيم عبد الله سليمان
عمر محمد أبو غليون
خلود عبد الحفيظ لوياني
حسان عبد الله الجوراني

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبد العزيز الفراج

حول الغلاف

تدرس في الفصل الرابع من هذا الكتاب تمثيل دوال الجذور التربيعية وحلها. وتعد حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.



www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آمليّن أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علمياً وتربوياً، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيّاً والمترابطة رأسيّاً، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانياً: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططاً للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. ويقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعماً للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططاً للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثاً: الدروس:

يقدم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثناءه وبعده.

التدريس: يقدم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة بحسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحاً للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات. كما يقدم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعاً: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق



العلاقات والدوال النسبية

الفصل
5

8A	مخطط الفصل 5	
8C	التقويم والمعالجة	
8D	تنوع التعليم	
8E	المحتوى الرياضي	
9	التهيئة للفصل 5	
10	ضرب العبارات النسبية وقسمتها	5-1
18	جمع العبارات النسبية وطرحها	5-2
24	تمثيل دوال المقلوب بيانياً	5-3
31	اختبار منتصف الفصل	
32	تمثيل الدوال النسبية بيانياً	5-4
38	توسع 5-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل الدوال النسبية بيانياً	
39	دوال التغير	5-5
45	حل المعادلات والمتباينات النسبية	5-6
51	توسع 5-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات النسبية	
53	دليل الدراسة والمراجعة	
57	اختبار الفصل	
58	الإعداد للاختبارات المعيارية	
60	اختبار تراكمي	
61A	ملحق الإجابات	

المتتابعات والمتسلسلات

الفصل
6

62A	مخطط الفصل 6	
62C	التقويم والمعالجة	
62D	تنوع التعليم	
62E	المحتوى الرياضي	
63	التهيئة للفصل 6	
64	المتتابعات بوصفها دوال	6-1
70	المتتابعات والمتسلسلات الحسابية	6-2
78	المتتابعات والمتسلسلات الهندسية	6-3
84	اختبار منتصف الفصل	
85	المتسلسلات الهندسية غير المنتهية	6-4
91	توسع 6-4 معمل الحاسبة البيانية: النهايات	
92	نظرية ذات الحدين	6-5
96	توسع 6-5 معمل الجبر: التوافق ومثلث باسكال	
97	البرهان بالاستقراء الرياضي	6-6
101	دليل الدراسة والمراجعة	
105	اختبار الفصل	
106	الإعداد للاختبارات المعيارية	
108	اختبار تراكمي	
109A	ملحق الإجابات	

110A	مخطط الفصل 7	
110C	التقويم والمعالجة	
110D	تنوع التعليم	
110E	المحتوى الرياضي	
111	التهيئة للفصل 7	
112	تمثيل فضاء العينة	7-1
118	الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق	7-2
125	الاحتمال الهندسي	7-3
131	اختبار منتصف الفصل	
132	احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة	7-4
139	احتمالات الحوادث المتنافية	7-5
146	دليل الدراسة والمراجعة	
149	اختبار الفصل	
150	الإعداد للاختبارات المعيارية	
152	اختبار تراكمي	
153A	ملحق الإجابات	

154A	مخطط الفصل 8	
154C	التقويم والمعالجة	
154D	تنوع التعليم	
154E	المحتوى الرياضي	
155	التهيئة للفصل 8	
156	استكشاف 8-1 معمل الجداول الإلكترونية: استقصاء المثلثات القائمة الخاصة	
157	الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية	8-1
165	الزوايا وقياساتها	8-2
171	الدوال المثلثية للزوايا	8-3
177	قانون الجيوب	8-4
184	توسع 8-4 معمل الهندسة: مساحة متوازي الأضلاع	
185	اختبار منتصف الفصل	
186	قانون جيوب التمام	8-5
192	الدوال الدائرية	8-6
199	تمثيل الدوال المثلثية بيانياً	8-7
206	الدوال المثلثية العكسية	8-8
212	دليل الدراسة والمراجعة	
217	اختبار الفصل	
220	اختبار تراكمي	
221A	ملحق الإجابات	

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (9)

العنوان	الدرس 5-1 حصتان	الدرس 5-2 (3) حصص	الدرس 5-3 حصتان	الدرس 5-4 (3) حصص
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> تعرف العبارات النسبية. تبسيط العبارات النسبية. تبسيط الكسور المركبة. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات الحدود. جمع عبارات نسبية وطرحها. 	<ul style="list-style-type: none"> تحديد خصائص دوال المقلوب من تمثيلها البياني. تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً. 	<ul style="list-style-type: none"> تمثيل دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية بيانياً. تمثيل دوال نسبية لها نقاط انفصال بيانياً.
المضردات	العبارة النسبية الكسر المركب		دالة المقلوب القطع الزائد خط تقارب خط تقارب رأسي خط تقارب أفقي	الدالة النسبية نقطة انفصال
تمثيلات متعددة	ص (16)		ص (29)	
مصادر الدرس	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (4) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (5) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (6) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (7) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (11)	السبورة التفاعلية، ص (19)	السبورة التفاعلية، ص (26)	عرض تقديمي، ص (33)
تنوع التعليم	ص (13, 17)	ص (20, 22)	ص (25, 27)	ص (33, 34, 37)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (31)

المجموع	المراجعة والتقييم	التدريس
22 حصة	4	18

توسع 5-4 حصة	الدرس 5-5 حصتان	الدرس 5-6 (3) حصص	توسع 5-6 حصتان
<p>معمل الحاسبة البيانية : تمثيل الدوال النسبية بيانياً</p> <ul style="list-style-type: none"> استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية. 	<p>دوال التغير</p> <ul style="list-style-type: none"> تمييز مسائل التغير الطردي والتغير المشترك وحلها. تمييز مسائل التغير العكسي والتغير المركب وحلها. 	<p>حل المعادلات والمتباينات النسبية</p> <ul style="list-style-type: none"> حل معادلات نسبية. حل متباينات نسبية. 	<p>معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات والمتباينات النسبية</p> <ul style="list-style-type: none"> استعمال الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات نسبية بيانياً أو باستعمال ميزة table.
	<p>التغير الطردي ثابت التغير التغير المشترك التغير العكسي التغير المركب</p>	<p>المعادلة النسبية المتباينة النسبية</p>	
		ص (50)	
<p>المواد الحاسبة البيانية</p>	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (8) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (9) دون ضمن فوق 	<p>المواد الحاسبة البيانية</p>
	تسجيل صوتي، ص (42)	آلة التصوير الرقمية، ص (48)	
	ص (42, 44)	ص (48, 50)	

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (53-56)
- اختبار الفصل ص (57)
- اختبار تراكمي ص (60, 61)

المعالجة

التشخيص

التقويم

التشخيصي

بداية الفصل 5

مخطط المعالجة، ص (9)

التهيئة للفصل 5، ص (9)

بداية كل درس

مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب

فيما سبق، والآن، لماذا؟

خلال كل درس وبعده

التقويم

التكويني

مستوى المعالجة 1

- تدريبات المهارات، الفصل 5
- تنوع التعليم
- تنوع الواجبات المنزلية
- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5

www.obeikaneducation.com

تحقق من فهمك، لكل مثال

تأكد

مسائل مهارات التفكير العليا

مراجعة تراكمية

أمثلة إضافية

تنبيه!

الخطوة 4، التقويم

الاختبارات القصيرة، ص (11, 12)

www.obeikaneducation.com

منتصف الفصل

مستوى المعالجة 1

- تدريبات المهارات، الفصل 5
- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5

www.obeikaneducation.com

اختبار منتصف الفصل، ص (31)

اختبار منتصف الفصل، ص (13)

www.obeikaneducation.com

نهاية الفصل

- تدريبات المهارات، الفصل 5
- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5

www.obeikaneducation.com

دليل الدراسة والمراجعة، ص (53-56)

اختبار الفصل، ص (57)

اختبار تراكمي، ص (60, 61)

www.obeikaneducation.com

بعد انتهاء الفصل 5

التقويم

الختامي

- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5

www.obeikaneducation.com

اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B، ص (15-20)

اختبار الفصل، النموذج 3، ص (21, 22)

اختبار المفردات، ص (14)

اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة، ص (23)

اختبار تراكمي، ص (24-26)

www.obeikaneducation.com

البديل 1

جميع المستويات دون فوق ضمن

المتعلمون المتفاعلون: قسم الطلبة إلى مجموعات رباعية. بما أن هناك عددًا من المهام المتعلقة بتمثيل دالة المقلوب التي على الصورة $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ بيانيًا. لذا اطلب إلى أفراد كل مجموعة اختيار المهمة التي تناسب كلاً منهم لتمثيل دالة مقلوب محددة بيانيًا، فعلى سبيل المثال يكون أحد الأعضاء مسؤولاً عن إيجاد قيمة كل من a, h, k ، وآخر مسؤولاً عن تحديد خطوط التقارب، وثالث مسؤولاً عن تحديد بعض النقاط الواقعة على التمثيل البياني للدالة، ورابع مسؤولاً عن تعيين النقاط وتمثيل الدالة بيانيًا.

المتعلمون المنطقيون: خلال شرحك وتوضيحك لأنواع التغير المختلفة، اطلب إلى الطلبة أن يكملوا الجدول الآتي ليساعدهم على فهم وتمييز كل نوع:

نوع التغير	المعادلة
طردي	
مشترك	
عكسي	
مركب	

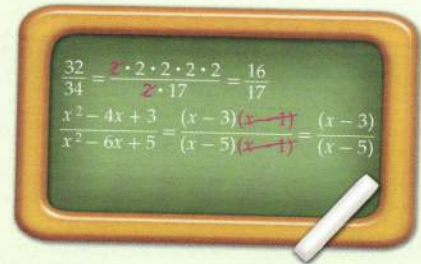
البديل 2

دون المتوسط دون

اكتب كلاً من الكسر والعبارة النسبية أدناه على السبورة:

$$\frac{32}{34}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5}$$



راجع مع الطلبة كيفية تبسيط الكسور، والتي تتم بقسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة بينهما، مع ملاحظة أن تكرار رقم في عددين لا يعني أن الرقم عامل مشترك لهما؛ فمثلاً لا يمكن اعتبار الرقم 3 عاملاً مشتركاً للعددين 32, 34. ثم شارك طلبة الصف في تبسيط العبارة النسبية، ووضح لهم أنه على الرغم من أن الحد x^2 يظهر في البسط والمقام إلا أنه ليس عاملاً مشتركاً بينهما؛ لأن x^2 هو حد في كل منهما وليس عاملاً مشتركاً. واستعمل الألوان لتوضيح العوامل المشتركة.

البديل 3

فوق المتوسط فوق

اكتب كسرًا وعبارة نسبية على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يجدوا كسرين يكون مجموعهما مساويًا للكسر الذي كتبه على السبورة. ثم اطلب إليهم أن يستعملوا طريقة التفكير نفسها لإيجاد عبارتين نسبيتين مجموعهما يساوي العبارة النسبية التي كتبتها أيضًا. وحتى تكون المهمة أكثر صعوبة وتحديًا اطلب إليهم أن يكتبوا عبارتين نسبيتين مقامهما مختلفان عن مقام العبارة التي كتبتها على السبورة، لكن مجموعهما يساوي هذه العبارة.

ملخص الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها

- سيطلب الطلاب في هذا الدرس ما تعلموه عن الكسور على العبارات النسبية (النسبة بين كثيرتي حدود).
- إيجاد أصفار مقام العبارة النسبية لاستثناء تلك القيم؛ لأنها تجعل العبارة غير معرّفة.
- تبسيط العبارات النسبية وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على العوامل المشتركة بينهما حتى يصبح القاسم المشترك لهما مساوياً للواحد مع مراعاة أن ناتج قسمة $(b - a)$ على $(a - b)$ هو -1 .
- تُضرب العبارات النسبية كما في الكسور الاعتيادية؛ إذ نضرب البسط في البسط، والمقام في المقام.
- تُقسم العبارات النسبية كما في الكسور الاعتيادية؛ إذ يُضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.
- تبسيط الكسر المركب؛ وذلك بكتابته أولاً على صورة قسمة عبارتين نسبيتين.

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها

- تشبه عملية جمع العبارات النسبية وطرحها جمع الكسور وطرحها، حيث نحتاج إلى إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرات حدود المقام؛ وذلك بتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها، ثم ضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر.
- تأكد من أن للعبارتين المقام نفسه. وإذا لم يكن لهما المقام نفسه فأوجد المضاعف المشترك الأصغر لمقامي العبارتين النسبيتين، وأعد كتابة كل منهما على صورة عبارة مكافئة مقامها المضاعف المشترك الأصغر.
- ناتج جمع عبارتين نسبيتين لهما المقام نفسه أو طرحهما هو عبارة نسبية مقامها هو المقام المشترك، وبسطها هو ناتج جمع أو طرح بسطي العبارتين.

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

- استعمال الخصائص: الإبدالية، التجميعية، التوزيعية لتبسيط العبارات الجبرية.
- تحديد المجال والمدى، ثم تحديد قيم المجال والمدى المنطقية وفقاً للموقف المعطى.
- حل مسائل تتضمن تناسبات.
- تمثيل بعض الدوال الأم (الرئيسة) بيانياً بما فيها الدوال الخطية.
- كتابة المعادلات وحلها بطرق مختلفة بما فيها طريقة التحليل.

الفصل 5

- تحديد خصائص دوال المقلوب وتمثيل تحويلاتها الهندسية بيانياً.
- استعمال قسمة كثيرات الحدود لوصف تمثيلات الدوال النسبية البيانية، وتحديد القيود على المجال والمدى لكل دالة واختبار سلوكها.
- تحديد قيم المجال والمدى المنطقية للدالة النسبية ضمن ظروف معينة، وإيجاد حلول المعادلات والمتباينات النسبية.
- تحليل المواقف التي يمكن تمثيلها بالمعادلات النسبية، ثم تحويلها إلى معادلة خطية أو تربيعية وحلها.
- استعمال التغير الطردي أو العكسي للتعبير عن مواقف معينة، وتكوين تخمينات مرتبطة بهذه المواقف.

ما بعد الفصل 5

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تحديد مجال الدوال ومداهما باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والرموز.
- استقصاء مفاهيم الاتصال، سلوك طرفي الدالة وخطوط التقارب، وربطها بدالة ممثلة بيانياً وعددياً.

العلاقات والدوال النسبية

- يوجد للدالة النسبية على الأكثر خط تقارب أفقي واحد هو:
 $y = 0$ ، عندما تكون درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$.

المستقيم الذي معادلته: $\frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$ ، عندما تكون درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$.

- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة النسبية.

ويمكن للطلبة استعمال خطوط التقارب مع جدول القيم لتمثيل الدالة النسبية بيانياً.

دوال التغير

- يعبر عن التغير الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ (يمكن كتابتها على الصورة $\frac{y}{x} = k$)، حيث k ثابت التغير. والتمثيل البياني لهذه المعادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ويميله يساوي k .
- تتغير y تغيراً مشتركاً مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $y = kxz$.
- يعبر عن التغير العكسي على الصورة $y = \frac{k}{x}$ (أو $xy = k$). والتمثيل البياني لهذه المعادلة على شكل قطع زائد.
- يحدث التغير المركب عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية

- تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر معادلة نسبية، ويمكن استعمال المهارات نفسها المستعملة في حل المعادلات الخطية لحل المعادلات النسبية بعد ضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات. ويجب التحقق من جميع الحلول التي نحصل عليها بتعويضها في المعادلة الأصلية لتحديد الحلول الدخيلة.
- يمكن استعمال المعادلات النسبية لحل المسائل المتعلقة بالوسط الموزون، حيث إن الوسط الموزون لمجموعة من القيم يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها مقسوماً على مجموع التكرارات. وهذه المسائل تتضمن ما يتعلق بالكيمياء، والعمل، والمسافة... إلخ.

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

دالة المقلوب هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ؛ حيث $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

التمثيلات البيانية لدوال المقلوب غير متصلة عند القيم المستثناة من مجال كل منها، وبعضها يكون له خط تقارب، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

- يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالة عندها غير معرفة.

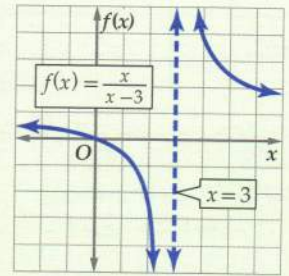
- يبين خط التقارب الأفقي سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب هي $f(x) = \frac{1}{x}$. ويمكن تطبيق تحويلات التمثيل على التمثيل البياني لدوال المقلوب.

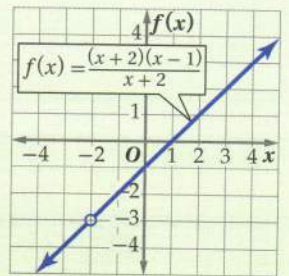
تمثيل الدوال النسبية بيانياً

الدالة النسبية هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

- وجود خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$



- وجود نقطة انفصال أو فجوة في التمثيل البياني، وتظهر هذه النقطة عند $x = c$ ، ويكون في هذه الحالة عاملاً من عوامل كل من البسط والمقام.



مشروع الفصل

رحلة بالطائرة

يستعمل الطلبة ما تعلموه عن الدوال النسبية والتغير لاستقصاء رحلة طائرة.

- اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية لإيجاد سرعة طائرة خلال رحلتها من الرياض إلى القريات، استعمل المعادلة $v = \frac{d}{t}$ ؛ حيث v : سرعة الطائرة، d : المسافة المقطوعة، t : زمن الرحلة.
- اطلب إليهم البحث عن المسافة بين الرياض والقريات، وإيجاد سرعة الطائرة إذا علمت أن زمن الرحلة ساعة ونصف الساعة. ثم اطلب إليهم حساب الزمن الذي تستغرقه هذه الطائرة في رحلة مسافتها 2476 km إذا سارت بالسرعة نفسها.

- اطلب إلى كل مجموعة أن تقدر الزمن الذي يحتاج إليه شخص للوصول إلى القريات بدءاً من لحظة انطلاقه من بيته في وسط مدينة الرياض، علماً بأنه سافر بالطائرة، مع الأخذ بعين الاعتبار الزمن اللازم لإنهاء الإجراءات (التفتيش، الجوازات، ...).

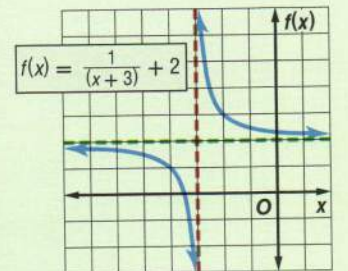
المفردات الأساسية قدم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي:

التعريف: خط التقارب هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

مثال: يوضح الشكل أدناه خطي التقارب عند $x = -3$ و $y = 2$.

سؤال: ما الذي يبينه خط التقارب الرأسي؟

يبين متى تكون الدالة غير معرفة.



فيما سبق:

درست حل المعادلات التربيعية؛ بالتحليل إلى العوامل، وبيانياً.

والآن:

- أتعرف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثل دوال نسبية بيانياً.
- أحل مسائل التغير الطردي والتغير المشترك والتغير العكسي والتغير المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

لماذا؟

سفر: يمكن استعمال الدوال النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، يمكن أن تستعمل العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقيق هدفك.



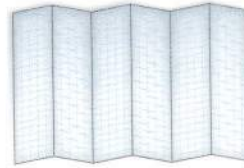
متنظم أفكار

المطويات

العلاقات والدوال النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال النسبية، مبتدئاً بورقة رسم بياني.

- اطو الورقة عرضياً ست طيات متساوية.
- اطو الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، اكتب عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.
- اكتب عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.

عنوان الدرس	تعريف	أمثلة	ملاحظات
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			
العلاقات والدوال النسبية			



8 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

متنظم أفكار

المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم أثناء دراستهم العلاقات والدوال النسبية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وحفّزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1
ضمن المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،

فقم: بمراجعة جمع الكسور الاعتيادية وطرحها، وحل المعادلات ذات الخطوة الواحدة، وحل التناسبات.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2
دون المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،

فقم: بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة سريعة

مثال 1

حل المعادلة: $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$ ، واكتب الحل في أبسط صورة.

المعادلة الأصلية $\frac{9}{11} = \frac{7}{8}r$

بضرب كلا الطرفين في العدد 8 $\frac{72}{11} = 7r$

بقسمة كلا الطرفين على العدد 7 $\frac{72}{77} = r$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 77، 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

العبارة الأصلية $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6، 4، 3 هو العدد 12 $= \frac{1}{3}(\frac{4}{4}) + \frac{3}{4}(\frac{3}{3}) - \frac{5}{6}(\frac{2}{2})$

بالتبسيط $= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} - \frac{10}{12}$

بالجمع، ثم بالطرح $= \frac{3}{12}$

بالتبسيط $= \frac{3 \div 3}{12 \div 3} = \frac{1}{4}$

مثال 3

حل تناسب: $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$

المعادلة الأصلية $\frac{5}{8} = \frac{u}{11}$

بالبضرب التبادلي $5(11) = 8u$

بالتبسيط $55 = 8u$

بقسمة كلا الطرفين على 8 $\frac{55}{8} = u$

بما أن العامل المشترك الأكبر للعددين 8، 55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

$u = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$

اختبار سريع

حل كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة.

(1) $x = \frac{15}{14} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{3}x$ (2) $m = \frac{56}{3} \cdot \frac{1}{8}m = \frac{7}{3}$

(3) $k = \frac{32}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{4}k$ (4) $p = \frac{63}{10} \cdot \frac{10}{9}p = 7$

(5) شاحنات: استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ ساعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لتراً من الوقود عند نهاية الرحلة، فما ساعة خزان وقود الشاحنة؟ 120 لتراً

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(6) $-\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{7}{8}$

(8) $\frac{29}{30} \cdot \frac{9}{10} - \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$ (9) $\frac{43}{6} \cdot \frac{10}{3} + \frac{5}{6} + 3$

(10) دقيق: تستعمل عليك $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $1\frac{1}{2}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوباً من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟ $2\frac{1}{6}$ أكواب

حل كل تناسب مما يأتي:

(11) $p = 27 \cdot \frac{9}{12} = \frac{p}{36}$

(12) $m = 12 \cdot \frac{9}{18} = \frac{6}{m}$

(13) $k = 17.5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{k}$

(14) تسوق: تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالاً، ودفع مبلغ 440 ريالاً بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالاً وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟ 280 ريالاً

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

Multiplying and Dividing Rational Expressions

المادة:

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال

$$T(d) = \frac{1700}{d-33}$$

أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالة النسبية $T(d)$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاءه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d-33}$ "عبارة نسبية".

بما أن المتغيرات في الجبر تمثل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{GCF} = 4$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-5)(x-1)} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$\text{GCF} = x-1$$

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

(a) بسِّط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)}$

$$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x-6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$$

بتحليل كل من البسط والمقام إلى عوامل

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$$

(b) متى تكون العبارة في الفرع (a) غير معرفة؟

بما أن مقام العبارة في الفرع (a) يحلّل إلى العوامل بالشكل: $(x-6)(x+3)(x-3)$ ،

فإن قيم x التي تجعل المقام صفرًا هي 3، -3، 6.

ولذا تكون العبارة غير معرفة عند $x = 3$ ، $x = -3$ ، $x = 6$.

تحقق من فهمك

بسِّط كل عبارة مما يأتي، وحدد متى تكون غير معرفة:

$$\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)} \quad (1B)$$

$$\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)} \quad (1A)$$

$$z = -5, z = 2, z = 1; \frac{2z(z+4)}{(z-1)}$$

$$y = -2, y = 3, y = 0; \frac{4(y+4)}{(y+2)}$$

10 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

تحليل كثيرات الحدود.

الدرس 5-1

تعريف العبارات النسبية.

تبسيط العبارات النسبية.

تبسيط الكسور المركبة.

ما بعد الدرس 5-1

حل المعادلات النسبية.

فيما سبق:

درست تحليل كثيرات الحدود.

والآن:

تعرف العبارات النسبية.

أبسط عبارات نسبية.

أبسط كسورًا مركبة.

المفردات:

العبارة النسبية

rational expression

الكسر المركب

complex fraction

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

GCF

الرمز (GCF) يمثل

اختصارًا لـ:

Greatest Common Factor

(العامل القاسم)

(المشترك الأكبر)

إرشادات للدراسة

لايجاد قيم x التي تكون

العبارة عندها غير

المعرفة، استعمل العبارة

المعطاة قبل تبسيطها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

• كيف تساعدك مفردة "العبارة النسبية"

على تحديد معناها؟

"نسبية" تشير إلى "النسبة".

• ما النسبة في الدالة:

$$\frac{1700}{d-33} \quad ? T(d) = \frac{1700}{d-33}$$

• ماذا نعني بقولنا إن العدد 6 هو العامل

(القاسم) المشترك الأكبر للعددين 12

و 30؟ 6 هو أكبر عدد صحيح يقسم كلاً

من 12 و 30 دون باق.

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (13)	• تنوع التعليم، ص (13، 17)	• تنوع التعليم، ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2 على اختيار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2 - 5x - 14)}{4x(x^2 + 6x + 8)}$ غير معرفة؟

- 0, -4, 7 D 0, -2, -4 C -2, 7 B -2, -4 A

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2 + 6x + 8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$ ؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B. والآن حلل المقام إلى عوامل.

$$4x(x+2)(x+4), \text{ إذن المقام يساوي } x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$ ، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

(2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2 + 8x + 12)}{-6(x^2 - 3x - 10)}$ غير معرفة؟ B

- 5, -2, -6 D 0, -2, -6 C 5, -2 B 5, 0, -2 A

إرشادات للاختيار

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

تبسيط العبارات النسبية

مثال 1 يبين طريقة تبسيط عبارة نسبية

وتحديد القيم التي تكون العبارة عندها غير معرفة.

مثال 2 يبين طريقة حذف بعض البدائل

للإجابة عن فقرة اختبار من نوع الاختيار من متعدد.

مثال 3 يبين طريقة تبسيط عبارة نسبية

بإخراج -1 كعامل مشترك من البسط أو المقام.

مثال 4 يبين طريقة ضرب العبارات النسبية

وقسمتها.

مثال 5 يبين طريقة تبسيط عبارات نسبية

تتضمن كثيرات حدود في كل من بسطها ومقامها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد

كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة

للمفاهيم.

أمثلة إضافية

(a) بسّط العبارة: $\frac{3y(y+7)}{(y+7)(y^2-9)}$ 1

$$\frac{3y}{y^2-9}$$

(b) متى تكون العبارة في الفرع (a)

غير معرفة؟

$$y = -7, y = -3, y = 3$$

مثال على اختبار: 2

ما قيم p التي تجعل العبارة:

$$\frac{p^2 + 2p - 3}{p^2 - 2p - 15}$$
 غير معرفة؟ B

$$3, -5 \quad \text{A}$$

$$5, 1, -3 \quad \text{D} \quad -3, 5 \quad \text{B}$$

بسّط كل عبارة مما يأتي: 3

$$-a \cdot \frac{a^4b - 2a^4}{2a^3 - a^3b} \quad \text{(a)}$$

$$\frac{-9x^2 - 3xy - y^2}{2} \cdot \frac{27x^3 - y^3}{2y - 6x} \quad \text{(b)}$$

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 11

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل السبورة

التفاعلية لتوضيح كيفية اختصار

العوامل المشتركة بين البسط

والمقام. اشطب العوامل المشتركة

عند تبسيط العبارة النسبية، ثم حرك

العوامل المتبقية للحصول على

العبارة في أبسط صورة.

تنبيه !

أخطاء مفاهيمية شائعة غالبًا ما يتم التعامل

مع العبارات النسبية بدون الإشارة إلى استثناء

القيم التي تجعلها غير معرفة؛ لأنه من المعروف

أن العبارة النسبية تشمل فقط القيم التي تكون

عندها العبارة معرفة.

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{3} \cdot \overset{1}{5} \cdot 7}{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{3}} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{3} \cdot 5}{\overset{1}{3} \cdot \overset{1}{3} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

والجدول الآتي يلخص قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

المحتوى الرياضي

تبسيط العبارات النسبية

إن المهارة الأساسية المطلوبة لضرب أو قسمة العبارات النسبية هي التبسيط. بعد تحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب في مقلوب المقسوم عليه، وضرب البسط في البسط، والمقام في المقام، ويتم إكمال الحل بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر لهما.

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$(a) \frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$$

بالتحليل إلى عوامل $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$

بإختصار العوامل المشتركة $= \frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{3} \cdot c \cdot \overset{1}{5} \cdot \overset{1}{3} \cdot c \cdot \overset{1}{d} \cdot \overset{1}{d}}{\overset{1}{5} \cdot \overset{1}{d} \cdot \overset{1}{2} \cdot \overset{1}{2} \cdot \overset{1}{2} \cdot a}$

بالتبسيط $= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$

بالتبسيط $= \frac{9c^2d}{4a}$

$$(b) \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$

بتجميع العوامل $= \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{b}{b^2}\right)$

باستعمال قوانين الأسس وإختصار العوامل المشتركة $= \left(\frac{\overset{1}{6} \times \overset{1}{3} \times \overset{1}{7} \times \overset{1}{5}}{\overset{1}{6} \times \overset{1}{2} \times \overset{1}{2}}\right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$

بالتبسيط $= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$

بالتبسيط $= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$

$= \frac{15y^2}{2xb}$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من إختصار العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام.

مثال إضافي

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$(a) \frac{1}{6x^2y} \cdot \frac{8x}{21y^3} \cdot \frac{7y^2}{16x^3}$$

$$(b) \frac{4dk^2}{m^4} \cdot \frac{10mk^2}{3c^2d} \div \frac{5m^5}{6c^2d^2}$$

إرشادات للمعلم الجديد

بناء على المعرفة السابقة وضح

لطالبة أن القسمة هي عملية ضرب في مقلوب المقسوم عليه، من خلال مناقشة مثلة بسيطة مثل: قسمة 18 كرة زجاجية على شخصين، تعني أن كل شخص يحصل على نصف عدد الكرات أو على 9 كرات زجاجية.

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$acd \frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d} \quad (4A)$$

$$\frac{2t^2}{9a^2bm^2} \cdot \frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2} \quad (4C)$$

$$\frac{7a^2}{15b^2x^3} \cdot \frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y} \quad (4B)$$

$$\frac{4x^3}{5a^2b^4y^2} \cdot \frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x} \quad (4D)$$

في بعض الأحيان عليك أن تحلل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

مثال 5

عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كل من بسطها ومقامها

بسّط كلًا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} \quad (a)$$

بالتحليل إلى عوامل $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{\cancel{(x - 8)} \cdot \cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x - 8)} \cdot \cancel{(x + 2)}} \cdot \frac{\cancel{x - 8}}{(x + 3) \cdot \cancel{(x + 2)}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{x + 3}$$

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} \quad (b)$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه $\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$

بالتحليل إلى عوامل

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{\cancel{(x + 4)} \cdot \cancel{(x - 4)}}{12 \cdot \cancel{(y + 3)}} \cdot \frac{\cancel{(y - 6)} \cdot \cancel{(y + 3)}}{\cancel{(x - 4)} \cdot (x - 8)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$

تحقق من فهمك

بسّط كلًا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{6x - 30}{(x + 3)^2} \cdot \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42} \quad (5B)$$

$$\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16} \quad (5A)$$

تبسيط الكسور المركبة الكسر المركب يتكون بسطه ومقامه أو أحدهما من كسور، والعبارات الآتية كسور مركبة:

$$\frac{\frac{c}{6}}{5d} \quad \frac{\frac{8}{x}}{x - 2} \quad \frac{\frac{x - 3}{8}}{\frac{x - 2}{x + 4}} \quad \frac{\frac{4}{a} + 6}{\frac{12}{a} - 3}$$

ولتبسيط كسر مركب، اكتبه أولاً على صورة قسمة عبارتين.

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 13

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات

الحدود عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ففي مثال 5a يظهر العامل $x - 8$ أربع مرات؛ لذا استعمل ذلك مرشداً عند تحليل كثيرات الحدود.

مثال إضافي

بسّط كلًا من العبارتين الآتيتين:

$$-1 \frac{k - 3}{k + 1} \cdot \frac{1 - k^2}{k^2 - 4k + 3} \quad (a)$$

$$\frac{2d + 6}{d^2 + d - 2} \div \frac{d + 3}{d^2 + 3d + 2} \quad (b)$$

$$\frac{2(d + 1)}{d - 1}$$

تنبيه !

تجنب الأخطاء: اطلب إلى الطلبة

أن يستبدلوا المتغيرات بأعداد كلية صغيرة، ثم يحسبوا قيمة العبارة قبل التبسيط وبعده، ويتأكدوا من تساوي القيمتين.

المحتوى الرياضي

القسمة على الصفر إذا اعتقد الطلبة

أن $\frac{6}{0} = 0$ ، فاستعمل تعريف حاصل

ضرب عددين (إذا كان $\frac{a}{b} = c$ ،

فإن $a = bc$)؛ لبيان أن اعتقاد الطلبة

خاطيء؛ لأن هذا الاعتقاد يقودنا إلى

المساواة $6 = 0 \cdot 0$ ، وهذا خطأ.

تنوع التعليم

دون ضمن

واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أسئلة تحقق من فهمك،

بتشجيعهم على كتابة خطوات الحل متتالية مع الحفاظ على تكافئها. ونبّههم إلى إجراء تغيير واحد فقط في الخطوة الواحدة.

إذا

فهم

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$$(a) \frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{a+b}{4} \div \frac{a^2+b^2}{4}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{a+b}{4} \cdot \frac{4}{a^2+b^2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{a+b}{\cancel{4}^1} \cdot \frac{\cancel{4}_1}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

$$(b) \frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$$

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \frac{x^2}{x^2-y^2} \div \frac{4x}{y-x}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{y-x}{4x}$$

بالتحليل إلى عوامل

$$= \frac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(-1)(x-y)}{4x}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$= \frac{x \cdot \cancel{x}^1}{(x+y)(x-\cancel{y})^1} \cdot \frac{(-1)(\cancel{x-y})^1}{\cancel{4x}^1}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-x}{4(x+y)}$$

تحقق من فهمك

بسط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$$(6B) \frac{-x-y}{y-7} \cdot \frac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$$

$$(6A) \frac{(2x-5)(x-2)}{(x+2)(x-4)(x-1)} \cdot \frac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$$

تأكد

بسط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$$(2) \frac{1}{3(c-d)} \cdot \frac{c+d}{3c^2-3d^2}$$

$$(1) \frac{x+3}{x+8} \cdot \frac{x^2-5x-24}{x^2-64}$$

- 3) اختيار من متعدد: حدد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرّفة. D -4, 7 C -7, 4, 7 B 4, 7 A -7, 4

$$(5) \frac{-x(a+b)}{y} \cdot \frac{a^2x-b^2x}{by-ay}$$

$$(4) \frac{-y+8}{y+5} \cdot \frac{y^2+3y-40}{25-y^2}$$

$$(7) \frac{3x}{2z^2} \cdot \frac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \frac{8z}{9xy^3}$$

$$(6) \frac{x^2-3x+9}{3} \cdot \frac{x^3+27}{3x+9}$$

تبسيط الكسور المركبة

مثال 6 يبين طريقة تبسيط كسر مركب بكتابتها على صورة قسمة عبارتين.

مثال إضافي

$$\frac{\frac{x^2}{9x^2-4y^2}}{\frac{x^3}{2y-3x}} = \frac{-1}{3x^2+2xy}$$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ساعد الطلبة على فهم أن ناتج قسمة $(x-y)$ على $(y-x)$ هو -1 ، وذلك بتوضيح أن إحدى هاتين العبارتين نظير جمعي للأخرى، تمامًا مثل 2 و -2 .

3 التدریب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+5)} \cdot \frac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x-4}{x^2-2x-35} \quad (9)$$

$$4 \cdot \frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2-3x}{x^2+3x-18}} \quad (11)$$

$$\frac{2x^2}{3aby^2} \cdot \frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b} \quad (8)$$

$$\frac{ab^2x}{y^3} \cdot \frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}} \quad (10)$$

$$\frac{(a-b)(a+1)}{12(a-1)} \cdot \frac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \frac{4a+4b}{a^2-1} \quad (12)$$

(13) يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)$ للتعبير عن حجم الصندوق المجاور الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



- (a) أوجد طول الصندوق وعرضه. **إجابة ممكنة: $3x + 4, 2x + 1$**
 (b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$. **إجابة ممكنة: 2: 5: 10**
 (c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكل قيم x ؟ **لا**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{y(y+1)}{2(y-4)} \cdot \frac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)} \quad (15)$$

$$\frac{x(x+6)}{x+4} \cdot \frac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12} \quad (14)$$

$$\frac{1}{x+8} \cdot \frac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)} \quad (17)$$

$$\frac{(x+3)(x-z)}{4} \cdot \frac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)} \quad (16)$$

- مثال 2 (18) اختيار من متعدد: حدد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرفة. D -6, 3, 4, 6 D C -6, 6 B 4, 6 A -6, 3

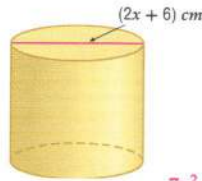
مثال 3 بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{x^2}{x+6} \cdot \frac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54} \quad (20)$$

$$-\frac{x+2}{x+4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2} \quad (19)$$

$$\frac{-3}{y^2+y+1} \cdot \frac{3-3y}{y^3-1} \quad (22)$$

$$-\frac{c+4}{c+5} \cdot \frac{16-c^2}{c^2+c-20} \quad (21)$$



(23) هندسة: إذا كان حجم الأسطوانة المجاورة $(x+3)(x^2-3x-18)\pi \text{ cm}^3$ فأوجد ارتفاعها. **$(x-6) \text{ cm}$**

الأمثلة 4-6 بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{7z^2}{18w^5y} \cdot \frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z} \quad (25)$$

$$\frac{c}{4ab^2f^2} \cdot \frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18a^3c^2f} \quad (24)$$

$$\frac{15y^3}{2xz} \cdot \frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2} \quad (27)$$

$$\frac{32b}{3ac^3f^2} \cdot \frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abc^2f} \quad (26)$$

$$\frac{c+2}{c(c-d)} \cdot \frac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \frac{c^2-8c}{c+d} \quad (29)$$

$$y+5 \cdot \frac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \frac{y^2-9y+18}{y^2-9} \quad (28)$$

$$\frac{\frac{x-y}{a+b}}{\frac{x^2-y^2}{b^2-a^2}} \quad (33)$$

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{b^3}}{\frac{b^2-ab}{a^2}} \quad (32)$$

$$\frac{\frac{y-x}{z^3}}{\frac{x-y}{6z^2}} \quad (31)$$

$$\frac{\frac{b-a}{x+y}}{\frac{-a^2(a+b)}{b^4}}$$

$$-\frac{6}{z} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{6(x+7)}$$

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 15

تنويع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
51-64, 48-49, 14-33	دون المتوسط
54-64, 48-50, 35-45, 34, 14-32 زوجي	ضمن المتوسط
34-64	فوق المتوسط

تنبيه لحل سؤال

قانون الحجم يحتاج الطلبة في السؤال 43 إلى معرفة قانون حجم منشور متوازي المستطيلات وهو: $V = Bh$ ، حيث B مساحة قاعدته، h ارتفاعه.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 47 الحاسبة البيانية وجدول القيم والتحليل لاستنتاج العلاقة بين العبارات النسبية والدوال النسبية.



الربط مع الحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

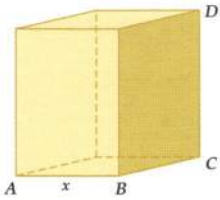
بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(35) \quad \frac{1}{4} \frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3} \quad (37) \quad \frac{x-2}{3(2x+1)} \cdot \frac{x^2-16}{3x^3+18x^2+24x} \cdot \frac{x^3-4x}{2x^2-7x-4}$$

$$(39) \quad \frac{18y^8}{5a^2cx^4} \cdot \left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2} \right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3} \quad (41) \quad \frac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5} \cdot \left(\frac{2x^2+7x+3}{x^2-4x-21} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{2xy^3}{3abc} \right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$$

$$(42) \quad \frac{4x^2-1}{3x^3-6x^2-24x} \cdot \frac{12x^2+12x-9}{-2x^2+5x+12} \quad (43) \quad \frac{2x^2+7x-30}{-6x^2+13x+5} \cdot \frac{4x^2+12x-72}{3x^2-11x-4}$$

(43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2 .



(a) أوجد طول الضلع \overline{BC} بدلالة x .

(b) إذا كان $DC = 3BC$ ، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x .

(c) أوجد حجم المنشور بدلالة x .

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(44) \quad \frac{x(x-2)(x+8)}{2(2x-1)(3x+1)} \cdot \frac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \frac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \frac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$$

$$(45) \quad \frac{(4x-1)^2(3x+1)(x+1)}{12(x+2)(x-4)(x^2-10x+6)} \cdot \frac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \frac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \frac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$$

$$(46) \quad \frac{-2(x-8)(x+4)(x-2)(x+1)}{(2x+1)^2(x^2+2x-6)} \cdot \frac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \frac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \frac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$$

(47) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال التمثيل البياني لدالة نسبية.

(a) جبرياً: بسّط العبارة: $x-1 \cdot \frac{x^2-5x+4}{x-4}$.

(b) جدولياً: إذا كانت $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$ ، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالة $g(x)$ المرتبطة بالدالة $f(x)$ ، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلتا الدالتين، حيث $0 \leq x \leq 10$.

(c) تحليلياً: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$ و $g(4)$ ، ثم وضع الفرق بين القيمتين.

(d) بيانياً: مثل كلاً من الدالتين بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، استعمل الميزة TRACE في الحاسبة البيانية لاكتشاف كلٍّ من التمثيلين البيانيين، واستعمل المفاتيح \blacktriangledown و \blacktriangle للانتقال بين التمثيلين، ثم قارن بينهما.

(e) لفظياً: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالة $g(x)$ ؟

(47c) $f(4)$ لا يمكن إيجادها؛ لأن الدالة غير معرفة عندما $x = 4$ ، أما $g(4) = 3$ فتساوي 3.

(47e) العبارة والدالة متكافئتان عند جميع قيم x ما عدا 4.

$$(38) \quad \frac{(3-x)(2x-1)}{(x+3)(2x+1)}$$

$$(40) \quad \frac{3bc^2}{8y^2}$$

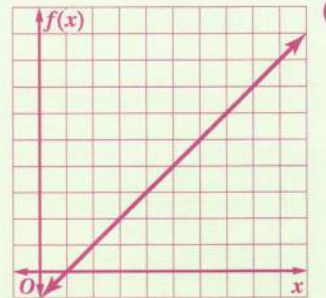
$$(41) \quad \frac{x-4}{-4(x-3)}$$

$$(42) \quad \frac{2x+1}{-9x(x+2)}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	0	1	2

x	4	5	6	7
$f(x)$	ERR	4	5	6
$g(x)$	3	4	5	6

x	8	9	10
$f(x)$	7	8	9
$g(x)$	7	8	9



(47d) يظهر التمثيلان البيانيان متطابقين على الحاسبة البيانية، إلا أن $f(x)$ غير معرفة عند $x = 4$ ، على حين أن $g(4) = 3$.

(48) إجابة ممكنة: العبارتان

متكافئتان إلا عندما $x = -3$

حيث تكون العبارة النسبية

غير معرفة.

(49) إجابة ممكنة: محمد،

أما علي فقد أخطأ عندما

ضرب مقلوب المقسوم

في المقسوم عليه بدلاً من

ضرب المقسوم في مقلوب

المقسوم عليه.

(48) تبرير: قارن بين كلٍّ من $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.(49) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$. أيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

$$\begin{aligned} \text{محمد} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4} \\ &= -\frac{x+y}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{علي} \\ \frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} &= \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x} \\ &= \frac{-4}{x+y} \end{aligned}$$

(50) تحدّ: ما قيمة y التي تجعل الجملة $x-2 = \frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائماً، عدا عند $x=6$ و $x=-3$ ؟ x^2+x-6

(51) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك. انظر الهامش "العبارة النسبية التي تتضمن متغيراً في المقام تكون معرفة لجميع الأعداد الحقيقية".

(52) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\frac{x-1}{x+4}$. إجابة ممكنة: $\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$ (53) اكتب: إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\frac{x^2+3x}{4x}$ هو $\frac{x+3}{4}$. فوضح لماذا لا تكون هذه العبارة معرفة لجميع قيم x ؟ انظر الهامش

تدريب علي اختيار

(54) احتمال: إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما

احتمال ظهور عدد أقل من 4؟ C

(55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{16-c^2}{c^2+c-20}$ ؟ D

A $\frac{4-c}{c-5}$ B $\frac{4-c}{c+5}$

C $\frac{c+4}{c+5}$ D $-\frac{c+4}{c+5}$

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{2}$ D $\frac{2}{3}$

مراجعة تراكمية

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(56) $\sqrt{x-8} + 5 = 7$ (الدرس 4-7) 12

(57) $\sqrt[3]{n+8} - 6 = -3$ (الدرس 4-7) 19

(58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (الدرس 4-6) $\frac{h+2h^{\frac{3}{2}}+1}{h-1}$

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 3-3)

(59) $10a - 2b$ (2a + 3b) + (8a - 5b) (60) $(x^2 - 4x + 3) - (4x^2 + 3x - 5)$ (61) $-3y - 3y^2$ (5y + 3y^2) + (-8y - 6y^2) $-3x^2 - 7x + 8$

(62) $6xy + 18x$ 2x(3y + 9) (63) $x^2 + 9x + 18$ (x + 6)(x + 3) (64) $x^3 - x^2 + x + 3$ (x + 1)(x^2 - 2x + 3)

الدرس 5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها 17

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يشرحوا كيف سيساعدكم ضرب العبارات النسبية وتبسيطها في جمعها وطرحها.

إجابات:

(51) إجابة ممكنة: صحيحة أحياناً؛ فالمقام

 $x^2 + 2$ مثلاً ليس له صفر حقيقي

وبالتالي تكون الدالة النسبية التي

مقامها $x^2 + 2$ معرفة لجميع الأعدادالحقيقية. أما الدالة التي مقامها x مثلاًفليست معرفة عند $x = 0$.

(53) إجابة ممكنة: العامل المشترك بين

البسط والمقام هو x مما يجعل العبارةغير معرفة عند $x = 0$.

تنبيه

اكتشف الخطأ: في السؤال 49

اطلب إلى الطلبة نسخ العبارة التي

بسّطها كل من علي ومحمد ووضع

دائرة حول المقسوم عليه، ثم إعادة

كتابتها كحاصل ضرب عبارتين

نسبيتين.

تنوع التعليم

ضمن

توسع: أعط الطلبة عبارات نسبية مثل $\frac{5x^2(x^2+3)}{5x(x+3)}$ ؛ لبناء قاعدة متينة لما سيتعلمونه عن هذه العبارات في الدروس

اللاحقة. واطلب إليهم أن يوضحوا بصورة مفصلة لماذا يمكن اختصار العدد 5 من البسط والمقام، على حين لا

يمكن اختصار العدد 3. وأسألهم: لماذا يمكن قسمة x^2 و x الموجودتين خارج الأقواس على x ، على حين لا يمكنقسمة x^2 و x الموجودتين داخل الأقواس على x ؟

يجب أن تتضمن إجابات الطلبة أنه يمكن قسمة البسط والمقام على العوامل المشتركة بين البسط والمقام، ولا يمكن

قسمة الحدود التي تكون أجزاءً من كثيرات حدود. ويمكنهم الوصول إلى هذه الاستنتاجات بتعويض عدد مثل 2

مكان x .



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 5

دون فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط الكسور المركبة، الكسر المركب من كسر بسيط ومقامه أو أحدهما عبارة نسبية، والتبسيط كسر مركب، كتبه أولاً على صورة نسبة عيارين.

تبسيط الكسر

$$\frac{3n-1}{3n^2+8n-3}$$

لذا العبارة على صورة نسبة عيارين

$$\frac{3n-1}{3n^2+8n-3} = \frac{3n-1}{n^2} \div \frac{3n^2+8n-3}{n^2}$$

ضرب الكسور في تقارب القسوم عليه

$$= \frac{3n-1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{3n^2+8n-3}$$

بالتفصيل في العمود والآخر

$$= \frac{3n-1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{(3n-1)(n+3)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{n^2}{n+3}$$

تدوين

بسط كل عبارة ما يأتي:

(1) $\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}$ (2) $\frac{xyx}{xyx}$ (3) $\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$ (4) $\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

(5) $\frac{1}{(x+3)(x+2)}$ (6) $\frac{x-4}{x^2+5x+9}$ (7) $\frac{b+2}{b^2-6b+8}$ (8) $\frac{1}{x+5}$

الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 7

دون

تدريبات إعادة التعليم (6)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط العبارات النسبية، أنشئ النسبة بين كثيري حدود عبارة نسبية، وعند تبسيط العبارة النسبية يقسم كل من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر (GCF) لها.

ضرب العبارات النسبية إذا كانت $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ عيارين نسبيين، حيث $a, b \neq 0, c, d \neq 0$ فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

لذا كانت $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ عيارين نسبيين، حيث $a, b \neq 0, c, d \neq 0$ فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

لذا كانت $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ عيارين نسبيين، حيث $a, b \neq 0, c, d \neq 0$ فإن $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

بسط كل عبارة ما يأتي:

(1) $\frac{24a^2b^2}{(2ab)^2}$ (2) $\frac{24a^2b^2}{(2ab)^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b} = \frac{3a}{2b}$

(3) $\frac{3a^2n^2 \cdot 20n^2}{5a^2 \cdot 9a^2n^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot n \cdot n \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot n \cdot n}{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot n \cdot n \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot n \cdot n} = \frac{2 \cdot 2 \cdot n \cdot n}{3 \cdot 3 \cdot a \cdot a} = \frac{4n^2}{9a^2}$

(4) $\frac{x^2+8x+16}{2x-2} \div \frac{x^2+2x-8}{x-1} = \frac{x^2+8x+16}{2x-2} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x-8} = \frac{(x+4)^2}{2(x-1)} \cdot \frac{x-1}{(x+4)(x-2)} = \frac{x+4}{2(x-2)}$

تدوين

بسط كل عبارة ما يأتي:

(1) $\frac{x-2}{x-9} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2-6x-27}$ (2) $\frac{3-2x}{3} \cdot \frac{4x^2-12x+9}{9-6x}$ (3) $\frac{2-2ab^2}{5}$

(4) $\frac{e}{c-5} \cdot \frac{c^2-3c}{c^2-25} \cdot \frac{c^2+4c-5}{c^2-4c+3}$ (5) $2m^2(m-1)$ (6) $\frac{3m^3-3m}{6m^2} \cdot \frac{4m^3}{m+1}$

(7) $\frac{y^2}{15a^2} \cdot \frac{6xy^2}{25a} \cdot \frac{18x^2}{2y}$ (8) $\frac{m(m-3)^2}{m^2-6m+9} \cdot \frac{m^2-9m}{m^2-9}$

الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 6

دون ضمن دون

تدريبات حل المسألة (9)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات حل المسألة

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

4 بقعة النفط: بينما كان سعيدة يملك برميل نفط بالقرب من بركة دائرية في مساحة منزله سقط البرميل والتسكب النفط في البركة. وانتشر النفط بصورة منتظمة فوق سطح الماء. إذا كان حجم النفط V ، وكان نصف قطر البركة r ، فاقب عبارة تمثل نصف بقعة النفط.

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

5 جوي، ركض سلمان من بينه إلى المركز التجاري لشراء الحليب. وبسبب الوزن الذي كان يحملة كانت سرعته في أثناء عودته أقل من سرعته في اتجاهه إلى السوق، وقد كانت سرعته في اتجاهه 3 متر لكل ثانية، وسرعته في العودة 5 متر لكل ثانية. وكانت المسافة بين بيته والمركز التجاري 100 متر.

(تذكر أن المسافة = السرعة \times الزمن).

اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه سلمان في هذه المهمة.

$$t = \frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2}$$

6 ارتفاع الواجهة الأمامية للمنزل في المخطط أدناه مثلثة الشكل. إذا كانت مساحة الواجهة $10 + 3x + 3x^2$ وكانت طول القاعدة، أي ارتفاع الواجهة يدلالة x .

$$h = \frac{2x^2+6x+20}{x}$$

الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 9

دون ضمن دون

تدريبات المهارات (8)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات المهارات

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

بسط كل عبارة ما يأتي:

(1) $\frac{3x}{2y} \cdot \frac{21x^2y}{14x^2y}$ (2) $\frac{5ab^3}{25a^2b^2}$ (3) $\frac{x^6}{x^2}$

(4) $\frac{8y^2(y^2)^3}{4y^2}$ (5) $\frac{9}{x-3} \cdot \frac{18}{2x-6}$ (6) $\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$

(7) $\frac{a-8}{a+4} \cdot \frac{3a^2-24a}{3a^2+12a}$ (8) $\frac{mf^2}{4} \cdot \frac{3m}{2f} \cdot \frac{f}{5}$ (9) $6g \cdot \frac{24g^2}{5f^2} \cdot \frac{10(gf)^3}{8g^2f}$

(10) $\frac{1}{2a^2(r-2)} \cdot \frac{5r^2}{r^2-4} \cdot \frac{r+2}{10r}$ (11) $\frac{1}{3g^2f^2} \cdot \frac{7g}{y^2} \cdot 21g^2$

(12) $\frac{32z^2}{35m^2y} \cdot \frac{80y^4}{49z^2c^2} \cdot \frac{25y^3}{14z^2m^2}$ (13) $x(x-2) \cdot \frac{3x}{x+2} \div \frac{3x}{x^2-4}$

(14) $\frac{q^2}{2(q-2)} \cdot \frac{q^2+2q}{6q} \div \frac{q^2-4}{3q^2}$ (15) $\frac{1}{6x} \cdot \frac{x^2-5x+4}{2x-8} \div (3x^2-3x)$

(16) $\frac{w^2-5w-24}{w+1} \cdot \frac{w^2-6w-7}{w+3} \div (w-8)(w-7)$ (17) $\frac{c^2y}{-5y} \cdot \frac{2d^2}{2cd} \cdot \frac{-c^2}{5d}$

الفصل 5: العلاقات والدوال النسبية 8

جمع العبارات النسبية وطرحها

Adding and Subtracting Rational Expressions



عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حد ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استقامة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler). ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعلاقة النسبية $f_s \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفيها، v سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

(LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين. ولإيجاد (LCM) لعددتين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلاً منها إلى عواملها الأولية أولاً، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

كثيرات الحدود

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$$

LCM لكثيرتي الحدود $2x^2 - 2$ ، $2x^2 - 2$ ، $x^2 - 3x + 2$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$$

$$\text{LCM هو } 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

الأعداد

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$$

LCM للعددين 6، 9

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

LCM هو $2 \cdot 3 \cdot 3$ يساوي 18

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

$$6xy, 15x^2, 9xy^4 \quad (a)$$

بالتحليل $6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$

بالتحليل $15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$

بالتحليل $9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

بالتبسيط LCM هو $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4$ ويساوي $90x^2y^4$

$$y^4 + 8y^3 + 15y^2, y^2 - 3y - 40 \quad (b)$$

بالتحليل $y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$

بالتحليل $y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$

بضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر LCM هو $y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$

$$4a(a - 4)(a - 5)(a + 1) \quad (1B)$$

تحقق من فهمك

$$4a^2 - 12a - 16, a^3 - 9a^2 + 20a \quad (1B)$$

$$120a^2b^3c^4, 12a^2b, 15abc, 8b^3c^4 \quad (1A)$$

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2

جمع عبارات كثيرات حدود وطرحها.

الدرس 5-2

إيجاد المضاعف المشترك الأصغر

(LCM) لكثيرات الحدود.

جمع عبارات نسبية وطرحها.

ما بعد الدرس 5-2

حل معادلات ومتباينات نسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

هل يمكن تبسيط العبارة: $\frac{v}{v - v_s}$ إلى

$$v \left(\frac{1}{1 - v_s} \right) \text{؟ وضح إجابتك.}$$

$$\text{لا؛ لأن } v \left(\frac{1}{1 - v_s} \right) = \frac{v}{1 - v_s}$$

هل تحتاج إلى المقام المشترك عند ضرب

$$f_s \text{ في } \frac{v}{v - v_s} \text{؟ لا}$$

LCM لكثيرات الحدود

مثال 1 يبين طريقة إيجاد المضاعف

المشترك الأصغر لمجموعة من كثيرات

الحدود.

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (20)	• تنوع التعليم، ص (20)	• تنوع التعليم، ص (22)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوجد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

جمع العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ ، حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$ ، فإن

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

طرح العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لطرح العبارات النسبية، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ ، حيث $b \neq 0$, $d \neq 0$ ، فإن $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(a) $20a^3c^6$, $15a^2bc^3$, $16b^5c^2$, $240a^3b^5c^6$

(b) $x^2 - 4x + 4$ و $x^3 - x^2 - 2x$
 $x(x+1)(x-2)^2$

جمع العبارات النسبية وطرحها

مثال 2 يبين كيفية جمع عبارتين نسبيتين مقام كل منهما وحيدة حد.

مثال 3 يبين كيفية طرح عبارتين نسبيتين مقام كل منهما كثيرة حدود.

المثالان 4, 5 يبينان كيفية تبسيط الكسور المركبة.

مثالان إضافيان

2 بسّط العبارة: $\frac{5a^2}{6b} + \frac{9}{14a^2b^2}$
 $\frac{35a^4b + 27}{14a^2b^2}$

3 بسّط العبارة: $\frac{x+10}{3x-15} - \frac{3x+15}{6x-30}$
 $-\frac{1}{6}$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

LCM هو $8x^3y^2$

بضرب الكسور

بجمع البسطين

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2} = \frac{3y}{2x^3} \cdot \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{5z}{8xy^2} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

$$= \frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$

$$= \frac{12y^3 + 5x^2z}{8x^3y^2}$$

تحقق من فهمك بسّط كلاً من العبارتين الآتيتين:

(2A) $\frac{8+9a^2bc}{10a^3b^2}$ و $\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$

(2B) $\frac{15a^5-128bx}{80a^3b^2}$ و $\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$

يستعمل LCM أيضاً لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بتحليل المقامين

بالتضرب في العوامل المفقودة

بطرح البسطين

بالتبسيط

بسّط العبارة: $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

$$\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6} = \frac{5}{6(x-3)} - \frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)} - \frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$

$$= \frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$

$$= \frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$

تحقق من فهمك بسّط كلاً من العبارتين الآتيتين:

(3A) $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$ و $\frac{x+7}{5(x+2)(x-3)}$

(3B) $\frac{3x+2}{(4x+1)(x+5)}$ و $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} + \frac{6}{12x+3}$

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها 19

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

تنبيه

تجنب الأخطاء: اطلب إلى الطلبة مناقشة الفرق بين جمع الكسور وضربها. ومن المهم أن يركزوا على أهمية إيجاد المقام المشترك عند الجمع، وليس عند الضرب.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اختر عدداً من الطلبة لحل الأمثلة أمام زملائهم في غرفة الصف باستخدام السبورة التفاعلية. وتأكد من أنهم يوضحون طريقة إيجاد LCM. ثم قم بتخزين هذه الأمثلة وإرسالها إلى سائر الطلبة.

من طرائق تبسيط الكسور المركبة تبسيط كل من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركبة بتبسيط كل من البسط والمقام على حدة

$$\text{بسط العبارة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

المقام المشترك الأصغر للبسط هو x
المقام المشترك الأصغر للمقام هو y

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

بتبسيط كل من البسط والمقام

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}} = \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

بكتابة العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$

بضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

بالتبسيط

تحقق من فهمك

بسط كلًا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{c^2 - d^2}{d^2 + 2cd} \quad \frac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{d}{c} + 2} \quad (4B)$$

$$\frac{xy - y^2}{x + y} \quad \frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \quad (4A)$$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كل من بسط العبارة ومقامها في LCM.

مثال 5 تبسيط الكسور المركبة بإيجاد (LCM) للمقامات

$$\text{بسط العبارة } \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}}$$

LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot xy}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot xy} = \frac{xy + y}{xy - x^2}$$

خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 4 و 5 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{c - d^2}{d + 6cd} \quad \frac{\frac{1}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{1}{c} + 6} \quad (5B)$$

$$\frac{xy + 2y}{3x - 4y} \quad \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{y} - \frac{4}{x}} \quad (5A)$$

$$\frac{a(a+b)}{b(a-b)} \quad \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 - \frac{b}{a}} \quad (5D)$$

$$\frac{x+y}{x-y} \quad \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \quad (5C)$$

مثالان إضافيان

$$\text{بسط العبارة } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b} - 1}$$

$$\frac{a+b}{a(1-b)} \text{ أو } \frac{a+b}{a-ab}$$

$$\text{بسط العبارة } \frac{2y - xy}{x - 3y} \quad \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{y} - \frac{3}{x}}$$

إرشادات للدراسة

حدود غير معرفة
تذكر أن هناك قيوداً
على المتغيرات في
المقام.

المحتوى الرياضي

العبارات المتكافئة توحيد المقامات
للعبارات النسبية استعداداً لجمعها أو
طرحها، لا يغير من قيمها؛ لأننا نقوم
بضرب هذه العبارات في إحدى صور
العدد 1 مثل:

$$\frac{y-3}{y-3} \text{ أو } \frac{6x}{6x}$$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبات في جمع العبارات النسبية وطرحها،

فالمطلب إليهم أن يعمل كل منهم مع زميله، على أن يمثل أحدهما دور المدرب والآخر دور المتدرب، ويقوم المتدرب بحل مسألة معينة باتباع خطوات الحل موضحاً أسلوب التفكير، على حين يستمع المدرب ويلاحظ الأخطاء ويصححها إذا كان ذلك ضرورياً، ثم يتبادل الطلبة الأدوار فيما بينهم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-17 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفله هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

أوجد LCM لكل مما يأتي: **مثال 1**

$$63a^2b^3c^4 \quad 7a^2, 9ab^3, 21abc^4 \quad (2) \quad 80x^3y^3 \quad 16x, 8x^2y^3, 5x^3y \quad (1)$$

$$x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4 \quad (4) \quad 3y(y-3)(y-5) \quad 3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15 \quad (3)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{35a^2 + 9b^3}{42a^3b} \cdot \frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3} \quad (6) \quad \frac{48y^4 + 25x^2}{20xy^3} \cdot \frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3} \quad (5)$$

$$\frac{7c^2y^2 - 12dx}{56c^4d^2} \cdot \frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d} \quad (8) \quad \frac{21b^4 - 2}{36ab^3} \cdot \frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3} \quad (7)$$

$$\frac{10y - 77}{(y-3)(y-9)} \cdot \frac{8}{y-3} + \frac{2y-5}{y^2 - 12y + 27} \quad (10) \quad \frac{9x + 15}{(x+3)(x+6)} \cdot \frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x+6} \quad (9)$$

$$\frac{11a + 40}{6(a+4)(a-4)} \cdot \frac{3a+2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a+24} \quad (12) \quad \frac{x-11}{3(x+2)(x-2)} \cdot \frac{4}{3x+6} - \frac{x+1}{x^2 - 4} \quad (11)$$

هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

$$\frac{3}{x-2} \cdot \frac{14x-10}{(x+1)(x-2)}$$

بسّط كل عبارة مما يأتي: **المثالان 4, 5**

$$\frac{2a+5b}{3b-8a} \cdot \frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}} \quad (17) \quad \frac{3y+2x}{xy+4x} \cdot \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}} \quad (16) \quad \frac{3y+2}{y+3} \cdot \frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}} \quad (15) \quad \frac{4x+2}{3x-2} \cdot \frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}} \quad (14)$$

تدرب وحل المسائل

أوجد LCM لكل مما يأتي: **مثال 1**

$$180x^2y^4z^2 \quad 4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2 \quad (19) \quad 120a^2bc^3d^4 \quad 24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3 \quad (18)$$

$$6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24 \quad (21) \quad x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30 \quad (20)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي: **المثالان 2, 3**

$$\frac{28by^2z - 9bx}{105x^3y^4z} \cdot \frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z} \quad (23) \quad \frac{15abc^3 + 2af}{72bc^4f^4} \cdot \frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3} \quad (22)$$

$$\frac{20x^2y + 120y + 6x^2}{15x^3y} \cdot \frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy} \quad (25) \quad \frac{25ab^3 + 9b^3 + 60a}{30a^2b^2} \cdot \frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2} \quad (24)$$

$$\frac{15b^3 + 100ab^2 - 216a}{240ab^3} \cdot \frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3} \quad (27) \quad \frac{240y + 20y^2 - 27}{90y^2} \cdot \frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2} \quad (26)$$

$$\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20} \quad (29) \quad \frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40} \quad (28)$$

$$\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18} \quad (31) \quad \frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8} \quad (30)$$

$$\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15} \quad (33) \quad \frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24} \quad (32)$$

أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$ ، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

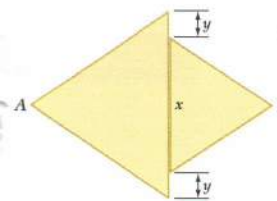
(a) بسّط الصيغة السابقة. $A = \frac{6.5t^2 + 20.4t + 234}{t^2 + 36}$
 (b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضيّ 30 min على تناوله الطعام. **7.2 تقريباً**

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها **21**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأستلة
دون المتوسط	58-73, 18-39
ضمن المتوسط	58-73, 55, 56, 41-53 فردي, 19-39 فردي
فوق المتوسط	40-73

(35) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلثين في الشكل المجاور متطابقين، وكانت مساحة المثلث الأصغر 200 cm^2 ، ومساحة المثلث الأكبر 300 cm^2 ، فأوجد البعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x ، y في أبسط صورة. $\frac{1000x + 800y}{x(x + 2y)}$



بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

$$(37) \frac{13x + 21}{-3x + 73} \cdot \frac{\frac{4}{x+5} + \frac{9}{x-6}}{\frac{5}{x-6} - \frac{8}{x+5}}$$

$$(36) \frac{5x + 6}{-x - 9} \cdot \frac{\frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x+3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$$

$$(39) \frac{-x^2 + 33x + 16}{12x^2 + 11x - 27} \cdot \frac{\frac{8}{x-9} - \frac{x}{3x+2}}{\frac{3}{3x+2} + \frac{4x}{x-9}}$$

$$(38) \frac{-2x^2 - 2x - 5}{x^2 + 14x - 4} \cdot \frac{\frac{5}{x+6} - \frac{2x}{2x-1}}{\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+6}}$$

(40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2 + 20}$ ، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بالآلاف البراميل سنويًا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

(a) بسّط الدالة $R(x) = \frac{260x^2 + 400}{3x^3 + 20x}$.

(b) ما معدل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟ 1730 برميل / سنة تقريبًا

أوجد LCM لكلٍّ ممّا يأتي:

$$(41) 420x^5y^4z^3, 12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$$

$$(42) -360a^4b^3c^2 - 6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$$

$$(43) x^2 - 5x - 24, x^2 - 9, 3x^2 + 8x - 3$$

$$(44) (x+3)(x-3)(x-8)(3x-1)$$

$$(45) \frac{360a^2 + 5a - 36}{60a^2} \cdot \frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$$

$$(46) \frac{15x^2 - 192x^2y^2 - 128y}{48x^2y^2} \cdot \frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$$

$$(47) \frac{5}{6x^2 + 46x - 16} + \frac{2}{6x^2 + 57x + 72}$$

$$(48) \frac{1}{8x^2 - 20x - 12} + \frac{4}{6x^2 + 27x + 12}$$

$$(49) 0 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$$

$$(50) \frac{x^2 + 2x - 29}{x^2 - 9x + 8} \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 9x + 8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$$

$$(51) \frac{5a - 11}{6} \cdot \frac{\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2 - 5a + 4}}$$

$$(52) \frac{1}{y-x} \cdot \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x+y)}$$

$$(53) \text{ هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعلاقة } \frac{x^2-9}{x-2}, \text{ ويُعطى طول مستطيل آخر بالعلاقة } \frac{x+3}{x^2-4}. \text{ أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة. } 1 : (x-3)(x+2)$$

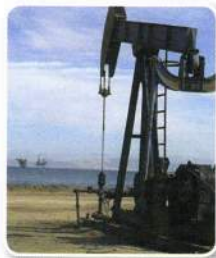
(54) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h.

(a) إذا كانت x تعبر عن السرعة الأولى بالأميال لكل ساعة، فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة. $\frac{10}{x}$

(b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة. $\frac{10}{x-2}$

(c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها. $\frac{20(x-1)}{x(x-2)}$

المثالان 4, 5



الربيط مع الحياة

يعد حقل الغوار أكبر حقول النفط في العالم، ويقع الجزء الأكبر منه في محافظة الأحساء، وبدأ الإنتاج فيه عام 1370 هـ. ويقدر إنتاجه حاليًا بحوالي 5 ملايين برميل يوميًا

تبييه لحل سؤال

واثين يحتاج الطلبة إلى معرفة قانون مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$ لحل السؤال 35.

ق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى ق رسم بياني لحل الأسئلة 65-73.

شهادات للمعلم الجديد

طوات تستعمل مهارات جمع العبارات سببية وتبسيطها التي تعلمتها في هذا درس على نحو مكثف في مواضيع الجبر. اخصص وقتًا كافيًا لمعالجة أخطاء الطلبة لأخطاء المفاهيمية قبل الانتقال إلى درس التالي.

$$(47) \frac{42x + 41}{6(3x-1)(x+8)(2x+3)}$$

$$(48) \frac{19x - 36}{12(2x+1)(x-3)(x+4)}$$

تنويع التعليم

فوق

توسّع كتابة العبارات النسبية باستعمال الكسور الجزئية هي مهارة جبرية مهمة تستعمل في كثير

من مواضيع الرياضيات المتقدمة بما فيها حساب التفاضل والتكامل. لذا، أعط الطلبة عبارة نسبية

مثل $\frac{5x+3}{x(x+1)}$ ، واسألهم: ما الكسرين اللذين يمكن جمعهما للحصول على هذه العبارة؟ فإذا استطاعوا تحديد x و $x+1$ على أنهما مقامان للكسرين الجزئيين فاطلب إليهم إيجاد قيمة كل من A و B التي تجعل

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

المعادلة صحيحة لأي قيمة لـ x عدا $0, -1$. $A = 3$ و $B = 2$.



الربط مع الحياة

يُوصف التصوير القريب عموماً بأنه القدرة على تصوير جسم ما على أن يكون حجم صورته أكبر مما يمكن عند طباعة الصورة بالبعدين $4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$.

(60) إجابة ممكنة: أولاً حلل مقام كل عبارة، ثم أوجد LCM للمقامات، واكتب العبارات بحيث يكون لها المقام نفسه (LCM) ثم اجمع أو اطرح البسوط، واكتب الناتج في أبسط صورة.

(55) تصوير: يحدد البعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، وجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$.

(a) اكتب y كدالة في المتغير x . $y = \frac{70x}{x-70}$
(b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

(56) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه يُعطى بالدالتين:

$$f(t) = \frac{2t}{3t^2 + 9t + 6}, \quad g(t) = \frac{3t}{2t^2 + 6t + 4}$$

(a) اجمع الدالتين لتحصل على دالة تمثل تركيز النوعين معاً في دم المريض. $h(t) = \frac{13t}{6t^2 + 18t + 12}$
(b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟ تقريباً 0.19

مسائل مهارات التفكير العليا

(57) تحدّد: بسّط العبارة $\frac{5x-2-\frac{x+1}{x}}{4x^3+18x^2-6x} \cdot \frac{4}{3-x^{-1}} + 6x^{-1}$. إجابة ممكنة: خاطئة؛
(58) تبرير: حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضّح إجابتك: x ما عدداً -2 و 3

$$\frac{6}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$$

(59) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدّ، على أن يكون LCM لهن يساوي $180a^4b^6c$.

(60) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

(59) إجابة ممكنة: $20a^4b^2c, 15ab^6, 9abc$

تدريب على اختبار

(61) إذا كان $4 = \frac{2a}{a} + \frac{1}{a}$ ، فما قيمة a ؟
(A) $-\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة ممّا يأتي: (الدرس 5-1)

$$(62) -\frac{4bc}{33a} - \frac{4ab}{21c} \cdot \frac{14c^2}{22a^2}$$

$$(63) 6y(x-y) \cdot \frac{x^2-y^2}{6y} \div \frac{x+y}{36y^2}$$

مثّل كل دالة ممّا يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداهما (مهارة سابقة 65-67) انظر الهامش

$$(65) y = -\sqrt{2x+1} \quad (66) y = \sqrt{5x-3}$$

مثّل كل دالة ممّا يأتي بيانياً: (الدرس 3-5) (68-73) انظر ملحق الإجابات

$$(68) y = 4(x+3)^2 + 1 \quad (69) y = -(x-5)^2 - 3$$

$$(70) y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 \quad (71) y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 5$$

$$(72) y = x^2 + 6x + 2 \quad (73) y = x^2 - 8x + 18$$

الدرس 5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها 23

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة توضيح كيف ساعدتهم الدرس السابق "ضرب العبارات النسبية وقسمتها" على جمع العبارات النسبية وطرحها؟

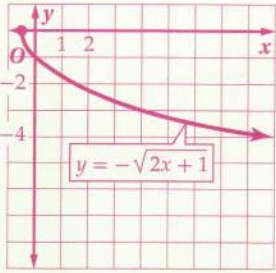
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-1، 5-2، باعطائهم:

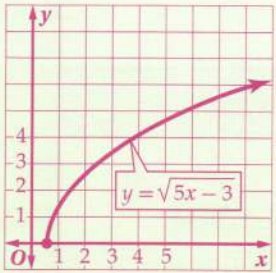
الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات إضافية:

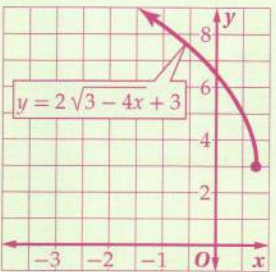
(65) المجال $\{x | x \geq -0.5\}$ ، المدى $\{y | y \leq 0\}$



(66) المجال $\{x | x \geq 0.6\}$ ، المدى $\{y | y \geq 0\}$



(67) المجال $\{x | x \leq 0.75\}$ ، المدى $\{y | y \geq 3\}$





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (12)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-2 تدريبات إعادة التعليم
جمع العبارات النسبية وطرحها

جمع العبارات النسبية وطرحها، اتبع الخطوات الآتية عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما:

الخطوة 1: أوجد المقام المشترك الأصغر (LCD)، وأعد كتابة العبارتين على أن يكون لها المقام نفسه.

الخطوة 2: أجمع البسطين أو طرحهما.

الخطوة 3: أجمع الحدود المتشابهة إن وجدت في البسط.

الخطوة 4: حلل البسط إن أمكن.

الخطوة 5: بسط إن أمكن.

مثال: بسط العبارتين: $\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4}$

الحل:

$$\frac{6}{2x^2+2x-12} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{6}{2(x+3)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

بمضروبين:

$$\frac{6(x+2)}{2(x+3)(x-2)(x+2)} - \frac{2 \cdot 2(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

LCD يساوي $2(x+3)(x-2)(x+2)$

طرح البسطين:

$$\frac{6(x+2) - 4(x+3)}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

تبسيط البسط:

$$\frac{6x+12-4x-12}{2(x+3)(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{2(x+3)(x-2)(x+2)}$$

بالتبسيط:

$$\frac{x}{(x+3)(x-2)(x+2)}$$

تعاريف:

بسط كلا من العبارتين الآتية:

(1) $\frac{y}{x} - \frac{7xy}{3x} + \frac{4y^2}{2y}$

(2) $\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1}$

(3) $\frac{4x+14}{3x+6} - \frac{3}{x+2} + \frac{4x+5}{3x+6}$

(4) $\frac{4x^2-9b^2}{3abx} - \frac{4a}{3bc} - \frac{15b}{5ac}$

(5) $\frac{4}{x+1} - \frac{3x+3}{x^2+2x+1} + \frac{x-1}{x^2-1}$

(6) $\frac{-2x^2+9x+4}{(2x+1)(2x-1)^2} - \frac{4}{4x^2-4x+1} - \frac{5x}{20x^2-5}$

الفصل 4: العلاقات والدوال النسبية

دون

تدريبات إعادة التعليم (11)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-2 تدريبات إعادة التعليم
جمع العبارات النسبية وطرحها

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود، لإيجاد (LCM) لكثيرات حدود أو أكثر، حلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية، ثم أهرّب القوى التي لها الأس الأكبر في كثيرات الحدود جميعها.

أوجد LCM لكثيرات الحدود:

مثال: $3m^2 - 3m - 6 = 3(m+1)(m-2)$
 $4m^2 + 12m - 40 = 4(m-2)(m+5)$
 $LCM = 12(m+1)(m-2)(m+5)$

أوجد LCM لكثيرات الحدود:

مثال: $16p^2q^3r, 40pq^2r^3, 15p^3r^3$

المضاعف المشترك الأصغر $LCM = 2^4 \cdot p^4 \cdot q^3 \cdot r^3$
 $40pq^2r^3 = 2^3 \cdot 5 \cdot p \cdot q^2 \cdot r^3$
 $15p^3r^3 = 3 \cdot 5 \cdot p^3 \cdot r^3$
 $LCM = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^4 \cdot q^3 \cdot r^3 = 240p^4q^3r^3$

تعاريف:

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود كما يأتي:

(1) $14ab^2, 42bc^2, 18a^2c$

(2) $8cd^3, 28c^2d, 35d^2f^2$

(3) $126a^2b^2c^3$

(4) $11m^2, 18m^2n^2, 20mn^2$

(5) $65xy, 10x^2y^2, 26y^3$

(6) $24p^2q, 30p^3q^2, 45pq^3$

(7) $130x^2y^3$

(8) $12xy^4, 42x^2y, 30x^3y^3$

(9) $600a^2b$

(10) $x^2 + 3x, 10x^2 + 25x - 15$

(11) $56mn^2, 24x^2y^3, 70y^2z^3$

(12) $22x^2 + 66x - 220, 4x^2 - 16$

(13) $9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8$

(14) $44(x-2)(x+2)(x+5)$

(15) $5x^2 - 125, 5x^2 + 24x - 5$

(16) $45x^2 - 6x - 3, 45x^2 - 5$

(17) $12xy^4, 42x^2y, 30x^3y^3$

(18) $39b^2c^2, 52b^2c, 12c^3$

(19) $420x^2y^4$

(20) $5x(x+3)(2x-1)$

(21) $9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8$

(22) $8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60$

(23) $8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60$

(24) $5(x-5)(x+5)(5x-1)$

(25) $45x^2 - 6x - 3, 45x^2 - 5$

(26) $15(5x+1)(3x-1)(3x+1)$

(27) $39b^2c^2, 52b^2c, 12c^3$

(28) $156b^2c^3$

(29) $600a^2b$

(30) $840x^2y^4$

(31) $9x^2 - 12x + 4, 3x^2 + 10x - 8$

(32) $(3x-2)^2(x+4)$

(33) $8x^2 - 36x - 20, 2x^2 + 2x - 60$

(34) $4(x-5)(x+6)(2x+1)$

(35) $3x^2 - 18x + 27, 2x^2 - 4x^2 - 6x$

(36) $6x(x-3)^2(x+1)$

الفصل 4: العلاقات والدوال النسبية

فوق

تدريبات حل المسألة (14)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-2 تدريبات حل المسألة
جمع العبارات النسبية وطرحها

(1) مربعات، يقابل ضلع المربع الكامل $4x^2$ ، ويقابل ضلع المربع الكامل $4x^2$ ، في حين أن $4x$ و $4x$ عدنان كيان. ما المربع الكامل الذي يقابل النسبة على كل من مربعي ضلعي ومضاد ضلعي كل منهما؟

(2) أوجد الكسور، يمكنك حساب الجهد الكبريتاني بين إلكترونين مستعملاً العبارتين $\frac{1}{(1-r)^2}$ و $\frac{1}{(1-r)}$ بسط هذه العبارتين.

(3) شبه منحرف، يتكون القطع العرضي المنقسط في الشكل أدناه من شكل شبه منحرف وضلعاً فوق بعضهما.

إذا علمت أن مساحة الشكل كائناً ما كان h و h_1 و h_2 مربعاً، فكتب عبارة نقل ارتفاع كل شبه منحرف بدلاً من h فقطراً أن لكل شبه منحرف الارتفاع نفسه، وكتب إجاباتك في أسطر صورة، (تذكر أن مساحة شبه المنحرف الذي ارتفاعه h وقاعدته b_1 و b_2 تساوي $\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$)

10.695 أمثلة الثانية

الفصل 4: العلاقات والدوال النسبية

دون

تدريبات المهارات (13)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-2 تدريبات المهارات
جمع العبارات النسبية وطرحها

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود كما يأتي:

(1) $12x, 6x^2d, 12x^2d$

(2) $18a^2bc^2, 24b^2c^2, 72a^2b^2c^2$

(3) $2x - 6, x - 3, 2(x-3)$

(4) $5a - n - 1, 5a(n-1)$

(5) $t^2 - 25, t + 5, (t+5)(t-5)$

(6) $x^2 - 3x - 4, x + 1, (x-4)(x+1)$

(7) $\frac{5x+3y}{xy}, \frac{3}{x} + \frac{5}{y}$

(8) $\frac{13}{8p^2r}, \frac{3}{8p^2r} + \frac{5}{4p^2r}$

(9) $\frac{2x+5}{3}, \frac{2x-7}{3} + 4$

(10) $\frac{2+5m^2}{m^2p}, \frac{2}{m^2p} + \frac{5}{p}$

(11) $\frac{7h+3g}{4gh^2}, \frac{7}{4gh} + \frac{3}{4h^2}$

(12) $\frac{12s-2y}{5y^2z}, \frac{12}{5y^2z} - \frac{2}{5y^2z}$

(13) $\frac{15bd-8b-2d}{3bd(3b+d)}, \frac{5}{3b+d} - \frac{2}{3bd}$

(14) $\frac{3m+7}{(m-3)(m+3)}, \frac{3}{m-3} - \frac{2}{m^2-9}$

(15) $\frac{5-3t}{x-2}, \frac{3t}{2-x} + \frac{5}{x-2}$

(16) $\frac{5x^2+4x-16}{(x-4)(x+1)}, \frac{4x}{x-4} + \frac{x+4}{x+1}$

(17) $\frac{2k}{k-n}, \frac{k}{k-n} - \frac{k}{n-k}$

(18) $\frac{3}{y^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{2}{y^2+1} + 8$

(19) $\frac{m+2}{m-3} + \frac{2m+2}{m^2-2m-3}$

(20) $\frac{y+12}{(y+4)(y-3)(y+2)}, \frac{3}{y^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{2}{y^2+1} + 8$

الفصل 4: العلاقات والدوال النسبية

تمثيل دوال المقلوب بيانياً Graphing Reciprocal Functions

لماذا؟

خطّطت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقررُوا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

فيما سبق:

- درست تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً.
- والآن:
- أحد خصائص دوال المقلوب.
- أمثل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

المضردالت:

- خط التقارب asymptote
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- دالة المقلوب reciprocal function
- القطع الزائد hyperbola

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً.

الدرس 5-3

تحديد خصائص دوال المقلوب.

تمثيل تحويلات دوال المقلوب بيانياً.

ما بعد الدرس 5-3

تمثيل الدوال النسبية بيانياً باستعمال

خطوط التقارب.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

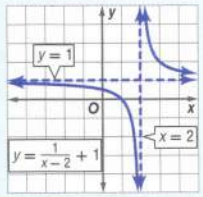
- علام يعتمد عدد الأيام التي يحتاج إليها الطلبة لجمع المبلغ؟ يعتمد على عدد الطلبة المشاركين في التبرع.
- ماذا يحدث لقيمة c كلما زادت قيمة n ؟ تقل.
- ما أصغر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة n ؟ 1
- ما أكبر عدد كلي يمكن أن يكون قيمة n ؟ عدد الطلبة جميعهم



خطوط التقارب الرأسية والأفقية خط التقارب لدالة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة. ولدالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ خط تقارب رأسي عند القيمة المستثناة من مجالها، وخط تقارب أفقي يبين سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

مفهوم أساسي

خطوط التقارب للدالة $y = \frac{a}{x-b} + c$
التعبير اللفظي: للدالة النسبية $y = \frac{a}{x-b} + c$ ، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفراً، أي أن خط التقارب الرأسي للدالة هو $x = b$ ، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.



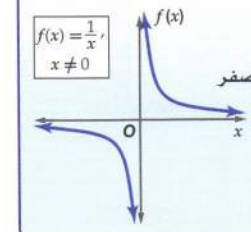
مثال:

وأما مجال الدالة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$ ، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$ ، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمة x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالة.

تمثل الدالة $c = \frac{5000}{n}$ دالة مقلوب، ودالة المقلوب التي سندرسها هي الدالة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x) \neq 0$ دالة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال المقلوب
 $f(x) = \frac{1}{x}$ ، الدالة الرئيسية (الأم)،
شكل التمثيل البياني: قطع زائد
المجال والمدى: جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب: $y = 0$ و $x = 0$
المقطعان: لا يوجد
تكون الدالة غير معرفة عندما: $x = 0$



مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (27)	• تنوع التعليم، ص (25, 27)	• تنوع التعليم، ص (25)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

مجال دالة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالة عندها معرفة.

فمثلاً الدوال: $h(x) = \frac{3}{x}$ ، $g(x) = \frac{4}{x-5}$ ، $f(x) = \frac{-3}{x+2}$:
غير معرفة عندما: $x = 0$ ، $x = 5$ ، $x = -2$

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 1 يبين طريقة إيجاد القيم التي تجعل الدالة النسبية غير معرفة.

مثال 2 يبين طريقة تمثيل دالة المقلوب بيانياً.

مثال 3 يبين طريقة تحديد خصائص دوال المقلوب.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

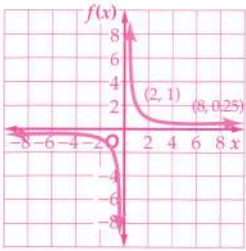
أمثلة إضافية

1 حدد قيم x التي تكون الدالة

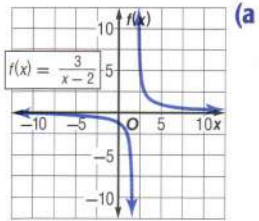
$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 24}$$

معرفة. $x = 3$ و $x = -8$.

2 مثل الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$ بيانياً.



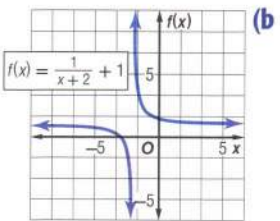
3 حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



خطوط التقارب: $x = 2$ و $y = 0$

$$\text{المجال} = \{x | x \neq 2\}$$

$$\text{المدى} = \{f(x) | f(x) \neq 0\}$$



خطوط التقارب: $x = -2$

$$\text{المجال} = \{x | x \neq -2\}; y = 1$$

$$\text{المدى} = \{f(x) | f(x) \neq 1\}$$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالة غير معرفة)

حدد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفراً.

$$2x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

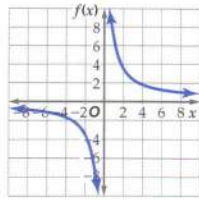
الدالة غير معرفة عندما $x = -\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

لكل دالة مما يأتي، حدد قيمة x التي تجعلها غير معرفة:

$$x = -\frac{2}{3} \quad f(x) = \frac{7}{3x+2} \quad (1B)$$

$$x = 1 \quad f(x) = \frac{2}{x-1} \quad (1A)$$



وقد لا تكون بعض القيم منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثل زمناً، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني.

تمثيل دالة المقلوب بيانياً

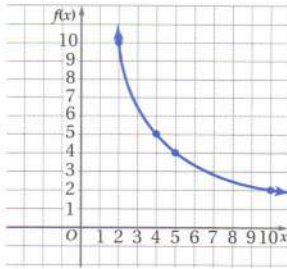
سفر: تمثل الدالة $f(x) = \frac{20}{x}$ بيانياً، حيث تمثل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكل شخص بالأقدام المربعة.

عدد الأشخاص x	المساحة المخصصة للشخص $f(x)$
10	2
5	4
4	5
2	10

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفراً أو سالباً، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x .

عَيّن النقاط $(10, 2)$ ، $(5, 4)$ ، $(4, 5)$ ، $(2, 10)$ في

المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحن. وبما أن الدالة غير معرفة عند $x = 0$ ، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x = 0$ أي أن منحنها يقترب من المستقيم $x = 0$ (المحور y) ولا يمسه، وبالمثل للدالة خط تقارب أفقي $y = 0$ (المحور x)؛ أي أن منحنها يقترب من المستقيم $y = 0$ ولا يمسه، لذا مد المنحنى الذي رسمته في اتجاه كلٍّ من المحورين x ، y الموجبين، ولكن دون أن يمسا أيًا منهما، كما هو مبين في الشكل المجاور.



انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

(2) مستطيل مساحته 18 cm^2 ، والدالة $l = \frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولهِ وعرضهِ. مثل هذه الدالة بيانياً.

الدرس 3-5 تمثيل دوال المقلوب بيانياً

تنويع التعليم

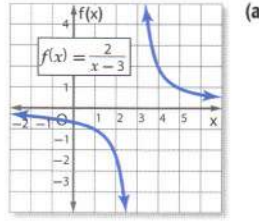
توسع اشرح الأفكار الآتية:

- نقول إن الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x في المجال. ويكون التمثيل البياني للدالة الزوجية متماثلاً حول المحور y .
 - نقول إن الدالة $f(x)$ دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x في المجال. ويكون التمثيل البياني للدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.
- وجّه السؤال الآتي إلى الطلبة: هل الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ فردية أم زوجية؟ فردية

ضمن فوق

مثال 3 تحديد خصائص دوال المقلوب

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



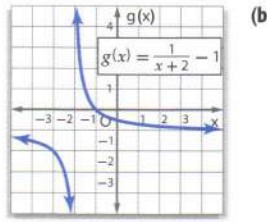
حدد قيمة x التي تكون الدالة $f(x)$ عندها غير معرفة.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$.

كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضاً. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.
مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.



حدد قيمة x التي تكون الدالة $g(x)$ عندها غير معرفة.

$$x + 2 = 0$$

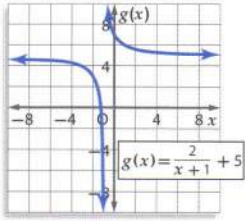
$$x = -2$$

$g(x)$ غير معرفة عند $x = -2$ ، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

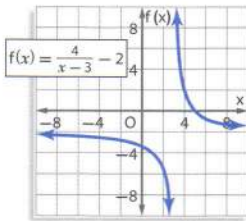
كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1 أيضاً، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$.
مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2. أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1.

تحقق من فهمك

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



(3B)



(3A)

$$y = -2 \text{ (3A)}$$

$$x = 3,$$

المجال = $\{x | x \neq 3\}$

المدى = $\{f(x) | f(x) \neq -2\}$

$$y = 5 \text{ (3B)}$$

$$x = -1,$$

المجال = $\{x | x \neq -1\}$

المدى = $\{g(x) | g(x) \neq 5\}$

26 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

المحتوى الرياضي

خطوط التقارب إن وجود خط تقارب لدالة معينة يعني أن هناك قيمة مفقودة لأحد المتغيرين. فخط التقارب الرأسي يعني أن هناك قيمة للمتغير x مستثناة من مجال الدالة، وكذلك خط التقارب الأفقي يعني أن هناك قيمة للمتغير y مستثناة من مداها.

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

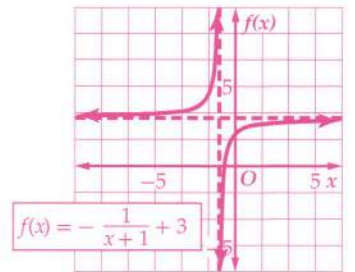
مثال 4 يوضح تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب.

مثال 5 يبين أن المجال المنطقي للدالة التي تمثل موقفاً من واقع الحياة هو جزء من مجال الدالة.

مثال إضافي

مثّل كلا من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال كل منهما ومداها:

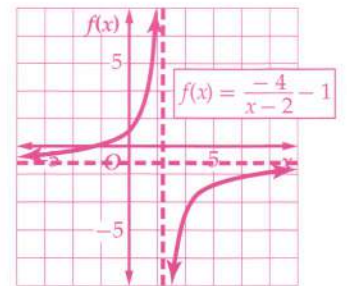
$$f(x) = -\frac{1}{x+1} + 3 \text{ (a)}$$



المجال = $\{x | x \neq -1\}$

المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 3\}$

$$f(x) = \frac{-4}{x-2} - 1 \text{ (b)}$$



المجال = $\{x | x \neq 2\}$

المدى = $\{f(x) | f(x) \neq -1\}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: اقترح على الطلبة أن يختاروا ورقة رسم بياني ذات تقسيمات كبيرة لمساعدتهم في ترقيم الإحداثيات بالأعشار؛ وذلك لتحديد النقاط ذات الإحداثيات المقربة إلى أقرب جزء من عشرة. وبين لهم أنهم قد لا يتمكنون من رؤية التمثيل البياني للدالة كاملاً إلا عند استعمالهم الآلة الحاسبة البيانية أو برنامجاً حاسوبياً.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية استعمل

برنامج رسم لعرض المستوى

الإحداثي ثم تمثيل الدالة $f(x)$ بيانياً.

واطلب إلى مجموعة من الطلبة

تمثيل الدالة $\frac{1}{f(x)}$ على السبورة كما يتخلونها.

ثم استعمل برنامج الرسم لتمثيل

الدالة $\frac{1}{f(x)}$ بيانياً، واطلب إليهم أن

يقارنوا إجاباتهم بالإجابة الصحيحة.

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك تحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على فهم التمثيل البياني لدوال المقلوب.

مفهوم أساسي

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

أضف إلى مطوبتك

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$$

k : إزاحة رأسية

إزاحة بمقدار k واحدة إلى أعلى إذا كانت k موجبة.
إزاحة بمقدار k واحدة إلى أسفل إذا كانت k سالبة.
خط تقارب أفقي عند $y = k$.
المجال: $\{x | x \neq h\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq k\}$

h : إزاحة أفقية

إزاحة بمقدار h واحدة إلى اليمين إذا كانت h موجبة.
إزاحة بمقدار h واحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.
خط تقارب رأسي عند $x = h$.

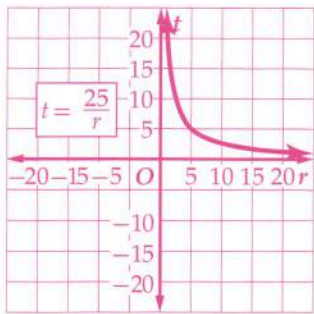
a : الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x .
- إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً (يتمدد في اتجاه المحور y).
- إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً (يتقلص في اتجاه المحور y).

مثال إضافي

5 **قطار:** تبلغ المسافة بين مدينتين 25 ميلاً، يقطعها أحد القطارات دون توقف.

(a) اكتب دالة تمثل الزمن الذي يستغرقه القطار لقطع هذه المسافة بدلالة السرعة، ثم مثل هذه الدالة بيانياً. $t = \frac{25}{r}$



(b) وضح أي قيود يمكن وضعها على كل من المجال والمدى في هذه الحالة. المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة هنا ليس لها معنى. وهناك قيد إضافي على المجال؛ لأن سرعة القطار قيمة عظمى وقيمة صغرى.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6-1 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

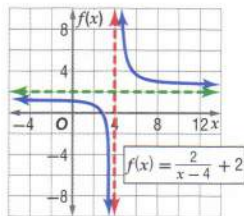
4 مثال

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منهما:

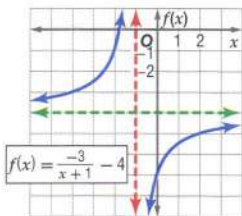
$$(a) f(x) = \frac{2}{x-4} + 2$$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
 $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسياً (يقترّب منحناه من المحور y).
 $h = 4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى اليمين.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$.
 $k = 2$: إزاحة التمثيل البياني وحدتين إلى أعلى.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 2$.
المجال: $\{x | x \neq 4\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq 2\}$



$$(b) f(x) = \frac{-3}{x+1} - 4$$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
 $a = -3$: ويتسع التمثيل البياني رأسياً (يقترّب منحناه من المحور y)، وينعكس حول المحور x .
 $h = -1$: إزاحة التمثيل البياني وحدة واحدة إلى اليسار.
يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$.
 $k = -4$: إزاحة التمثيل البياني 4 وحدات إلى أسفل.
يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -4$.
المجال: $\{x | x \neq -1\}$ ، المدى: $\{f(x) | f(x) \neq -4\}$



تحقق من فهمك (4A, 4B) انظر ملحق الإجابات

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منهما:

$$(4B) g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$$

$$(4A) f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$$

يمكن استعمال دوال المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانياً 27

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب بمحاذاة التمثيل البياني للدالة، وتتقاطع عند النقطة (h, k) .

إرشادات للدراسة

يعتمد الربع الذي يقع فيه منحنى الدالة على إشارة a ، فإذا كانت موجبة فإن المنحنى يقع في الربعين الأول والثالث، وإذا كانت سالبة فإن المنحنى يقع في الربعين الثاني والرابع.

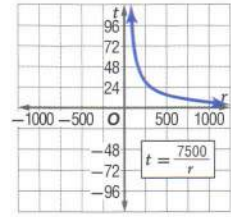
تنويع التعليم

الطلبة البصريون والمكانيون اطلب إلى الطلبة أن يمثلوا إحدى دوال هذا الدرس بيانياً على ورقة رسم بياني كبيرة الحجم؛ ليشاهدوا كيف يقترّب تمثيل الدالة البياني من خط التقارب ولا يمسه. وشجعهم على استعمال أفلام تلوين مختلفة لتوضيح الفكرة.



سفر: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

(a) اكتب دالة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r . ومثل هذه الدالة بيانياً. حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t .



المعادلة الأصلية $rt = d$

بقسمة كلا الطرفين على r $t = \frac{d}{r}$
 $d = 7500$ $t = \frac{7500}{r}$

مثل الدالة $t = \frac{7500}{r}$ بيانياً.

(b) وضح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صغرى تستطيع الطيران بها.

(5) انظر ملحق الإجابات

تحقق من فهمك

(5) رحلات: نظّم طلبة الصف الثاني الثانوي رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالاً رسم اشتراك، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالة تمثل متوسط التكلفة الكلية للطالب الواحد ومثلها بيانياً. ووضح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

(1) حدّد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{5}{4x-8}$ غير معرفة. الدالة غير معرفة عند $x = 2$

مثال 1

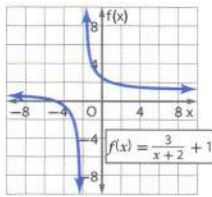
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها: 2, 3. انظر ملحق الإجابات

المثالان 2, 4

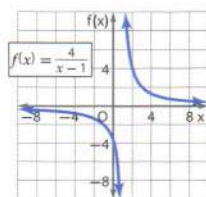
(2) $f(x) = \frac{5}{x}$ (3) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:

مثال 3



(5)



(4)

(6) هدية جماعية: يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالاً إلى أحد أصدقائهم.

مثال 5

(a) فإذا كانت c تمثل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، و f عدد الأصدقاء، فاكتب دالة تمثل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء. $c = \frac{150}{f}$

(b) مثل هذه الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات

(c) وضح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة. انظر إجابات الطلبة

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني يحتاج الطلبة إلى

ورق الرسم البياني لحل الأسئلة

2-6, 10-22, 24, 36, 38

الربط مع الحياة

الخطوط الجوية العربية

السعودية هي شركة

الطيران الرسمية في

المملكة، وتتخذ من

مطار الملك عبدالعزيز

الدولي بجدة مركزاً رئيساً

لعملياتها، وتقدم خدماتها

إلى أكثر من 75 وجهة في:

آسيا، أفريقيا، أوروبا، الشرق

الأوسط، أمريكا الشمالية.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في

السؤال 22 جدول القيم، والتمثيل البياني،

والتحليل اللفظي للمقارنة بين دالتي مقلوب

وتحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف

بينهما.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7-16, 20-24, 27-38
ضمن المتوسط	7-17 فردي، 21-25, 27-38
فوق المتوسط	16-38

حدد قيمة x التي تجعل كل دالة فيما يأتي غير معرفة.

مثال 1

$$x = -3 \quad f(x) = \frac{4}{3x+9} \quad (9) \quad x = 7 \quad f(x) = \frac{x}{x-7} \quad (8) \quad x = 0 \quad f(x) = \frac{5}{2x} \quad (7)$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها: (10-15) انظر ملحق الإجابات

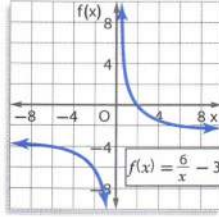
المثالان 2, 4

$$f(x) = \frac{2}{x-6} \quad (12) \quad f(x) = \frac{-4}{x+2} \quad (11) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (10)$$

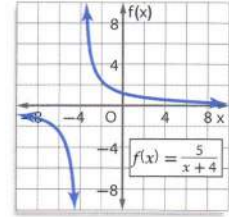
$$f(x) = \frac{9}{x+3} + 6 \quad (15) \quad f(x) = \frac{3}{x-7} - 8 \quad (14) \quad f(x) = \frac{-2}{x-5} \quad (13)$$

حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

مثال 3



(17)



(16)

$x = -4, y = 0$ (16)
المجال = $\{x | x \neq -4\}$
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$
 $x = 0, y = -3$ (17)
المجال = $\{x | x \neq 0\}$
المدى = $\{f(x) | f(x) \neq -3\}$

(18) **كيمياء:** لدى محمد 200 g من سائل مجهول. وتساعد معرفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

مثال 5

$$d = \frac{200}{v} \quad (a) \quad \text{اكتب دالة تمثل كثافة هذا السائل بدلالة حجمه.}$$

$v = 0, d = 0$ (18c)
المجال = $\{v | v \neq 0\}$
المدى = $\{d | d \neq 0\}$

(b) مثل هذه الدالة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

(c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالة.

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها: (19-21) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad (21) \quad f(x) = \frac{2}{4x+1} \quad (20) \quad f(x) = \frac{5}{3x} \quad (19)$$

(22) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

(a) جدولياً، أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالتين. (22a-d) انظر ملحق الإجابات

(b) بيانيًا، استعمل القيم في الجدول لتمثيل كلتا الدالتين بيانيًا.

(c) لفظياً، قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

(d) تحليلياً، اكتب تخميناً حول الفرق بين التمثيل البياني للدوال التي على الصورة $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ، عندما يكون n عدداً زوجياً، وعندما يكون n عدداً فردياً.

مسائل مهارات التفكير العليا

(23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مقلوب يكون تمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$ ، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$. إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x+4} + 6$

الدرس 5-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًا 29

4 التقويم

تعلم لاحق أسأل الطلبة كيف سيساعدهم التدريب على تمثيل دوال المقلوب في تمثيل الدوال النسبية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

(24a) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وخط تقارب أفقي عند $y = 0$. والمنحنى الثاني ناتج عن انسحاب مقداره 7 وحدات إلى الأعلى للمنحنى الأول وله خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وأفقي عند $y = 7$.

(24b) لكلا المنحنيين خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وخط تقارب أفقي عند $y = 0$. المنحنى الثاني تمتد للمنحنى الأول بعامل قدره 4.

(24c) المنحنى الأول له خط تقارب رأسي عند $x = 0$ وأفقي عند $y = 0$. المنحنى الثاني ناتج عن انسحاب للمنحنى الأول مقداره 5 وحدات باتجاه اليسار وله خط تقارب رأسي عند $x = -5$ وأفقي عند $y = 0$.

(25) إجابة ممكنة: $g(x)$; لأن كل الدوال الأخرى لا يوجد فيها متغيرات في البسط

(27) دوال المقلوب تساعد في معرفة عدد الأيام التي يحتاجها الطلبة لجمع مبلغ التبرع، أو لمعرفة عدد الطلبة المشتركين في التبرع. جزء التمثيل البياني الواقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المنطقي فقط؛ لأن كلاً من عدد الطلبة والمبالغ يجب أن يكون قيمًا موجبة.

(33) $(f + g)(x) = 2x$; $(f - g)(x) = 18$;
 $(f \cdot g)(x) = x^2 - 81$;
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+9}{x-9}, x \neq 9$

(34) $(f + g)(x) = 6x + 6$; $(f - g)(x) = -2x - 12$;

$(f \cdot g)(x) = 8x^2 + 6x - 27$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{4x+9}, x \neq -\frac{9}{4}$

(35) $(f + g)(x) = 2x^2 - x + 8$; $(f - g)(x) = 2x^2 + x - 8$; $(f \cdot g)(x) = -2x^3 + 16x^2$;

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}, x \neq 8$

(24) تبرير: قارن بين التمثيلين البيانيين لكل زوج من المعادلات الآتية موضحاً أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

$y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5}$ (c) $y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x}$ (a)

(d) استعمل ملاحظتك في الفروع a-c، لتمثيل الدالة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانياً دون استعمال جدول قيم. **(24a-c) انظر الهامش.**

(25) أيها لا ينتمي؟ حدد الدالة المختلفة عن الدوال الثلاث الأخرى، ووضح إجابتك. **انظر الهامش**

$j(x) = \frac{20}{x-7}$

$h(x) = \frac{5}{x^2 + 2x + 1}$

$g(x) = \frac{x+2}{x^2 + 1}$

$f(x) = \frac{3}{x+1}$

(26) تحذير: اكتب دالتي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكل منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثل هاتين الدالتين بيانياً. **انظر ملحق الإجابات**

(27) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضح كيف يمكن استعمال دوال المقلوب عند جمع التبرعات. وبين لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالة فقط منطقياً بالنسبة لسياق الموقف. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

(29) ما قيمة العبارة $(x+y)(x+y)$ ، إذا كانت

A $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$

4 A

7 B

13 C

16 D

(28) ما مجال الدالة $f(x) = \frac{8}{x+3}$ ؟ D

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3.

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-5)

$\frac{2x+y}{2x-y} \cdot \frac{x+y}{2x+y}$ (32)

$\frac{m+q}{m^2+q^2} \cdot \frac{m+q}{m^2+q^2}$ (31)

$-2p \cdot \frac{p^3}{2n} - \frac{p^2}{4n}$ (30)

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي: (الدرس 1-4) **(33-35) انظر الهامش**

$f(x) = 2x^2$ (35)

$f(x) = 2x-3$ (34)

$f(x) = x+9$ (33)

$g(x) = 8-x$

$g(x) = 4x+9$

$g(x) = x-9$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرس 1-3, 1-2) **(36-38) انظر ملحق الإجابات**

$f(x) = x^2 - 4$ (38)

$f(x) = |x - 5|$ (37)

$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ (36)

30 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون ضمن فوق المتوسط فوق المتوسط دون المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (17) - تامة

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 **تدريبات إعادة التعليم**
تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

تمويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

صورة المعادلة	$f(x) = \frac{a}{x} + b$ حيث الدالة الرئيسة (الألم) هي $f(x) = \frac{1}{x}$
إزاحة أفقية	ينقل خط التقارب الرأسي إلى $x = h$
إزاحة رأسية	ينقل خط التقارب الأفقي إلى $y = k$
انعكاس	ينعكس الشكل حول المحور x إذا كانت $a < 0$
تسقيع والتوسع	يقسّم التمثيل البياني رأسياً عندما $ a < 1$ ويتسع رأسياً عندما $ a > 1$

مثال: الدالة $f(x) = \frac{-2}{x+1} - 3$ بيانيًا وحدد مجالها ومدنها

التمثيل البياني لهذه الدالة يعبر عن تمثيل الدالة $f(x) = \frac{-2}{x+1} - 3$ يعكس التمثيل حول المحور x $a < 0$
 $|a| < 1$: يقسم التمثيل رأسياً
 $a = -1$: يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$
 $k = -3$: يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -3$
 المجال = $\{x \mid x \neq -1\}$ الذي $f(x) = \frac{-2}{x+1} - 3$

تعاريف

مثل كل دالة كما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومدنها:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ 2) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$ 3) $f(x) = \frac{-1}{x-3}$

المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$ الذي $f(x) = \frac{1}{x} + 1$
 المجال = $\{x \mid x \neq 2\}$ الذي $f(x) = \frac{-2}{x-2}$
 المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$ الذي $f(x) = \frac{-1}{x-3}$

4) $f(x) = \frac{1}{x+5} + 3$ 5) $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 2$ 6) $f(x) = \frac{-1}{x-3} + 4$

المجال = $\{x \mid x \neq -5\}$ الذي $f(x) = \frac{1}{x+5} + 3$
 المجال = $\{x \mid x \neq 1\}$ الذي $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 2$
 المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$ الذي $f(x) = \frac{-1}{x-3} + 4$

الفصل 4: العلاقات والمجموعات النسبية

تدريبات إعادة التعليم (16)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 **تدريبات إعادة التعليم**
تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة الرئيسة (الألم)	$y = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني	قطع زائد
المجال	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
الذي	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
التقاطع	مركز حلزوني المستقيم $x = y$
القطعان	لا يوجد
خط التقارب	المحور x والمحور y

مثال: حدد خطوط التقارب والمجال، والذي للدالة: $f(x) = \frac{3}{x+2} - 2$

من قيم x التي تكون عندما الدالة غير معرفة بمسار المقام بالصفر، $x = -2$ إذن $x = -2 = 0$
 فالدالة غير معرفة عندما $x = -2$ ، ولذا فإن لها خط تقارب رأسي عند $x = -2$
 وإن قيم $f(x)$ تقرب من الصفر كلما أصبحت قيم x عن -2 بلا حدود، وكلما زادت قيم x عن -2 بلا حدود أيضاً، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $f(x) = 0$
 مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2
 وأما مدنها فهي جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

تعاريف

حدد خطوط التقارب، والمجال، والذي لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = \frac{-3}{x-1}$ 3) $f(x) = \frac{4}{x+1} + 2$

خطوط التقارب: $x = 0$ ، المجال: $\{x \mid x \neq 0\}$ الذي $f(x) = \frac{1}{x}$
 خطوط التقارب: $x = 1$ ، المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$ الذي $f(x) = \frac{-3}{x-1}$
 خطوط التقارب: $x = -1$ ، $y = 2$ ، المجال: $\{x \mid x \neq -1\}$ الذي $f(x) = \frac{4}{x+1} + 2$

الفصل 4: العلاقات والمجموعات النسبية

تدريبات حل المسألة (19)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 **تدريبات حل المسألة**
تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

1) رحلة، استأجرت سيارة للعباب في رحلة، استأجرت السيارة بـ 375 ريالاً بالإضافة إلى 1.2 ريال لكل كيلو متر.
 اكتب معادلة تربط متوسط تكلفة لكل كيلومتر، واحد بعدد الكيلومترات المقطوعة.
 $C = \frac{375}{m} + 1.2$

2) عذرات، من المقرر أن تقام طائرة من طرازات في رحلة مسافتها 800 ميل إلى الدمام عند الوقت $t = 0$ وقد تأخر موعد الإقلاع ساعة واحدة.
 المعادلات $t = \frac{800}{v}$ و $t = \frac{800}{v} + 1$ تتلاقى سرعة الطائرة v على صورة دالة بالنسبة للزمن. مثل هاتين المعادلتين على المستوى الإحداثي أثناء عمل أن يمثل المحور الأفقي الزمن t ، ويمثل المحور الرأسي السرعة v ، ما العلاقة بين المنحنيين؟

3) علم الحياة، يعتبر عدد الأرباب في تجمع فائتمة للدالة: $P(t) = \frac{40}{t} + 10$ ، عل أن لكل $P(t)$ عدد الأرباب بعدد شهر، ماذا يحدث لعدد الأرباب على المدى البعيد؟
 يثبت عدد الأرباب عند 10 أرباب.

4) حاسب آلي، تشتت شركة تصنع أجهزة حاسب آلي مبلغ 20000 ريال على صورة أجور وتنفقات تشغيل، بالإضافة إلى 1740 ريالاً للقطع غيار كل جهاز.
 اكتب معادلة تربط متوسط تكلفة صنع جهاز الحاسب الواحد بعدد الأجهزة التي تصنعها الشركة.
 $C = \frac{20000}{n} + 1740$

5) مثل الدالة التي وجدتها في الفرج 5 بيانيًا.

6) ما الحد الأدنى لعدد أجهزة الحاسب الآلي التي ينبغي أن تصنعها الشركة حتى يكون متوسط تكلفة الجهاز الواحد أقل من 2740 ريالاً؟

الفصل 4: العلاقات والمجموعات النسبية

تدريبات المهارات (18)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 **تدريبات المهارات**
تمثيل دوال المقلوب بيانيًا

حدد خطوط التقارب، والمجال، والذي لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = \frac{-3}{x-1}$

خطوط التقارب: $x = 0$ ، $y = 4$ ، المجال: $\{x \mid x \neq 0\}$ الذي $f(x) = \frac{1}{x}$
 خطوط التقارب: $x = 1$ ، $y = 0$ ، المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$ الذي $f(x) = \frac{-3}{x-1}$

مثل كل دالة كما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومدنها:

3) $f(x) = \frac{-1}{x+3} - 3$ 4) $f(x) = \frac{-1}{x+5} - 6$

المجال = $\{x \mid x \neq -3\}$ الذي $f(x) = \frac{-1}{x+3} - 3$
 المجال = $\{x \mid x \neq -5\}$ الذي $f(x) = \frac{-1}{x+5} - 6$

5) $f(x) = \frac{-1}{x+1} + 3$ 6) $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$

المجال = $\{x \mid x \neq -1\}$ الذي $f(x) = \frac{-1}{x+1} + 3$
 المجال = $\{x \mid x \neq -4\}$ الذي $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$

الفصل 4: العلاقات والمجموعات النسبية

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13).

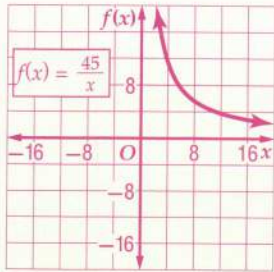
المطويات

متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 5-1 إلى 5-3 من خلال مطوياتهم.

إجابة

(22b)



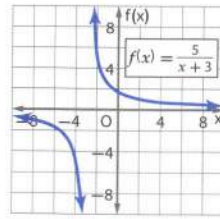
(16) سفر: سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 mi عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 mi/h.

(a) إذا كانت x تمثل السرعة الأولى، فاكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة. $\frac{50}{x}$ ساعة

(b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة. $\frac{50}{x-15}$ ساعة

(c) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة. $\frac{50(2x-15)}{x(x-15)}$

(17) حدد خطوط التقارب والمجال ومدى للدالة الآتية:



$x = -3, y = 0$

المجال = $\{x | x \neq -3\}$ ، المدى = $\{f(x) | f(x) \neq 0\}$

مثل كل دالة مما يأتي بياناً، وحدد مجال ومدى كل منها:

(18-21) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{6}{x-1} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{-2}{x} + 4 \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 5 \quad (20)$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2 \quad (21)$$

(22) شطائر: أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

(a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف. $f(x) = \frac{45}{x}$

(b) مثل هذه الدالة بياناً. انظر الهامش

$$\frac{(m+2)(m+5)}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2a^4b^2}{5} \cdot \frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c} \quad (2) \quad \frac{2y^4z}{9x^4} \cdot \frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y} \quad (1)$$

$$\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15} \quad (4) \quad \frac{2}{x+3} \cdot \frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18} \quad (3)$$

$$\frac{2y(y-2)}{3(y+2)} \cdot \frac{y^2-4}{3} \quad (6) \quad r+3 \cdot \frac{r^2+3r}{3r+3} \quad (5)$$

(7) اختيار من متعدد: إذا كانت $r \neq \pm 2$ ، فأَيُّ مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$ ؟ B

$$\frac{r+2}{r-4} \quad C \quad \frac{r-2}{r+4} \quad A$$

$$\frac{r+4}{r+2} \quad D \quad \frac{r+4}{r-2} \quad B$$

(8) اختيار من متعدد: ما قيم x التي تجعل العبارة

$$\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$$

$$\text{غير معرفة؟ } C \quad -3, -1, 9 \quad A \quad -3, -1 \quad B \quad -1 \quad D \quad -9, 1, 3 \quad B$$

(9) أوجد LCM لكثيرتي الحدود x^2-x-3 و $-3x(x-1)$.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

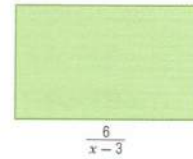
$$\frac{3y^2+2x}{6xy^3} \cdot \frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3} \quad (10)$$

$$\frac{9m^2+8-48mn}{12mn^2} \cdot \frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n} \quad (11)$$

$$\frac{5r-6}{(r-6)(r+3)(r-2)} \cdot \frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6} \quad (12)$$

$$\frac{3x}{x+y} \cdot \frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y} \quad (13)$$

$$\frac{x^2+4x-7}{2(x-4)(x+1)} \cdot \frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8} \quad (14)$$



(15) أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه. $\frac{18x-6}{(x-3)(x+1)}$

مخطط المعالجة

دون المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط	المستوى 1
أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا
أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصادر الآتية:	فاختر
تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).		مراجعة الدروس من 5-1 إلى 5-3.	
www.obeikaneducation.com		تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).	
		www.obeikaneducation.com	

تمثيل الدوال النسبية بيانياً Graphing Rational Functions

لماذا؟



اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالاً، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

$$C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$$

يمكن استعمال الدالة النسبية لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية والدالة النسبية هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالة النسبية بيانياً يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

فيما سبق:

درست تمثيل دوال المقلوب بيانياً.

والآن:

- أمثل بيانياً دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثل بيانياً دوال نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:

الدالة النسبية
rational function

نقطة الانفصال
point discontinuity

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

تمثيل دوال المقلوب بيانياً.

الدرس 5-4

تمثيل دوال نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية بيانياً.

تمثيل دوال نسبية لها نقاط انفصال بيانياً.

ما بعد الدرس 5-4

حل معادلات نسبية بيانياً.

2 التدريس

سئلة التعزيز

طلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

اسأل:

علام تعتمد تكلفة طباعة الصور؟

تعتمد على عدد الصور المطبوعة.

ماذا يحصل لقيمة الدالة $C(p)$ عندما تزداد

قيمة p ؟ تتناقص.

هل يمكن أن تكون قيمة $C(p)$ صفراً؟

نعم، يوجد صفر للدالة عندما

$p = \frac{-1350}{1.5}$. ولكن هذه القيمة السالبة

غير منطقية بالنسبة لهذا الموقف.

أضف إلى

مطوبك

مفهوم أساسي

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ ، $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما

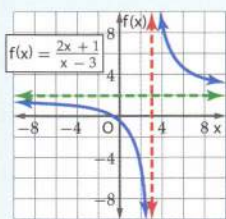
عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيسي لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيسي لـ } b(x)}$$

أمثلة:

يوجد خط تقارب أفقي واحد



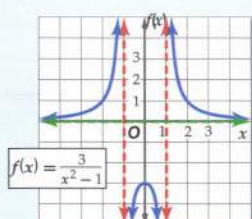
خط التقارب الرأسي:

$$x = 3$$

خط التقارب الأفقي:

$$y = 2$$

لا يوجد خط تقارب أفقي

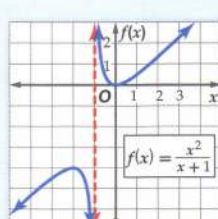


خطا التقارب الرأسي:

$$x = -1, x = 1$$

خط التقارب الأفقي:

$$y = 0$$



خط التقارب الرأسي:

$$x = -1$$

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (33, 37)	• تنوع التعليم، ص (33, 37)	• تنوع التعليم، ص (34, 37)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

يمكن استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالة النسبية بيانياً، كما يمكن استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالة.

مثال 1

التمثيل البياني لدالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانياً.

الخطوة 1، أوجد أصفار الدالة.

$$x^2 = 0 \quad a(x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين}$$

يوجد للدالة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 2، ارسم خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

$$x - 1 = 0 \quad b(x) = 0$$

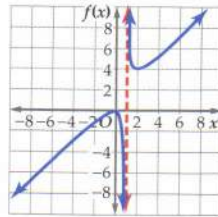
$$x = 1 \quad \text{بإضافة العدد 1 لكلا الطرفين}$$

يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x = 1$.

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالة.

الخطوة 3، مثل بيانياً.

أنشئ جدول قيم للدالة لتجد أزواجاً مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.



x	f(x)
-3	-2.25
-2	-1.33
-1	-0.5
0	0
0.5	-0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5

تحقق من فهمك

1) مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$ بيانياً. انظر الهامش

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مثال 1 يبين طريقة تمثيل دالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي.

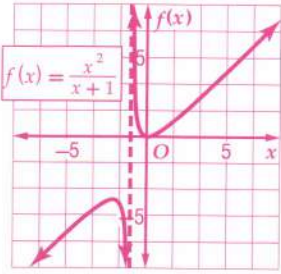
مثال 2 يبين أن المجال المنطقي للدالة التي تمثل موقفاً من واقع الحياة هو جزء من مجال الدالة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

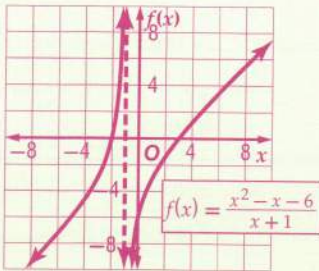
مثال إضافي

1 مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ بيانياً.



إجابة (تحقق من فهمك):

1



تنويع التعليم

المتعلمون اللغويون / اللغويون اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا قائمة من الإرشادات لمساعدة أي شخص يريد أن يمثل دالة نسبية بيانياً.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلبة إظهار خطوات تمثيل دالة نسبية بيانياً من خلال عرض تقديمي بعد أن يصفوا كيف يمكنهم إيجاد خطوط التقارب، مع استعمال جدول القيم لتمثيل الدالة.

ضمن



الربط مع الحياة

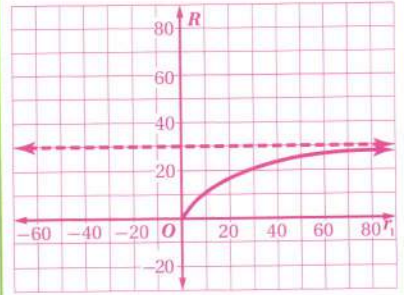
تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

مثال إضافي

متوسط السرعة: استعمل

المعادلة في مثال 2 للإجابة عن الفقرات الآتية:

(a) مثل الصيغة بيانياً عندما $r_2 = 15 \text{ mi/h}$



(b) ما مقطع المحور R؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

(c) ما قيم المجال والمدى المنطقية

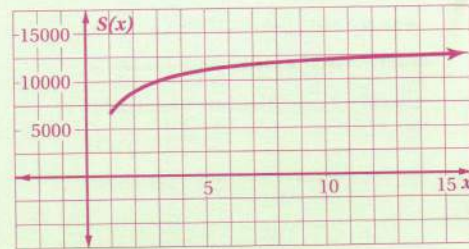
في سياق هذه المسألة؟ قيم r_1 الأكبر من أو تساوي صفراً، أما قيم R فتتراوح بين 0، 30.

المحتوى الرياضي

نقطة الانفصال بما أن الانفصال يكون عند نقطة والنقطة ليس لها أبعاد فإننا نضع دائرة مفرغة على التمثيل البياني لتوضيح نقطة الانفصال.

إجابة (تحقق من فهمك):

(2) سنوات الخبرة تبدأ من سنة وراتب الموظف يبدأ 6875 ريالاً وخط التقارب الأفقي يدل على أن سقف راتب الموظف لا يتعدى 13500 ريال.



متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها $r_1 \text{ mi/h}$. وخلال عودته

إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها $r_2 \text{ mi/h}$. ويُعطى مقدار متوسط سرعة

$$R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

(a) إذا كان r_1 هو المتغير المستقل، و R هو المتغير التابع، فمثل الصيغة بيانياً عندما $r_2 = 10 \text{ mi/h}$.

$$R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + 10} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$$

وتكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

وخط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثل خطي التقارب والدالة بيانياً.

(b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

(c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

تحقق من فهمك

(2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثل هذه الدالة بيانياً. وحدد القيم المنطقية لمجال الدالة ومداهما في سياق المسألة، وعلى

ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟ انظر الهامش

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقاط ومعرفة حولها.

مفهوم أساسي

نقطة الانفصال

التعبير اللغوي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث

$b(x) \neq 0$ ، وكان $x - c$ عاملاً

مشاركاً بين $a(x)$ و $b(x)$ ، فإنه

توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

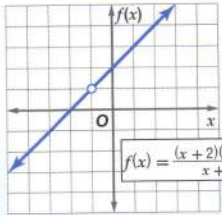
$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$

$$= x + 2, \quad x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$

مثال،



تنوع التعليم

فوق

توسّع حفّز الطلبة ليفسروا قواعد إيجاد خطوط التقارب الأفقية؛ لأنّ الدرس يذكر هذه القواعد ويترك تفسيرها للطلبة ذوي القدرات العليا. ثمّ دعم هذه المهمة بأن تطلب إليهم اختبار أشكال مختلفة من التمثيلات البيانية لدوال نسبية تتغير فيها درجات كثيرات الحدود في كلّ من البسط والمقام، ومن ثمّ البحث عن أنماط معينة لهذه الخطوط.

مثال 3 التمثيل البياني للدالة تتضمن نقطة انفصال

مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانياً .

لاحظ أن مجال الدالة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو نفسه

التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ ، مع وجود فجوة في

التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ عندما $x = 4$.

تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} \quad (3A)$$

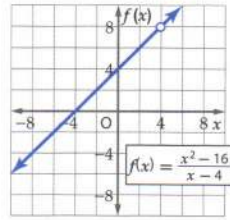
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 9} \quad (3B)$$

تنبيه!

فجوات التمثيل البياني تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة.

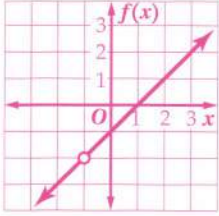
نقط الانفصال

مثال 3 يوضح طريقة تمثيل الدالة بيانياً عند وجود نقطة انفصال لها.



مثال إضافي

3 مثل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ بيانياً.



تأكد

1 مثال مثل الدالتين الآتيتين بيانياً: (1, 2) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1} \quad (1)$$

3 **كرة سلة** في بداية تدريب لفرقة كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثلة بالدالة $P(x) = \frac{7+x}{11+x}$ ، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

(a) مثل هذه الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات

(b) أي جزء من التمثيل البياني للدالة منطقي في سياق المسألة؟ الجزء الواقع في الربع الأول من

المستوى الإحداثي

(c) ماذا يمثل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

(d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

3 مثال مثل كل دالة مما يأتي بيانياً: (4, 5) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} \quad (4)$$

(3c) يمثل النسبة المئوية للأهداف التي سجلها في بداية التدريب وهي 63.6%.

(3d) $y = 1$ وهو يمثل نسبة 100% ولا يمكن الوصول إليها؛ لأنه

أضع 4 أهداف من البداية .

التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني تحتاج الأسئلة

1-18, 22-25, 32-34 إلى ورق رسم بياني

لتمثيلها بيانياً.

تدرب وحل المسائل

1 مثال مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً: (6-13) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 1} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{6x + 12} \quad (6)$$

2 مثال مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

$$f(x) = \frac{1}{(x + 4)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{5}{(x - 1)(x + 4)} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x}{x + 2} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 1} \quad (13)$$

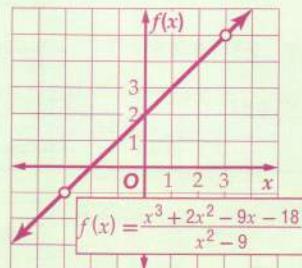
$$f(x) = \frac{4}{(x - 2)^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{2x}{(x + 2)(x - 5)} \quad (11)$$

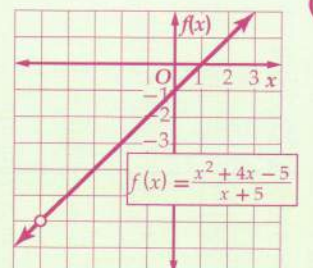
الدرس 5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانياً 35

إجابات (تحقق من فهمك):

(3B)



(3A)



14 كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطي شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1, R_2, R_3 المقاومات بالأوم.

(a) إذا كان R_1 هو المتغير المستقل، و I هو المتغير التابع، فمثل المعادلة بيانياً عندما تكون

$$V = 120 \text{ v}, R_2 = 25 \Omega, R_3 = 75 \Omega \quad \text{انظر ملحق الإجابات}$$

(b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1 ، ومقطع المحور I للتمثيل البياني.

(c) أوجد قيمة I عندما تكون $R_1 = 140 \Omega$. **0.5 Amp** **14b** $R_1 = -100$

(d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟ **1.2** $R_1 \geq 0, 0 < I \leq 1.2$ لا يوجد تقاطع مع المحور R ، مقطع I هو 1.2

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً: **15-18** انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8} \quad (17)$$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

لا يوجد خط تقارب نقطة انفصال عند $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$ (21) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$ (20) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$ (19)

22 اتصالات: اشترى أحمد هاتفاً محمولاً مزوداً بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 300 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهرياً لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، و ثمن خدمة الإنترنت. **22a** انظر الهامش

(a) اكتب دالة نسبية تمثل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهراً من شراء الهاتف، ومثلها بيانياً.

(b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالة؟ $x = 0, y = 400$

(c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

(d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالاً؟ **30 شهراً**

22c لأن عدد الأشهر ومتوسط

التكلفة الشهرية لا يمكن أن تكون قيمًا سالبة $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$ (24) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$ (23)

مسائل مهارات التذكير العليا

25 مسألة مفتوحة: مثل بيانياً بشكل تقريبي دالة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$ ، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$. انظر ملحق الإجابات

26 تحدد: اكتب دالة نسبية لها التمثيل البياني المجاور.

27 تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالتين:

$$f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$$

التمثيل البياني للدالة $g(x)$ فيه فجوة عند $x = -3$.

مثال 3

19 معادلة خط التقارب

الرأسي $x = -5$ ، ونقطة انفصال عند $x = -4$

20 معادلة خطي التقارب

الرأسيين $x = -3, x = 0$ ، لا يوجد نقطة انفصال



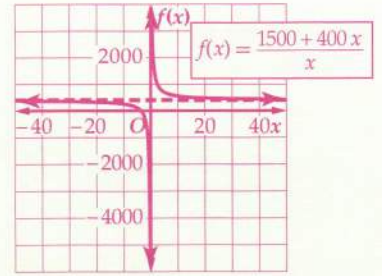
الربط مع الحياة

تطورت تقنية الاتصالات بشكل مطرد في الآونة الأخيرة، فأصبح بالإمكان الاتصال عبر الإنترنت من أي مكان في العالم، عن طريق الهاتف المحمول. وفي المملكة أكثر من مزود لهذه الخدمة.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (26)$$

إجابة:

$$f(x) = \frac{1500 + 400x}{x} \quad (22a)$$



تنوع الواجبات المنزلية

الأستلة

المستوى

27-39, 25, 6-18

دون المتوسط

27-39, 22-25, فردي, 7-17

ضمن المتوسط

22-39

فوق المتوسط

إجابة ممكنة:

$$f(x) = \frac{x}{a-b} + c \quad (28)$$

$$= \frac{x}{a-b} + \frac{c(a-b)}{(a-b)}$$

$$= \frac{x + ca - cb}{a-b}$$

(28) برهان: إذا علمت أن الدالة النسبية هي دالة على الصورة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$ ، فأثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالة نسبية.

(29) اكتب: وضع كيف يمكن استعمال تحليل البسط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالة نسبية. انظر الهامش

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن

يذكروا أمثلة على الدوال النسبية، ثم يمثلوها بيانيًا، وناقش معهم خطوط التقارب ونقاط الانفصال (إن وجدت).

إجابات:

(29) إجابة ممكنة: يمكن تحديد خطوط

التقارب الرأسية لدالة نسبية بتحليل

البسط والمقام إلى عواملهما. وإذا

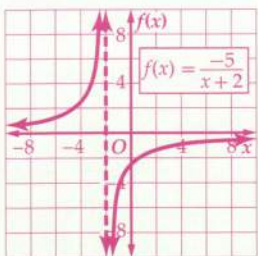
وجد عامل مشترك بين البسط والمقام

مثل $x - c$ فهذا يعني وجود نقطة

انفصال عند $x = c$. ثم مساواة بقية

عوامل المقام بالصفر.

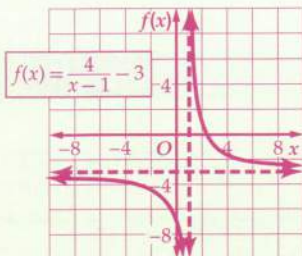
(32)



المجال $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

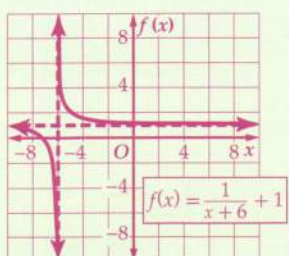
(33)



المجال $\{x \mid x \neq 1\}$

المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq -3\}$

(34)



المجال $\{x \mid x \neq -6\}$

المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$

تدريب على اختبار

(30) يريد علي أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟ C

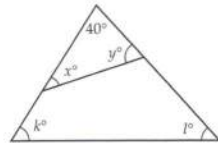
48 A

18 B

15 C

12 D

(31) هندسة: في الشكل المجاور، ما قيمة $x + y + k + l$ ؟ B



140 A

280 B

320 C

360 D

مراجعة تراكمية

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجال ومدى كل منها: (الدرس 5-3) (32-34) انظر الهامش

$$f(x) = \frac{1}{x+6} + 1 \quad (34)$$

$$f(x) = \frac{4}{x-1} - 3 \quad (33)$$

$$f(x) = \frac{-5}{x+2} \quad (32)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 5-2)

$$\frac{2(d^2-4d+6)}{(d-2)(d+4)(d-4)} \cdot \frac{d-4}{d^2+2d-8} + \frac{d+2}{d^2-16} \quad (36)$$

$$\frac{5m-4}{3(m+2)(m-2)} \cdot \frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6} \quad (35)$$

$$\frac{7x+38}{2(x+4)(x-7)} \cdot \frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14} \quad (38)$$

$$\frac{y(y-9)}{(y-3)(y+3)} \cdot \frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9} \quad (37)$$

(39) سفره: بين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

(a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق. 55 mi/h

(b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق. 45 mi/h

المسافة (mi)	الزمن (h)
0	0
55	1
110	2
165	3
165	4
225	5

37 الدرس 5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا

تنويع التعليم

ضعن فوق

توسّع ارسم مستقيمًا في المستوى الإحداثي، وارسم فجوة على المستقيم تقابل قيمة صحيحة للمتغير x . فمثلًا ارسم المستقيم $y = x - 2$ وارسم فجوة عليه عند النقطة $(1, -1)$. ثم اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا دالة نسبية تمثل بيانيًا بهذا المستقيم. هناك العديد من الإجابات الممكنة التي تكون فيها $x=1$ قيمة مستثناة وتعطي الدالة $f(x) = x - 2$ بعد تبسيطها.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \text{ أو } f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

تمثيل الدوال النسبية بيانياً

Graphing Rational Functions

معمل الحاسبة البيانية

توسع

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية.

1 التركيز

الهدف استكشاف التمثيلات البيانية للدوال النسبية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

من الممكن أن يجرب الطلبة ميزة التمثيل البياني للدوال قبل البدء بتمثيل الدوال النسبية، وتتبع مساره لتحديد خطوط التقارب ونقط الانفصال.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات؛ لتنفيذ النشاطين 1 و 2.

- قد يحتاج الطلبة إلى تتبع تمثيل الدالة خارج الشاشة الظاهرة؛ لتحديد خطوط التقارب بصورة دقيقة.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين

1-6

3 التقييم

التقييم التكويني

استعمل التمارين 1-3 لتقييم مدى قدرة الطلبة على استعمال الحاسبة البيانية؛ لتمثيل الدوال النسبية بيانياً.

نشاط 1

التمثيل البياني لدالة لها خطوط تقارب

مثل الدالة $y = \frac{8x-5}{2x}$ بيانياً في نافذة العرض القياسية، وأوجد معادلات خطوط التقارب:

الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط على المفاتيح:

2: Add Graphs (ctrl) ثم اكتب الدالة واضغط **enter**، ولتحديد خط التقارب الرأسي

اضغط على المفاتيح: 1: Graph Trace (F1) 5: Trace (F5)، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك

الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عندما $x = 0$ ، وستظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرفة أن الدالة غير معرفة عندما $x = 0$ ، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2

التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال

مثل الدالة $y = \frac{x^2-16}{x+4}$ بيانياً.

الخطوة 1: لتمثيل الدالة اضغط على المفاتيح:

2: Add Graphs (ctrl) ثم اكتب الدالة واضغط **enter**، ولتحديد نقاط الانفصال

اضغط على المفاتيح: 3: Trace Step... (F3) 5: Trace (F5)، وحوّل إلى القيمة 0.1، ثم اضغط

على المفاتيح: 1: Graph Trace (F1) 5: Trace (F5)، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لـ y عند

$x = -4$ وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال (-4, undef)

الخطوة 2: اختبر التمثيل البياني.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بجزء عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$ ، مما يعني أن الدالة غير معرفة عندما $x = -4$.

تمارين

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانياً، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad x = -2, y = 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x = 0, y = 0 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2x}{3x-6} \quad x = 2, y = \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4} \quad x = 4, y = 0 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \quad x = -3 \text{ نقطة انفصال عند } x = -3 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{4x+2}{x-1} \quad x = 1, y = 4 \quad (5)$$

38 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

التوسّع في المفهوم

• عند التحضير لدراسة التناسب العكسي اطلب إلى الطلبة تمثيل الدوال: $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{2}{x}$ ، $y = \frac{4}{x}$ ، $y = \frac{3}{x}$ على الشاشة نفسها، ووصف أوجه التشابه بين تمثيلاتها البيانية.

محورا الإحداثيات هما خطا تقارب لكل من التمثيلات البيانية الأربعة.

• لتوضيح خط التقارب الأفقي في النشاط 1، اطلب إلى الطلبة تمثيل الدالة $y = \frac{8x-5}{2x}$ وعلى الشاشة نفسها تمثيل $y = 4$ ، وتتبع التمثيلين باستعمال ميزة **3: Intersection Point(s)**، فستلاحظ أن التمثيلين البيانيين لا يتقاطعان، وأن التمثيل البياني لـ $y = \frac{8x-5}{2x}$ يتقارب أفقيًا من المستقيم $y = 4$.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

دون ضمن فوق المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

دون دون المتوسط

دون

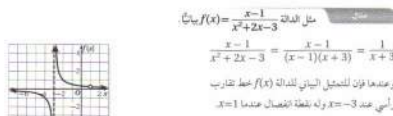
تدريبات إعادة التعليم - تامة (22)

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال النسبية

نقطة الاتصال يوجد في بعض الأحيان نقاط اتصال في التمثيل البياني للدالة النسبية، وتظهر هذه النقاط على صورة سمات في التمثيل البياني للدالة، لأن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقاط، ولكنها معرفة حولها.

نقطة الاتصال إذا كانت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ حيث $p(x) \neq 0$ وكان $q(x) = 0$ عاملاً مشتركاً بين $p(x)$ و $q(x)$ ، فله نقطة اتصال عندما $x = c$.



كأن جدول قيم للدالة وعين النقاط في المستوى الإحداثي ومثل بينها.

x	-2.5	-2	-1	-0.5	-4	-5
f(x)	2	1	0.5	-2	-1	-0.5

تمارين

مثل كل دالة $f(x)$ بيانياً:

(1) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}$

الفصل 4، العلاقات والدوال النسبية 22

دون

تدريبات إعادة التعليم (21)

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات إعادة التعليم تمثيل الدوال النسبية بيانياً

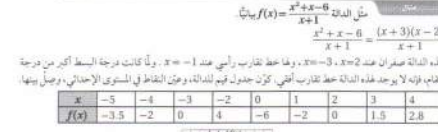
خطوط التقارب الرأسية والأفقية

الدالة النسبية دالة تكسب على الصورة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ على أن تكون $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتي حدود و $q(x) \neq 0$.

المجال يمكن أن يكون مجال الدالة النسبية من الأعداد التي تكون الدالة معرفة عندها.

خط التقارب مستقيم يقارب منه التمثيل البياني للدالة، إذا كانت الدالة النسبية في البسط صورة لها غير معرفة عند $x = a$ فإن التقسيم $x = a$ خط تقارب رأسي لهذه الدالة.

خط التقارب الأفقي يكون للدالة النسبية خط تقارب أفقي عندما تقسّم قيمة من البسط على قيمة من المقام.



تمارين

مثل كل دالة $f(x)$ بيانياً:

(1) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 3x - 10}$

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

(3) $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$

الفصل 4، العلاقات والدوال النسبية 21

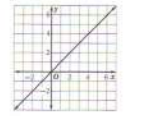
دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (24)

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات حل المسألة تمثيل الدوال النسبية بيانياً

(a) تمثيلات بيانية، مثلت عليها الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4}$ يوجد خطأ في هذا التمثيل البياني، بين كيف يمكنك تصحيحه.



(b) حدد موقع خطي التقارب الأفقي والرأسي للتمثيل البياني لهذه المعادلة: $x = -3226$ خط التقارب الرأسي عند $y = 0$ خط التقارب الأفقي عند $y = 0$

(c) ما معنى خط التقارب الأفقي للتمثيل البياني لهذه المعادلة؟

كندا زاد عدد الحوادث بقترب معدل التسجيل من الصفر لأن عدد مرات التسجيل يبقى ثابتاً.

(12) نبوت، درسي إسحق نيوتن الدالة النسبية: $f(x) = \frac{ax^2 + bx^2 + cx + d}{x}$ مقداراً أن $d \neq 0$ ، أين يقع خط التقارب الرأسي للتمثيل البياني لهذه الدالة؟ $x = 0$ عند

(13) معدل تسجيل الأهداف، معدل تسجيل الأهداف لأحد لاعبي كرة السلة خلال سنوات مشاركته في هذه اللعبة حتى بداية موسم 1432 هجرية يساوي 0.305، فقد سجل 984 مرة من 3226 محاولة، وفي موسم 1432 هجرية سجل 183 مرة.

(14) الكتب معادلة نصف معدل تسجيل الأهداف هذا اللاعب في نهاية موسم 1432 هجرية مستعملاً x لعدد محاولات التسجيل في هذا الموسم.

$y = \frac{984 + 183}{x + 3226}$

دون ضمن فوق

تدريبات المهارات (23)

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات المهارات تمثيل الدوال النسبية بيانياً

مثل كل دالة $f(x)$ بيانياً:

(1) $f(x) = \frac{-3}{x}$

(2) $f(x) = \frac{10}{x}$

(3) $f(x) = \frac{-4}{x}$

(4) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

(5) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

(6) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(7) $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

(8) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$

(9) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x - 8}$

(10) $f(x) = \frac{x^3}{2x + 2}$

(11) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}{2x^2 - 8x + 6}$

الفصل 4، العلاقات والدوال النسبية 23

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5

كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.

الدرس 5-5

تمييز مسائل التغير الطردي والتغير

المشترك وحلها.

تمييز مسائل التغير العكسي والتغير

المركب وحلها.

ما بعد الدرس 5-5

تمثيل دوال القطع الزائد بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

• إذا زاد ارتفاع المنصة، ماذا يحدث

لطولها؟ **يزداد.**

• إذا نقصت قيمة h ، ماذا يحدث لقيمة l ؟

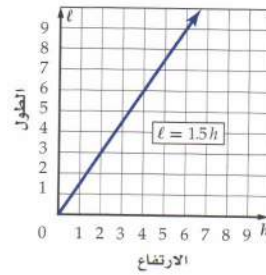
تنقص.

• ما القيمة التي تبقى ثابتة ولا تتغير؟

النسبة $\frac{l}{h}$ ، وتساوي 1.5



الطول (l)	الارتفاع (h)	النسبة ($\frac{l}{h}$)
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5



المادارة

وجد عبدالله خلال بناه منحدرًا للترحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصة l مساويًا مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى النسبة ثابتة.

المعادلة $\frac{l}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $l = 1.5h$ ، وبهذا فإن طول المنصة يتغير طرديًا مع ارتفاعها.

التغير الطردي والتغير المشترك

إن العلاقة المعطاة بالمعادلة $l = 1.5h$ مثال على التغير الطردي، حيث يعبر عن التغير الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة ثابت التغير.

لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $l = 1.5h$ هو مستقيم يمر بنقطة الأصل، لذا فالتغير الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $b = 0$ و $m = k$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغير الطردي هو ثابت التغير.

وللتعبير عن التغير الطردي، فإننا نقول إن l تتغير طرديًا مع x . وبمعنى آخر كلما زادت x ، فإن l تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان معامل التغير سالبًا.

أضف إلى
مطوبتك

التغير الطردي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: تتغير l طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
ويسمى العدد k ثابت التغير.

مثال، إذا كانت $y = 3x$ ، فإن l تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن l تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$ ، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت l تتغير طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2 \quad y_1 = kx_1$$

$$\frac{y_2}{x_2} = k \quad \frac{y_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن l تتناسب طرديًا مع x).

يمكن استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم l .

فيما سبق:

درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

• أميز مسائل التغير

الطردي والتغير

المشترك وأحلها.

• أميز مسائل التغير

العكسي والتغير المركب

وأحلها.

المضردات:

التغير الطردي

direct variation

ثابت التغير

constant of variation

التغير المشترك

joint variation

التغير العكسي

inverse variation

التغير المركب

combined variation

إرشادات للدراسة

ثابت التغير

في التغير الطردي،

المستقيم الذي له ثابت

تغير موجب، يكون

صاعدًا إلى أعلى من

اليسار إلى اليمين،

بينما المستقيم الذي له

ثابت تغير سالب، فإنه

يكون هابطًا نحو الأسفل

من اليسار إلى اليمين.

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (42)	• تنوع التعليم، ص (42، 44)	• تنوع التعليم، ص (44)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

مثال 1 التغير الطردي

إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسباً يربط بين القيم.

تناسب طردي	$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
	$\frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$
بالضرب التبادلي	$15(7) = 5(y_2)$
بالتبسيط	$105 = 5y_2$
بقسمة كلا الطرفين على 5	$21 = y_2$

تحقق من فهمك

1 إذا كانت r تتغير طردياً مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$. 30

هناك نوع آخر من التغير يُسمى **التغير المشترك**، ويحدث عندما تتغير كمية ما طردياً مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

إرشادات للدراسة

التغير المشترك
يصنف بعض الرياضيين التغير المشترك بوصفه حالة خاصة من التغير المركب الذي ستدرسه لاحقاً.

التغير المشترك

التعبير اللفظي: تتغير y تغيراً مشتركاً مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
مثال: إذا كانت: $x = 6$ ، $z = -2$ ، $y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، حيث $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ، فإن قيمة y عندما $x = 4$ ، $z = -5$ تكون: $y = 5 \times -5 \times 4 = -100$.

إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم المجهولة الأخرى.

$$\frac{y_1}{x_1 z_1} = k \quad , \quad \frac{y_2}{x_2 z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسباً مشتركاً، أي أن y تتناسب طردياً مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغير المشترك

إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$ ، إذا علمت أن

$$y = 20 \text{ عندما } x = 5 \text{ و } z = 3$$

استعمل تناسباً يربط القيم بعضها ببعض.

تناسب مشترك	$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$
	$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$
بالضرب التبادلي	$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$
بالتبسيط	$360 = 15y_2$
بقسمة كلا الطرفين على 15	$24 = y_2$

تحقق من فهمك

2 إذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع t و v ، وكانت $r = 70$ عندما $t = 4$ و $v = 10$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = 8$ و $v = 2$. 28

التغير الطردي والتغير المشترك

مثال 1 يبين طريقة استعمال تناسب لحل مسألة تغير طردي.

مثال 2 يبين طريقة حل مسائل التغير المشترك.

مثالان إضافيان

1 إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = -15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 3$. -9

2 إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما تكون $x = 10$ و $z = 5$ ، علماً بأن $y = 12$ عندما $z = 8$ و $x = 3$. 25

تنبيه!

تجنب الأخطاء: ناقش الطلبة في كيفية كتابة معادلة تغير تتضمن ثابت التغير.

المحتوى الرياضي

التغير الطردي والتغير العكسي يمكن تحديد نوع التغير في بعض المسائل من خلال جدول يربط بين قيم x وقيم y . فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فإن التغير طردي. أما إذا كانت xy قيمة ثابتة فإن التغير عكسي.

التغير العكسي والتغير المركب هناك نوع آخر من التغير هو **التغير العكسي**، فإذا تغيرت الكميتان عكسيًا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هو k .

نقول إن كميتين تتغيران عكسيًا إذا كانت إحداها تزيد بتقصان الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغير السرعة والزمن اللازم لقطع مسافة ثابتة تغيرًا عكسيًا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

التغير العكسي والتغير المركب

المثال 3 يبين طريقة استعمال تناسب لحل مسألة تغير عكسي.

المثال 4 يبين تطبيقًا حياتيًا على التغير العكسي.

المثال 5 يبين طريقة حل مسائل التغير المركب.

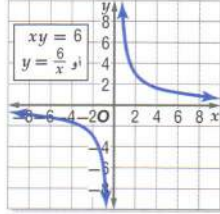
مثال إضافي

3

إذا كانت r تتغير عكسيًا مع t ،

وكانت $r = -6$ عندما $t = 2$ ،

فأوجد قيمة r عندما $t = -7$.



إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$ ،

فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغير العكسي يشبه التمثيل البياني لدالة المقلوب تمامًا.

يمكن استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيرًا عكسيًا مُعطى فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k, x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

بالتعويض عن قيمة k من إحدى المعادلتين في الأخرى

بقسمة كلا الطرفين على $y_1 y_2$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًا؛

أي أن y تتناسب عكسيًا مع x).

إرشادات للدراسة

التغير الطردي

والتغير العكسي

يمكن تحديد نوع

التغير من خلال جدول

قيم x و y . فإذا

كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة

ثابتة فالتغير طردي.

أما إذا كانت xy تساوي

قيمة ثابتة فالتغير

عكسي.

إرشادات للمعلم الجديد

تطوير الحس الرياضي ساعد الطلبة

على أن يفهموا الفرق بين نوعي التغير

(الطردي والعكسي) باستعمال مثال السرعة

والمسافة والزمن، فعندما يقود الشخص

سيارته بسرعة معينة فإن المسافة المقطوعة

تزداد بزيادة الزمن، ويُعدّ هذا تغيرًا طرديًا،

أما إذا أردنا قطع مسافة معينة فإن الزمن

اللازم يقل مع زيادة السرعة، ويُعدّ هذا تغيرًا

عكسيًا.

المثال 3 التغير العكسي

إذا كانت a تتغير عكسيًا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$ ، فأوجد قيمة a عندما $b = -10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

تناسب عكسي

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$$

$$a_1 = 28, b_1 = -2, b_2 = -10$$

$$\frac{28}{-10} = \frac{a_2}{-2}$$

بالضرب التبادلي

$$28(-2) = -10(a_2)$$

بالتبسيط

$$-56 = -10(a_2)$$

بقسمة كلا الطرفين على -10

$$5\frac{3}{5} = a_2$$

تحقق من فهمك

3 إذا كانت x تتغير عكسيًا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$.

مثال 4 من واقع الحياة كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغير التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود عكسيًا مع طول السلك. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in .

افترض أن $l_1 = 10, f_1 = 512, l_2 = 8$ ، وأوجد قيمة f_2 .

المعادلة الأصلية	$l_1 f_1 = l_2 f_2$
$f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$	$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$
بقسمة كلا الطرفين على 8	$\frac{5120}{8} = f_2$
بالتبسيط	$640 = f_2$

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

(4) يتغير الطول الظاهري لجسم عكسيًا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟ **5.2 مرة**

هناك نوع آخر من التغير هو **التغير المركب**، ويحدث عندما تتغير كمية ما طردبًا أو عكسيًا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغير طردبًا مع x ، و y تتغير عكسيًا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1}, \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k, \quad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمى هذا التناسب تناسبًا مركبًا، أي أن y تتناسب طردبًا مع x وعكسيًا مع z).

مثال 5 التغير المركب

إذا كانت f تتغير طردبًا مع g وعكسيًا مع h . وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

كُون أولًا تناسبًا صحيحًا للمعلومات المعطاة.

g تتغير طردبًا مع f . لذا فإن g تكون في البسط	$f_2 = \frac{kg_2}{h_2}$ و $f_1 = \frac{kg_1}{h_1}$
h تتغير عكسيًا مع f . لذا فإن h تكون في المقام	$k = \frac{f_2 h_2}{g_2}$ و $k = \frac{f_1 h_1}{g_1}$
بحل كلٍّ من المعادلتين بالنسبة لـ k	$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$
بمساواة النسبتين	$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$
$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$	$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$
بالضرب التبادلي	$-1296 = 12g_2$
بالتبسيط	$-108 = g_2$
بقسمة كلا الطرفين على 12	

عندما تكون $f = 18$ و $h = -3$ ، تكون قيمة g هي -108 .

تحقق من فهمك

(5) إذا كانت p تتغير طردبًا مع r وعكسيًا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ و $r = 2$ ، فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟ **-80**

مثالان إضافيان

فضاء: استعمل المعلومات الواردة في فقرة "تحقق من فهمك" علمًا بأن بعد كوكب الزهرة عن الشمس 67 مليون ميل تقريبًا، وحدد كم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من كوكب الزهرة مقارنة مع طول قطرها عند النظر إليها من الأرض. **1.39 مرة تقريبًا**

إذا كانت f تتغير تغيرًا طردبًا مع g وعكسيًا مع h ، فأوجد قيمة g عندما $f = 6$ و $h = -5$ ، علمًا بأن $g = 18$ عندما $h = 3$ و $f = 5$. **-36**

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي: سجل بصوت واضح شريطًا صوتيًا تتناول فيه مسائل مختلفة على التغير، ثم شغله ليستمع الطلبة إليه، أو حمّله على أجهزتهم الصوتية، واطلب إليهم كتابة هذه المسائل وحلها.

إرشادات للدراسة

التغير المركب
هي العلاقة $y = \frac{kx}{z}$
تظهر الكميات التي تتغير طردبًا مع y في البسط. أما التي تتغير عكسيًا فتظهر في المقام.

تنوع التعليم

إذا: واجه بعض الطلبة صعوبة في حفظ معادلات التغير المختلفة.

فاطلب: إليهم أن يكتبوا المعادلات مستعملين لونا مختلفًا لكل متغير ولونا آخر للثابت k . فمثلًا، يكون التغير الطردبي:

$$y = kx \quad \text{والتغير المشترك: } y = kxz \quad \text{والتغير العكسي: } y = \frac{k}{x}$$

- (1) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$. 21
- (2) إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، وكانت $y = -50$ عندما $x = -10$ و $z = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$. -27
- (3) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$. -32
- (4) **خارطة:** إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما. 90 mi
- (5) إذا كانت a تتغير طردياً مع b ، وعكسياً مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$. -48

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

- 1 مثال إذا كانت x تتغير طردياً مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كل من الحالتين الآتيتين:
- (6) إذا كانت $x = 6$ عندما $y = 32$. 1.5 (7) إذا كانت $x = 11$ عندما $y = -3$. $-\frac{88}{3}$
- (8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلاً، ووزنه على سطح القمر 60 رطلاً، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر. $m = \frac{1}{6}w$
- 2 مثال إذا كانت a تتغير تغيراً مشتركاً مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كل من الحالتين الآتيتين:
- (9) إذا كانت $a = -108$ عندما $b = 2$ و $c = 9$. 72 (10) إذا كانت $a = 24$ عندما $b = 8$ و $c = 12$. -3
- 3 مثال إذا كانت f تتغير عكسياً مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كل من الحالتين الآتيتين:
- (11) إذا كانت $f = -12$ عندما $g = 19$. 38 (12) إذا كانت $f = 0.6$ عندما $g = -21$. 2.1
- (13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغير طردياً مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.
- (a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h، فاكتب معادلة تغير طردي تمثل هذا الموقف. $d = 50t$
- (b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه. 60 h
- 5 مثال إذا كانت x تتغير طردياً مع y ، وعكسياً مع z ، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$. -6

حدد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيراً طردياً، أو تغيراً عكسياً، أو غير ذلك:

غير ذلك	(17)	عكسي	(16)	طردي	(15)																														
	<table border="1"><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>16</td></tr><tr><td>5</td><td>25</td></tr></table>	x	y	2	4	3	9	4	16	5	25		<table border="1"><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>-2</td><td>-8</td></tr><tr><td>-8</td><td>-2</td></tr></table>	x	y	8	2	4	4	-2	-8	-8	-2		<table border="1"><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>4</td><td>12</td></tr><tr><td>8</td><td>24</td></tr><tr><td>16</td><td>48</td></tr><tr><td>32</td><td>96</td></tr></table>	x	y	4	12	8	24	16	48	32	96
x	y																																		
2	4																																		
3	9																																		
4	16																																		
5	25																																		
x	y																																		
8	2																																		
4	4																																		
-2	-8																																		
-8	-2																																		
x	y																																		
4	12																																		
8	24																																		
16	48																																		
32	96																																		

- (18) إذا كانت x تتغير عكسياً مع y ، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 20$. 4
- حدد إذا كانت المعادلة في كل مما يأتي تمثل تغيراً طردياً، أو عكسياً، أو مشتركاً، أو مركباً، ثم أوجد ثابت التغير (التناسب) في كل منها:

$m = 20cd$ (22) $-10 = gh$ (21) $c = \frac{7}{d}$ (20) $a = 27b$ (19)

43 مشترك، 20 عكسي، -10 عكسي، 7 طردي، 27

الدرس 5-5 دوال التغير

تنوع الواجب المنزلي

المستوى	الأئلة
دون المتوسط	29-36, 23, 19-22, 6-13
ضمن المتوسط	7-36
فوق المتوسط	14-36

تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

تحقق من أن الطلبة يفهمون الفرق الأساسي بين نوعي التغير: الطردي والعكسي، من خلال طرح أسئلة مثل: هل يتغير دخل الشخص طردياً أم عكسياً مع عدد أيام العمل؟ هل يتغير زمن إنجاز عمل محدد طردياً أم عكسياً مع عدد العاملين؟

(23) **كيمياء** : يتغير حجم غاز معين v طردياً مع درجة حرارته t ، وعكسياً مع ضغطه p حيث $(v = \frac{kt}{p})$.

(a) هل تمثل المعادلة تغيراً طردياً، أم عكسياً أم مشتركاً أم مركباً؟ **مركباً**

(b) عينة من الغاز حجمها 8 L، ودرجة حرارتها 275° K، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 L وتسخينها إلى درجة حرارة 300° K. كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

(23b) 1.82 ضغط جوي تقريباً

أو $\frac{20}{11}$ ضغط جوي

تنبيه

اكتشف الخطأ اقترح على الطلبة

لحل السؤال 25 أن يكتبوا المسألة على

الصورة:

$$\frac{z_2}{1} = \frac{kx_2}{y_2} \text{ و } \frac{z_1}{1} = \frac{kx_1}{y_1}$$

وبالضرب التبادلي سيحصلون على

$$z_2 y_1 = kx_2 \text{ و } z_1 y_2 = kx_1$$

ثم

$$\frac{z_2 y_1}{k} = \frac{z_1 y_2}{k}$$

الوصول صيغة لـ k .

(24) **جاذبية** : ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغير طردياً مع حاصل

ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسياً مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. **(24a)** $2 \times 10^{20} \text{ N}$ تقريباً

(a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ تقريباً، وكتلة القمر $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$

وكتلة الأرض $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

(b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ تقريباً، وكتلة الشمس $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ تقريباً، فما

مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟ **(24b)** $3.5 \times 10^{22} \text{ N}$ تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **اكتشف الخطأ** : يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغير المركب، تتغير فيها z طردياً مع x وعكسياً مع y . أيهما توصل إلى التناسب

الصحيح؟ وضح إجابتك.

انظر الهامش

تركي

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$

$$k = \frac{z_1 y_1}{x_1}, k = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

$$\frac{z_1 y_1}{x_1} = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

يوسف

$$z_1 = \frac{kx_1}{y_1}, z_2 = \frac{kx_2}{y_2}$$

$$k = \frac{z_1 y_1}{x_1}, k = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

$$\frac{z_1 y_1}{x_1} = \frac{z_2 y_2}{x_2}$$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلبة أن يكتب

كلٌّ منهم معادلة تغير من واقع حياته على

ورقة (مثل: زمن الدراسة، ساعات النوم، ...

إلخ)، وبيِّن نوعه، وأن يسلموك أوراقهم

قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-4، 5-5

بإعطائهم:

الاجتهاد القصير 3، ص (12)

تدريب على اختبار

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

(30) ما التغير الذي تمثله العلاقة

الموضحة بالجدول المجاور؟ **A**

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركب

(29) إذا كانت a تتغير طردياً مع b ، وعكسياً مع c ، وكانت $b=15$

عندما $c=2$ ، $a=4$ ، فما قيمة b عندما $a=7$ ، $c=-8$ ؟ **B**

A $-\frac{1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

مراجعة تراكمية

حدد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-5)

(31) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ خطوط التقارب: **(32)** $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 3x - 4}$ خطوط التقارب: **(33)** $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x+3}$ نقطة الانفصال عند: $x = -3$

أوجد LCM لكل مما يأتي: (الدرس 5-2)

(34) $a, 2a, a+1$ **(35)** $8, 24x, 12$ **(36)** $6x^4y, x^4, 3x^2, 2xy$

44 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

(25) يوسف؛ لأن تركي قام بعملية الضرب

في الوقت الذي كان يجب عليه أن يقوم

بعملية القسمة.

(26) إجابة ممكنة: كل تغير مشترك هو تغير

مركب بسبب وجود تغير بين طرديين في

الوقت الذي يمكن أن يحتوي فيه التغير

المركب على تغير طردي وآخر عكسي، مما

لا يجعله تغيراً مشتركاً.

(27) إجابة ممكنة: القوة تتغير تغيراً مشتركاً

مع كتلة الجسم وتسارعه.

(28) إجابة ممكنة: التغير العكسي، وبعض

أنواع التغير المركب لا يمكن أن يكون

الصفري أحد قيمها؛ لأن القسمة على الصفر

غير معرفة.

تنويع التعليم

صنم فوق

توسع اكتب المعادلة $y = kx^3$ على السبورة، وأسأل الطلبة عن نوع التغير الذي تمثله هذه المعادلة.

واطلب إليهم وصف ما يحصل لقيمة y عندما تتضاعف قيمة x مرتين، ثلاث مرات أو عندما تصل إلى النصف.

تمثل المعادلة تغيراً طردياً بين y و x ، فعندما تتضاعف قيمة x فإن قيمة y تضرب في العدد 8، وعندما تصبح

قيمة x ثلاثة أمثال قيمتها الأصلية فإن قيمة y تضرب في العدد 27، وعندما تُنصف قيمة x فإن قيمة y تقسم على

العدد 8.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 5

دون **دون المتوسط** ضمن **ضمن المتوسط** فوق **فوق المتوسط**

تدريبات إعادة التعليم - تمة (27)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-5 تدريبات إعادة التعليم
دوال التغير

التغير العكسي والتغير المشترك

التغير العكسي	تغير y عكسياً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $y = \frac{k}{x}$ أو $y = \frac{k}{x} + c$ حيث $c \neq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$
التغير المشترك	تغير y مشتركاً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $y = kx$ أو $y = kx + c$ حيث $c \neq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

الفصل 5، العلاقات والحوال النسبية 27

تدريبات إعادة التعليم (26)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-5 تدريبات إعادة التعليم
دوال التغير

التغير الطردي والتغير العكسي والتغير المشترك

التغير الطردي	تغير y طردياً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $y = kx$ أو $y = kx + c$ حيث $c \neq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$
التغير العكسي	تغير y عكسياً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $y = \frac{k}{x}$ أو $y = \frac{k}{x} + c$ حيث $c \neq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$
التغير المشترك	تغير y مشتركاً مع x إذا وجد عدد ثابت k لا يساوي الصفر بحيث إن $y = kx$ أو $y = kx + c$ حيث $c \neq 0$ و $x \neq 0$ و $y \neq 0$

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=10$ عندما $x=5$ و $y=20$ عندما $x=10$ فماذا تكون قيمة y عندما $x=15$ ؟

الفصل 5، العلاقات والحوال النسبية 26

تدريبات حل المسألة (29)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-5 تدريبات حل المسألة
دوال التغير

1. عروس، يتغير الأرتفاع الذي يقفز إليه العروس فوق منصة العروس طردياً مع المسافة التي يتخطها طرف الخنجر تحت مستواها الطبيعي. إذا تقفز عروس إلى ارتفاع 44 بوصة فوق منصة العروس عندما انخفض طرف منصة العروس 12 بوصة، فما الأرتفاع الذي يقفز إليه العروس إذا انخفض طرف منصة العروس 18 بوصة؟

2. تصميم مواقف السيارات، يقفز عدد الأماكن المخصصة لوقوف السيارات في جميع تجاري طردياً مع عدد المحلات التجارية في المجمع، ويصورة عامة تخصص لكل حل 5 مواقف. عتظ مستثمر لإنشاء مجمع تجاري على قطعة أرض تضم مساحة كافية لوقوف 120 سيارة، في عدد المحلات التجارية التي يتعين على المستثمر أن يقيمها في هذا المجمع؟

3. ايجار، تبلغ أجرة شقة 10 ريالاً في الشهر. إذا اشتركت 10 طالباً في استئجار الشقة، وقاسوا أجرة بينهم بالتساوي، فكم يتعين على كل طالب أن يدفع؟ كيف تتغير حصة الطالب الواحد من الأجرة مع تغير عدد الطلاب؟ عندما استأجر الشقة طالبان التام دفع كل منهما 2000 ريال، فكم يدفع الطالب الواحد إذا كان عدد المشاركين في استئجار الشقة 5 طلاب؟

4. ملاء، تغير تكلفة طلاء جدار طردياً مع مساحته. أكتب صيغة حساب تكلفة طلاء جدار مستطيل الشكل طولها l وعرضه w . هل تغير التكلفة مع كل من l و w ؟

5. هيدروجين، يقفز ثمن عرض الخزان هيدروجين طردياً مع حجم الخزان. يريد أحد العمال أن يقشري خزان هيدروجين على هيئة متوازي مستطيلات L, W, H أبعاداً.

العمود	الارتفاع	المساحة (المربعات)
36	36	2700
18	18	450
24	24	800

ب) يتعين أن يكون حجم الخزان مناسباً لوضعه على رف ذي ارتفاع معين ثابت. كيف يتغير ثمن الخزان مع عرض الخزان في الارتفاع والعمق الثابتين؟

ج) ما ثمن خزان كروي الشكل نصف قطره 24 بوصة؟

د) تذكر أن حجم الكرة التي نصف قطرها r يساوي $\frac{4}{3}\pi r^3$

3351.03 ريال

الفصل 5، العلاقات والحوال النسبية 29

تدريبات المهارات (28)

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-5 تدريبات المهارات
دوال التغير

جدونا ما إذا كانت الدالة في كل ما يأتي دالة طردياً أو عكسياً، أو مشتركة، ثم اوجد ثابت التغير في كل منها.

$c = 12m$	$p = \frac{4}{q}$	$r = \frac{1}{2}bh$
طردي، 12	عكسي، 4	مشتركة، $\frac{1}{2}$
$rw = 15$	$f = 5200m$	$y = 0.2d$
عكسي، 15	طردي، 5200	طردي، 0.2
$t = 16hr$	$R = \frac{8}{C}$	$C = 2\pi r$
مشتركة، 16	عكسي، 8	طردي، 2π

10. إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=35$ عندما $x=7$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=11$.

11. إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=360$ عندما $x=180$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=270$.

12. إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=540$ عندما $x=10$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=1080$.

13. إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=18$ عندما $x=3$ و $y=2$ عندما $x=9$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=6$.

14. إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=16$ عندما $x=4$ و $y=2$ عندما $x=2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=1$.

15. إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=2$ عندما $x=2$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=1$.

16. إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=6$ عندما $x=5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=10$.

17. إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y=3$ عندما $x=14$ ، فأوجد قيمة y عندما $x=6$.

18. إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y=3$ عندما $x=3$ و $y=2$ عندما $x=2$ ، فأوجد قيمة x عندما $y=9$.

الفصل 5، العلاقات والحوال النسبية 28

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-6

تبسيط عبارات نسبية.

الدرس 5-6

حل معادلات نسبية.

حل متباينات نسبية.

ما بعد الدرس 5-6

حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فما التكلفة الفعلية لكل زيارة؟ **30 ريالاً**
- إذا زار أحد الأعضاء النادي 10 مرات في أحد الأشهر، فكم تزيد التكلفة الفعلية لكل زيارة على الرسم المقرر للزيارة الواحدة؟ **20 ريالاً**
- ما مقدار الزيادة على الرسم المقرر للزيارة الواحدة إذا زار أحد الأعضاء النادي x مرة في أحد الأشهر؟ **$\frac{200}{x}$ ريال لكل زيارة.**



لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهرياً بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهرياً، فإنه سيدفع مبلغاً مقداره $(200+10x)$ ريالاً في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة:

$$\frac{200+10x}{x}$$

حيث x عدد مرات زيارة النادي. ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالاً، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات النسبية تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل.

1 مثال حل معادلة نسبية

$$\text{حل المعادلة } \frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

وتحقق من صحة حلك. LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

المعادلة الأصلية

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\text{بضرب المعادلة في LCM للمقامات } \frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$$

$$\text{باختصار العوامل المشتركة } \frac{(x+3)(2x)}{1} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+5)(x+3)3}{x+3}$$

بالتبسيط

$$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$$

خاصية التوزيع

$$2x^2+6x-x^2+x+10=3x+15$$

بالتبسيط

$$x^2+7x+10=3x+15$$

بطرح $3x+15$ من كلا الطرفين

$$x^2+4x-5=0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$(x+5)(x-1)=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x-1=0 \text{ أو } x+5=0$$

$$x=1 \text{ أو } x=-5$$

الدرس 5-6 حل المعادلات النسبية 45

فيما سبق:

درست تبسيط عبارات نسبية.

والآن:

- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المضردات:

المعادلة النسبية
rational equation

المتباينة النسبية
rational inequality

www.obeikaneducation.com

مراجعة المضردات

الحل الدخيل

هو الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

مصادر الدرس 5-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• ص 9	• تنوع التعليم، ص (48, 50)	• تنوع التعليم، ص (48, 50)
كتاب التمارين	• ص 9	• ص 9	• ص 9
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2-(-5)-10}{(-5)^2+8(-5)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$

$$x \frac{-10}{0} - \frac{25+5-10}{25-40+15} \neq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2-1-10}{1^2+8(1)+15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\checkmark \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تحقق، اختر $x = -5$

اختر $x = 1$

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

$$\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1} \quad (1B) \quad \text{ليس لها حل}$$

$$8 \frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6} \quad (1A)$$

$$\frac{7}{3} \frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4} \quad (1D)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 3 \frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2} \quad (1C)$$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة والسرعة والزمن لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعاً لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكن استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $r = \frac{d}{t}$, $t = \frac{d}{r}$.

مثال 2 من واقع الحياة مسألة مسافة

تجديف: ركب سعيد قارباً بسرعة 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi ؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمناً قدره 3 h ، أوجد سرعة التيار.

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهاباً وإياباً والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار. والمعادلة التي تُستعمل للحل هي: $d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

جداول تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

حل المعادلات النسبية

مثال 1 يبين طريقة حل معادلة نسبية مع استبعاد الحلول الدخيلة (إن وجدت).

المثالان 2, 3 تبين طريقة استعمال المعادلات النسبية لحل مسائل تتعلق بالكيمياء والمسافات والأعمال.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

حل المعادلة:

$$\frac{p^2-p-5}{p+1} = \frac{p^2-7}{p-1} + p$$

وتحقق من صحة حلك.

$$p = -3, -2, 2$$

المحتوى الرياضي

حل المعادلات النسبية تتحول المعادلة النسبية إلى نوع آخر من المعادلات (خطية، تربيعية أو غيرهما) خلال خطوات حلها. لذا؛ فإن حل المعادلة النسبية يتطلب حل معادلة جديدة من نوع آخر.

$$\text{حل: } 3 = \frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v}$$

$$(6+v)(6-v) \frac{5}{6+v} + (6+v)(6-v) \frac{5}{6-v} = (6+v)(6-v)(3)$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات } (6+v)(6-v) \text{ باختصار العوامل المشتركة}$$

$$(6+v)(6-v) \frac{5}{6+v} + (6+v)(6-v) \frac{5}{6-v} = (6+v)(6-v)(3)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad (6-v)(5) + (6+v)(5) = (36-v^2)(3)$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad 30 - 5v + 30 + 5v = 108 - 3v^2$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 60 = 108 - 3v^2$$

$$\text{ب طرح 60 من كلا الطرفين} \quad 0 = -3v^2 + 48$$

$$\text{بالتحليل إلى العوامل} \quad 0 = -3(v+4)(v-4)$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على -3} \quad 0 = (v+4)(v-4)$$

$$\text{خاصية الضرب الصفري} \quad v = 4 \text{ أو } v = -4 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \frac{5}{6+v} + \frac{5}{6-v} = 3$$

$$v = 4$$

$$\text{بالتبسيط} \quad \frac{5}{6+4} + \frac{5}{6-4} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\text{بالتبسيط وتوحيد المقامات} \quad \frac{5}{10} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$$

وبما أن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة، فإن سرعة التيار هي 4 mi/h.

تحقق من فهمك

(2) **طيران:** إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الرياح 20 mi/h، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟ **339.5 mi/h**

يمكن حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة

مسألة تتعلق بالعمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الثاني المتوسط والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطور النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معاً، فكم ساعة يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معاً لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني المتوسط لإتمام العمل.

خططل: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معاً فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الثاني المتوسط	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معاً
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

الدرس 5-6 حل المعادلات النسبية 47



الربط مع الحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل اللعب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها. وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنوياً.

تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

ذكر الطلبة بالتحقق دائماً من الحلول، وذلك بتعويضها في المعادلة الأصلية وليس في المعادلات الناتجة في أي خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي

2

سباحة: يسبح أحمد في نهر سرعة التيار فيه 1 mi/h. فإذا قطع 4 mi دون توقف نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر في عكس اتجاهه في 5 ساعات. أوجد سرعته في المياه الراكدة. **1.5 mi/h تقريباً**

تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية:

يجب أن ينتبه الطلبة في المثال 2 إلى الفرق بين حل المعادلة التربيعية التي لها حلان، وحل المسألة التي لها حل واحد فقط.

تجنب الأخطاء عند حل

المعادلات النسبية، ينسى بعض الطلبة في أغلب الأحيان أن يضربوا حدود المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات للحصول على معادلة مكافئة. لذا ذكرهم بذلك.

كتابة المعادلة

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$

بضرب كلا الطرفين في LCM للمقامات وهو 72j

$$72j \frac{1}{24} + 72j \frac{1}{j} = 72j \frac{1}{18}$$

باختصار العوامل المشتركة

$$3 \frac{1}{1} + 72j \frac{1}{j} = 72j \frac{1}{18}$$

بالتبسيط

$$3j + 72 = 4j$$

ب طرح 3j من كلا الطرفين

$$72 = j$$

تحقق، هناك طريقتان للتحقق:

الطريقة 1: تعويض القيم

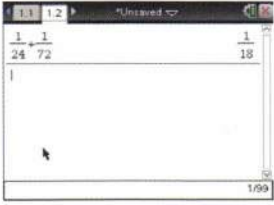
المعادلة الأصلية $\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$

$$j = 72 \quad \frac{1}{24} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{18}$$

LCM للمقامات هو 72 $\frac{3}{72} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{4}{72}$

بالتبسيط $\checkmark \frac{4}{72} = \frac{4}{72}$

الطريقة 2: استعمال الحاسبة



يحتاج طلاب الصف الثاني المتوسط إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

- 3) يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملاً معاً، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟ 15h

حل المتباينات النسبية المتباينات النسبية، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

حل المتباينات النسبية

مفهوم أساسي

الخطوة 1: حدد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفراً.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4

حل متباينة نسبية

$$\text{حل المتباينة النسبية } \frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$$

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$$

المعادلة المرتبطة

$$\text{بالضرب في LCM للمقامات: } 12(x-2) \frac{x}{3} - 12(x-2) \frac{1}{x-2} = 12(x-2) \frac{x+1}{4}$$

خاصية التوزيع

$$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$$

ب طرح $3x^2 - 3x - 6$ من كلا الطرفين

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$(x-6)(x+1) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 6 \text{ أو } x = -1$$

إرشادات للدراسة

أكد للطلبة ضرورة

استعمال القيم

المستثناة وحلول

المعادلة المرتبطة

جميعها عند تقسيم

خط الأعداد إلى فترات.

إرشادات للمعلم الجديد

طريقة بديلة يمكن حل المعادلة في المثال 3 بطريقة أخرى، وذلك بطرح $\frac{1}{24}$ أولاً من كلا الطرفين، ثم إيجاد حاصل الضرب التبادلي، للوصول إلى الحل.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية اختر طالباً

ليشرح خطوات حل متباينة نسبية،

مؤكداً عليه ضرورة شرح خطوة

التحقق بعد الحل، وتوثيق ذلك

باستعمال آلة التصوير.

حل المعادلات النسبية

مثال 4 يبين طريقة حل متباينة نسبية.

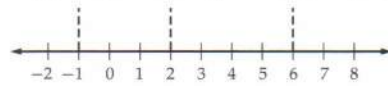
مثال إضافي

$$\text{حل المتباينة: } \frac{1}{3k} + \frac{2}{9k} < \frac{2}{3}$$
$$k > \frac{5}{6} \text{ أو } k < 0$$

تنويع التعليم

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة أن يفكروا في الفرق بين الرياضيات البحتة مثل حل المعادلات، والرياضيات التطبيقية مثل حل مسائل من واقع الحياة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النوعين.

الخطوة 3: ارسم خطاً رأسياً عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = 8$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = -3$
$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \geq \frac{8+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \geq \frac{4+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \geq \frac{0+1}{4}$	$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \geq \frac{-3+1}{4}$
$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \geq \frac{27}{12}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$	$-1 + \frac{1}{5} \geq -\frac{2}{4}$
$\frac{30}{12} \not\geq \frac{27}{12}$	$\checkmark \frac{5}{6} < \frac{5}{4}$	$\frac{1}{2} \not\geq \frac{1}{4}$	$\checkmark -\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$

الجملة صحيحة عندما $x = 4, x = -3$ ؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك حل كلًا من المتباينتين الآتيتين:

(4A) $0 < x < 9.3$ $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$ (4B) $x > 15$ أو $x < 0$ $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 9-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل أسئلة

ورق الرسم البياني

يحتاج الطلبة إلى ورق الرسم البياني لحل السؤالين 15, 25.

تأكد

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(1) $11 \frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$ (2) $9 \frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3) $8 \frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$ (4) $14 \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

(5) **مسافة:** قطع وليد مسافة 40 mi ذهاباً وعودة مستعملاً دراجته التي سرعتها 11.5 mi/h عندما تكون الرياح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الرياح زمناً قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الرياح.

(a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح. $\frac{20}{11.5+x}$

(b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح. $\frac{20}{11.5-x}$

(c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح. $\frac{20}{11.5+x} + \frac{20}{11.5-x} = \frac{23}{6}$, 3.5 mi/h

مثال 3

(6) يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يوماً يحتاجان إليه إذا عملاً معاً في تبليط هذا الفناء؟ $2\frac{8}{11}$ يوم

مثال 4

حل كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: انظر الهامش

(7) $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$ (8) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$ (9) $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدريب وحل المسائل

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

(10) $9 \frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$ (11) $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

الدرس 5-6 حل المعادلات النسبية 49

إجابات:

(7) $x < 0$ أو $x > 1.75$

(8) $x < -2$ أو $2 < x < 14$

(9) $-4 < x < 3$

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	20-26 ، 18 ، 10-15
ضمن المتوسط	12-26 زوجي
فوق المتوسط	15-26

المثالان 2, 3 **بناء:** تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يوماً لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يوماً لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معاً لبناء المرآب نفسه؟ **6.86 يوم تقريباً**

13 رحلة جوية: سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الرياح في 20h، واحتاجت إلى 16h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الرياح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الرياح الساكنة 500 mi/h، فما سرعة الرياح خلال الرحلة؟ **55.56 mi/h**

14 **مثال 4** حل المتباينة: $\frac{3}{5x} + \frac{1}{6x} > \frac{2}{3}$ وتحقق من صحة حلّك.

15 **تمثيلات متعددة:** افترض أن $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x-3}$. **15b** انظر الهامش

(a) جبرياً: حل هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟ **1، نعم، 3**

(b) بيانياً: مثل: $y_1 = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{x-1}{x-3}$. بيّن أعلى المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 < x < 5$.

(c) تحليلياً: ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟ **1، لا**

(d) لفظياً: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع (c)؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلّاً دخيلاً.

16 كيمياء: كم مللترًا من محلول حمضي تركيزه 20% يجب إضافته إلى 40 ml من محلول حمضي آخر تركيزه 75%؛ للحصول على محلول حمضي تركيزه 30%؟ **180 mL**

17 حل المعادلة: $\frac{2y-2}{y^2-y-12} = \frac{3}{4-y} - \frac{2}{y+3}$ ، وتحقق من صحة حلّك. **-1**

مسائل مهارات التذكير العليا

18 مسألة مفتوحة: أعط مثالاً على معادلة نسبية يمكن حلّها بضرب طرفي المعادلة في $(x+3)(x-4)$. انظر الهامش

19 **تحذّر:** حل المعادلة $\frac{1 + \frac{9}{x} + \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{x+4}{x-5}$ كل الأعداد الحقيقية ما عدا **5, -5, 0**

20 **تبرير:** وضح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية. **إجابة ممكنة:** لأن ضرب طرفي معادلة نسبية في LCM للمقامات قد ينتج حلّاً دخيلاً

21 **اكتب:** عند استعمال ميزة TABLE في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ ، **إجابة ممكنة:** قيم الدالة تكون غير معرفة عند العددين **-2** و **3** ويكون عندهما خطا تقارب فان الحاسبة البيانية تعطي ERROR عند القيمتين $x = 3$ و $x = -2$. وضح ماذا يعني ذلك؟ **أسيان**

تدريب على اختبار

22 ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2} - \frac{10}{a+5} = \frac{36}{a^2+7a+10}$ **A -1, B -1/2, C 1/2, D 1**

23 ما قيمة x في المعادلة $4 = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ؟ **A -7, B -1/2, C -1/7, D 7**

مراجعة تراكمية

عكسي

24 حدد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغييراً طردياً، أم تغييراً عكسياً، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

25 مثل الدالة $f(x) = \frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانياً. (الدرس 5-4) انظر الهامش

26 اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: $2, 8, 14, 20, \dots$ (مهارة سابقة) **26, 32, 38**

50 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة كتابة وحل مسائل من واقع الحياة شبيهة بما هو موجود في هذا الدرس مستعملين بياناتهم الخاصة.

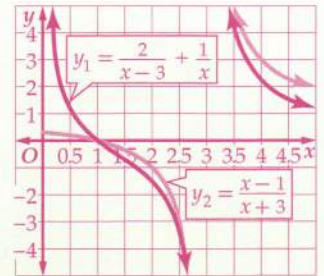
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-6 بإعطائهم:

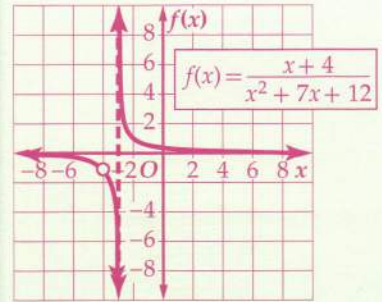
الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:

(15b)



18 **إجابة ممكنة:** $\frac{7}{4} + \frac{x}{x-4} = \frac{4}{x+3}$ **(25)**



توسيع التعليم

توسّع تُسمى المعادلة: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i}$ بمعادلة العدسات أحياناً. إذ توضح العلاقة بين البعد البؤري للعدسة f والمسافتين d و i بين كل من الجسم وصورته عن العدسة على الترتيب. اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا البعد البؤري لعدسة f إذا كانت $d = 20$ cm و $i = 12$ cm. واطلب إليهم أن يجدوا f بدلالة d و i .

$f = \frac{di}{d+i}, 7.5$ cm

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية

Solving Rational Equations and Inequalities

ملاحظات الدرس

توسع

5-6

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات النسبية بيانياً أو باستعمال ميزة table.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

عندما يُدخل الطالب الدالة في محرر الدالة ($f1 =$) عليه أن يستعمل الأقواس حول البسط أو حول المقام إذا تكوّنا من أكثر من حد إذا لم يستعمل مفاتيح كتابة الكسر الاعتيادي $\frac{\square}{\square}$ \div \square .

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم إدخال القيم باستعمال المفاتيح بصورة صحيحة. واطلب إلى كل مجموعة تنفيذ كل من النشاطين 1، 2 وحل التمارين 1-6.

النشاط 1

• يمكن للطلبة التحقق من حل كل دالة مباشرة على الشاشة الرئيسية التي فيها التمثيل البياني باستعمال ميزة Table بالضغط على المفاتيح:

\square \square 2:View \square \square A:Show Table

حيث يظهر الجدول جانب التمثيل البياني؛ ويؤدي إلى النتيجة نفسها، ويمكن اختصار العملية مباشرة من الشاشة الرئيسية بالضغط على \square \square \square ؛ لإظهار الجدول.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل معادلات نسبية بيانياً أو باستعمال ميزة table.

نشاط 1 معادلة نسبية

$$\text{حل المعادلة } \frac{4}{x+1} = \frac{3}{2}$$

مثل طرفي المعادلة النسبية بيانياً، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثل طرفي المعادلة بيانياً

مثل طرفي المعادلة بيانياً كدالتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في $f1$ ، و $\frac{3}{2}$ في $f2$ ، ثم مثل المعادلتين بيانياً، وذلك بالضغط على المفاتيح:

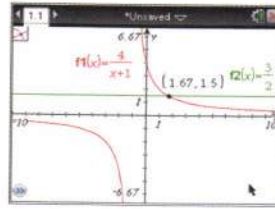
\square \square 2:Add Graphs \square \square \square ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط \square \square \square ، ثم اضغط على المفاتيح: \square \square \square \square \square واضغط \square \square \square واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط \square \square \square

الخطوة 2 استعمال ميزة Intersection Point(s)

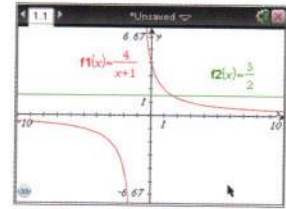
تمكّنك ميزة Intersection Point(s) في قائمة Points & Lines من تقدير الزوج المرتب الذي يمثل نقطة التقاطع. اضغط على المفاتيح:

\square \square 7:Points & Lines \square \square 3:Intersection Point(s)

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر فتظهر نقطة التقاطع (1.67, 1.5)



أي أن الحل هو 1.67.



الخطوة 3 استعمال ميزة table

تحقق من صحة حلّك باستعمال ميزة table. اعمل جدولاً يبيّن قيم x ، على أن تزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كل مرة (لأن الطرف الأيمن للمعادلة $\frac{3}{2}$ ، ولهذا يتوقع أن يتساوى طرفي المعادلة عندما تزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ في كل مرة)، وذلك بالضغط على المفاتيح:

\square \square 4:Add Lists & Spreadsheet

واكتب $Y_1 = \frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $Y_2 = \frac{3}{2}$ في العمود الثالث.

يبيّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكل تمثيل بياني. فعندما $x = \frac{5}{3}$ ،

يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حل المعادلة هو $1.67 \approx \frac{5}{3}$.

x	y1	y2
	$=4/(x+1)$	$=3/2$
1	2	3/2
4/3	12/7	3/2
5/3	3/2	3/2
2	4/3	3/2
7/3	6/5	3/2

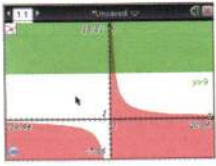
يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحل متباينات نسبية مستعملاً الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

الخطوة 1 مثل المتباينتين

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ، والثانية $y > 9$ بالضغط على المفاتيح: $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 2: Add Graphs $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ ثم اضغط $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ و $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ و $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ ثم اضغط $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ ولإظهار التمثيل اضغط على المفاتيح $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 4: Zoom - Out $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 4: Window/Zoom واضغط على الشاشة الرئيسة مرتين تصغر ويظهر التظليل فوق التمثيل البياني.



الخطوة 3 استعمال ميزة Table

تحقق من صحة حلك باستعمال ميزة Table. اعمل جدولاً يبين قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ كل مرة، وذلك

بالضغط على المفاتيح:

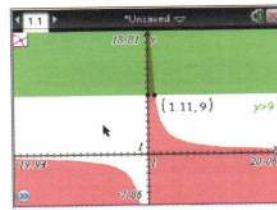
$\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 4: Add Lists & Spreadsheet

واكتب $Y_1 = \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و $Y_2 = 9$ في العمود الثالث.

x	y1	y2
0.888889	11.25	9
1	10	9
1.111111	9	9
1.222222	8.18182	9
1.333333	7.5	9

تنقل بالمؤشر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من 1.11 $\approx \frac{10}{9}$ ، يكون عندها $Y_1 > Y_2$. وهذا يؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x | 0 < x < 1.11\}$.

الخطوة 2 استعمال ميزة Intersection Point(s)



اضغط على المفاتيح:

$\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 7: Points & Lines $\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x} \right]$ 3: Intersection Point(s)

واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11, 9)، كرّر ذلك مرة أخرى، واضغط على محور y ، والتمثيل البياني لـ $y = 9$ ؛ فتظهر نقطة التقاطع لتتوصل إلى أن مجموعة الحل هي $\{x | 0 < x < 1.11\}$.

3 التقييم

التقييم التكويني

استعمل التمرين 2 لتقييم مدى فهم الطلبة لطريقة إيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين لطرفي المعادلة النسبية.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمارين 2-5، 7-9.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة حل المعادلة $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

وسيلاحظون أن التمثيلين البيانيين لكل من $y = \frac{x}{2}$ و $y = \frac{8}{x}$ يتقاطعان في نقطتين. ومن المهم جداً في مثل هذه الحالة أن يستعمل

الطلبة ميزة Intersection Point(s) بصورة صحيحة. ويتعين على الطالب أن يختار إحدى نقطتي التقاطع أولاً، ثم يقوم بإعادة

استعمال ميزة Intersection Point(s) واختيار نقطة التقاطع الثانية.

الحلان هما: $x = 4$ و $x = -4$.

تمارين (7) $\left\{ x \mid x < 0 \text{ أو } \frac{2}{3} < x < 1 \right\}$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي: (4) جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 1 (5) لا يوجد حل في الأعداد الحقيقية

(1) $2 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$ (2) $6 \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$ (3) $1.5 \frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$

(4) $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$ (5) $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$ (6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$ $\{x | 0 < x < 0.3\}$

(7) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$ (8) $\{x | -4 \leq x < 1\} 1 + \frac{5}{x-1} \leq 0$ (9) $2 + \frac{1}{x-1} \geq 0$ $\{x | x \leq 0.5 \text{ أو } x > 1\}$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

- العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرس 2-5 ، 1-5)
- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوال المقلوب والدوال النسبية (الدرس 3-5 ، 4-5)

- دالة المقلوب هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x) \neq 0$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالة النسبية هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ ، و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوال المقلوب والدوال النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوال، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغير: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 5-5)

- التغير الطردي: تتغير y طردياً مع x ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغير المشترك: تتغير y تغيراً مشتركاً مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغير العكسي: تتغير y عكسياً مع x ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y = \frac{k}{x}$ ، حيث $x \neq 0$ ، $y \neq 0$.
- التغير المركب: يحدث عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 5-6)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- يُستثنى من مجموعة حل المعادلة النسبية القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفراً.

المطويات

منظم أفكار

منظمة أفكار	منظمة أفكار	منظمة أفكار	منظمة أفكار	منظمة أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطوبتك.

المفردات:

العبارة النسبية	ص 10	نقطة الانفصال	ص 34
الكسر المركب	ص 13	التغير الطردي	ص 39
خط التقارب	ص 24	ثابت التغير	ص 39
خط التقارب الراسي	ص 24	التغير المشترك	ص 40
خط التقارب الأفقي	ص 24	التغير العكسي	ص 41
دالة المقلوب	ص 24	التغير المركب	ص 42
القطع الزائد	ص 24	المعادلة النسبية	ص 45
الدالة النسبية	ص 32	المتباينة النسبية	ص 48

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

- الكسر المركب** هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.
- إذا تغيرت كميتان **عكسياً** فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتاً k .
- يعبر عن **التغير الطردي** بمعادلة على الصورة $y = kx$.
- تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**.
- التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{x}{x+2}$ له **خط تقارب رأسي** عند $x = -2$.
- يحدث **التغير المشترك** عندما تتغير كمية ما طردياً مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.
- تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود **العبارة النسبية**.
- تظهر **نقطة الانفصال** على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالة؛ لأن الدالة غير معرّفة عندها.
- يحدث **التغير المركب** عندما تتغير كمية ما طردياً أو عكسياً أو كليهما معاً مع كميتين أخريين أو أكثر.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات

منظم أفكار

ويبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 10-17

مثال 1

بسط العبارة $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$

$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{3 \cdot b \cdot 2 \cdot a \cdot a}$$

$$= \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

بسط العبارة $\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12}$

$$\frac{r^2 + 5r}{2r} \div \frac{r^2 - 25}{6r - 12} = \frac{r^2 + 5r}{2r} \cdot \frac{6r - 12}{r^2 - 25}$$

$$= \frac{r(r+5)}{2r} \cdot \frac{6(r-2)}{(r+5)(r-5)}$$

$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(10) $-\frac{10yz^2}{9x} \cdot \frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

(11) $\frac{x-4}{x+4} \cdot \frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

(12) $\frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

(13) $\frac{x}{5(x-y)} \cdot \frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

(14) $\frac{x-3}{x+1} \cdot \frac{x^2+3x-18}{x^2+7x+6} \cdot \frac{x+4}{x+4}$

(15) هندسة: مثلث مساحته $(3x^2 + 9x - 54) \text{ cm}^2$ ، وارتفاعه $(x+6) \text{ cm}$. أوجد طول قاعدته $6x - 18 \text{ cm}$.

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 18-23

مثال 3

بسط العبارة $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$

بتحليل المقام $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$

بتوحيد المقامين $= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

ب طرح البسطين $= \frac{3a - 2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

خاصية التوزيع $= \frac{3a - 2a - 4}{(a-2)(a+2)}$

بالتبسيط $= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(16) $\frac{27b + 10a^2}{12ab^2} + \frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

(17) $\frac{-x+10}{4(x-2)(x+2)} - \frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

(18) $\frac{3xy^3 + 8y^3 - 5x}{6x^2y^2} \cdot \frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

(19) $\frac{-4x-18}{(x-5)(x+2)(x-3)} - \frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

(20) $\frac{12x^2-10x+6}{2(x+2)(3x-4)(x+1)} - \frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

(21) $\frac{-2x^2+3}{4x^2+11x+5} \cdot \frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{5}{2x+3}$

(22) هندسة: أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه.

$$\frac{10x+20}{(x+6)(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x+6}$$

54 الفصل 5 العلاقات والدوال النسبية

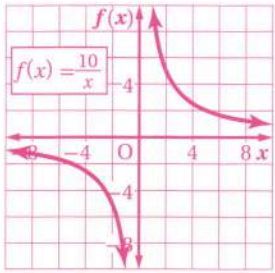
مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

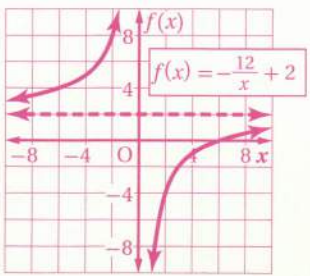
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ص (8)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:



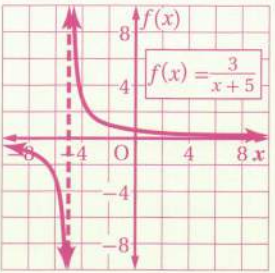
(23)

المجال $\{x \mid x \neq 0\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



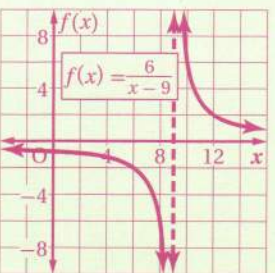
(24)

المجال $\{x \mid x \neq 0\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$



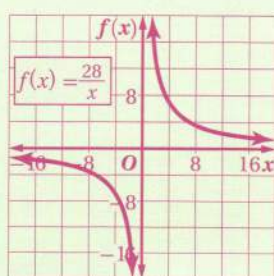
(25)

المجال $\{x \mid x \neq -5\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

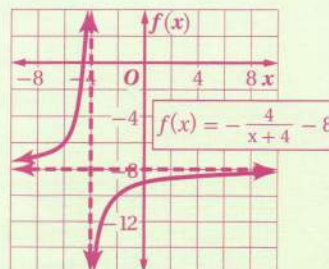


(26)

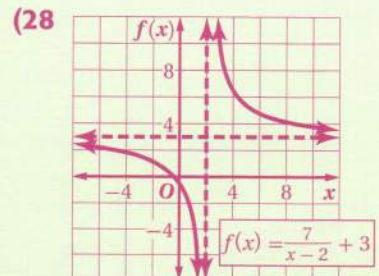
المجال $\{x \mid x \neq 9\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



(29b)



المجال $\{x \mid x \neq -4\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq -8\}$



(28)

المجال $\{x \mid x \neq 2\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \neq 3\}$

تمثيل دوال المقلوب بيانياً ص 30-24

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجال ومدى كل منها: (23-28) انظر الهامش

$f(x) = \frac{10}{x}$ (23) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$ (24)

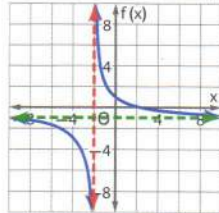
$f(x) = \frac{3}{x+5}$ (25) $f(x) = \frac{6}{x-9}$ (26)

$f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$ (27) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$ (28)

(29) أشجار: يقوم طلاب الصف الأول الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

(a) اكتب دالة تمثل هذا الموقف. $f(x) = \frac{28}{x}$

(b) مثّل هذه الدالة بيانياً. انظر الهامش



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت)

للمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

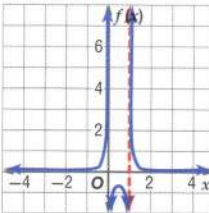
$$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالة غير معرفة عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$ ، فإن $x = -3$ هي معادلة خط

التقارب الرأسية وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6



مثّل الدالة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانياً.

الدالة غير معرفة عند $x = 0$ ،
وعند $x = 1$.

وبما أن الدالة في أبسط صورة،

فإن $x = 0$ ، و $x = 1$

خطّ تقارب رأسيّان للدالة.

ارسم الخططين والدالة بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

تمثيل الدوال النسبية بيانياً ص 37-32

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

$f(x) = \frac{3}{x^2+4x}$ (30) $x = -4, x = 0$

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+6x+8}$ (31) $x = -2$ نقطة انفصال عند: $x = -4$

$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-5x-24}$ (32) $x = 8$ نقطة انفصال عند: $x = -3$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً: (33-36) انظر ملحق الإجابات

$f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$ (33) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (34)

$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$ (35) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$ (36)

(37) مبيعات: يبيع عليّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وبيع لكل منها اشتراكاً. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالة $P(x) = \frac{10+x}{15+x}$.

(a) مثّل هذه الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات

(b) ما القيم المنطقية لكل من المجال والمدى في سياق المسألة؟

المجال $\{x \mid x \geq 0\}$ ، المدى $\{p(x) \mid 0.6667 \leq P(x) < 1\}$

5-5 دوال التغير ص 39-44

مثال 7

إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

تناسب عكسي	$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$
$x_1 = 24, y_1 = -8, y_2 = 15$	$\frac{24}{15} = \frac{x_2}{-8}$
بالضرب التبادلي	$24(-8) = 15(x_2)$
بالتبسيط	$-192 = 15x_2$
بقسمة كلا الطرفين على 15	$-12\frac{4}{5} = x_2$

عندما تكون $y = 15$ ، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

(38) إذا كانت a تتغير طرديًا مع b ، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ ، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$. $a = 15$

(39) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$. $y = -10.5$

(40) إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x ، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$. $y = -\frac{1}{3}$

(41) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $x = 8$ ، $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$. $y = 30$

(42) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 18$ ، $z = 6$ عندما $x = 15$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 4$ و $z = 4$. $y = \frac{48}{5}$

(43) **مهن:** يتغير أجر أحد العمال طرديًا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟ **75 ريالًا**

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 45-50

مثال 8

حلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$x(x+2) \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} \right) = x(x+2)(0)$$

$$x(x+2) \left(\frac{3}{x+2} \right) + x(x+2) \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$3(x) + 1(x+2) = 0$$

$$3x + x + 2 = 0$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} = 0$$

$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 = 0$$

$$2 - 2 = 0$$

تحقق،

حلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك:

$$x = \frac{46}{17} \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6 \quad (44)$$

$$x = 13 \quad \frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15} \quad (45)$$

$$x = -7 \quad \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3} \quad (46)$$

$$x = -4, x = -\frac{1}{2} \quad \frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3} \quad (47)$$

$$x = 8 \quad \frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3} \quad (48)$$

$$x < 1 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4} \quad (49)$$

$$x = 1.5 \quad \frac{1}{2x} = \frac{1}{3} \quad (50)$$

(51) **عمل:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليّ زراعتها في 4 h. فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟ **$1\frac{5}{7}$ h**

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل

استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدياً للطلبة.

اختبار الفصل: نماذج متعددة

ص (15-22)

إجابات:

$$(5) \frac{x+7}{3(2x+1)}$$

$$(6) \frac{-x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$(7) \frac{4y^2+14y-21}{14y^2}$$

$$(9) x = -2; y = -5$$

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq -2\}$$

$$\text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

$$(17) \text{خط تقارب رأسي: } x = 7, \quad f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$$

$$(18) \text{نقطة انفصال عند: } x = -5, \quad f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

$$(19) x = -5, \quad \frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$$

$$(20) m = -108, \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$$

$$(21) -1 < x < 0, \quad 7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$$

$$(22) r = 2, 3, \quad r + \frac{6}{r} - 5 = 0$$

$$(23) -\frac{8}{5} \leq m < \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$$

$$(24) r = -\frac{1}{4}, \quad \frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$$

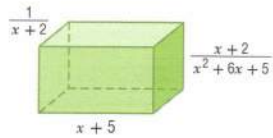
(25) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

(26) إذا كانت m تتغير طردياً مع n ، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$ ، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

(27) إذا كانت r تتغير تغيراً مشتركاً مع s و t ، وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ ، و $t = -5$ ، فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ ، و $t = 2.5$.

(28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تناسب طردياً مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟ **4h**

(29) ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟
وحدة مكعبة $\frac{1}{x+1}$



$$\text{بسّط كل عبارة مما يأتي: (3) } \frac{m+3}{n-3} \quad (5-7) \text{ انظر الهامش}$$

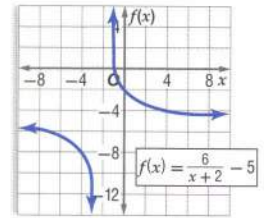
$$(1) \quad 8r^2 \cdot \frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2} \quad (2) \quad -\frac{2(m+2)}{m} \cdot \frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$$

$$(3) \quad \frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3} \quad (4) \quad \frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x+4}{x-1}$$

$$(5) \quad \frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1} \quad (6) \quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$$

$$(7) \quad \frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2} \quad (8) \quad \frac{2x+1}{5x-1} \cdot \frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$$

(9) حدّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالة الممثلة بيانياً أدناه. انظر الهامش



(10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$ ؟

- A $x = 1$ C $x = -2$ A
B $x = -1$ D $x = 2$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً: (11-16) انظر ملحق الإجابات

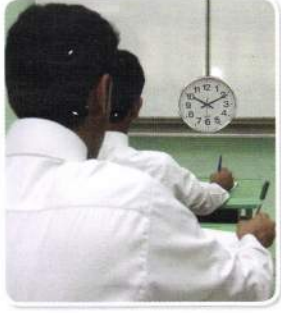
$$(11) f(x) = -\frac{8}{x} - 9 \quad (12) f(x) = \frac{2}{x+4}$$

$$(13) f(x) = \frac{3}{x-1} + 8 \quad (14) f(x) = \frac{5x}{x+1}$$

$$(15) f(x) = \frac{x}{x-5} \quad (16) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة، إذا	أحد المصادر الآتية: الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6 تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33) مشروع الفصل، ص (8)	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة، إذا	المصدر الآتي: تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
فاختر	www.obeikaneducation.com	فاختر	www.obeikaneducation.com



التخمين والتحقق

من المهم جداً أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختبار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوم معقولة كل منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة،

واسأل نفسك،

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- **معادلات:** إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثم حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيداً وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

$$\text{ما حل المعادلة } \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9} ?$$

- | | |
|-----|------|
| 5 C | -1 A |
| 7 D | 1 B |

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية التخمين والتحقق؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل،

• لماذا تعد استراتيجية التخمين والتحقق مناسبة للاستعمال في الاختبارات المعيارية؟

إجابة ممكنة: من المعروف أن الإجابة الصحيحة موجودة في البدائل، وعندئذٍ يمكنك التحقق من خلال معطيات السؤال، وإلا فعليك اختيار إجابة أخرى. وبهذه الطريقة تكون متأكدًا من إجابتك.

متى تستعمل استراتيجية التخمين والتحقق؟

إجابة ممكنة: يمكن استعمال هذه الاستراتيجية في أي اختبار معياري، وبخاصة عندما تكون البدائل عبارة عن أعداد؛ إذ يمكنك عندئذٍ تعويض الأعداد بدلاً من المتغيرات في المعادلة المعطاة.

مثال إضافي

تدريب اختبار معياري:

إذا كانت y تناسب تناسباً مشتركاً مع $x = 28$ ، وأن $z = 40$ عندما $y = 15$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 12$ ، $z = 7$. A

8 A

20 B

80 C

200 D

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلاً منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

تحقق،	
$\frac{2}{(-1)-3} - \frac{4}{(-1)+3} = \frac{8}{(-1)^2-9}$	خمن، -1
$\times -\frac{5}{2} \neq -1$	

تحقق،	
$\frac{2}{1-3} - \frac{4}{1+3} = \frac{8}{(1)^2-9}$	خمن، 1
$\times -2 \neq -1$	

تحقق،	
$\frac{2}{5-3} - \frac{4}{5+3} = \frac{8}{(5)^2-9}$	خمن، 5
$\checkmark \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x = 5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

3 التقييم

استعمل التمارين 1-4؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

3 ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x+4}{3}$ ؟ D

-5 A

4 B

-5 أو 2 D

2 أو 3 C

4 تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر. فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟ H

15 ريالاً H

10 ريالات F

20 ريالاً J

13 ريالاً G

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1 ما حل المعادلة $\frac{2}{5x} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$ ؟ B

$\frac{1}{5}$ B

$\frac{1}{10}$ A

$\frac{1}{2}$ D

$\frac{1}{4}$ C

2 مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عمر محمد يزيد على مثلي عمر محمود بسنة واحدة، وعمر علي أكبر من عمر محمد بثلاث سنوات، فما عمر محمد؟ H

15 H

7 F

18 J

14 G

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) تتغير تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طردياً مع عدد أيام استئجارها كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أي المعادلات الآتية تمثل ذلك التغير الطردي؟ B

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

(2) في أي اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ ، للحصول

على التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟ A

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

(3) أي مما يأتي ليس خط تقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$ ؟ D

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

(1)

A تم إيجاد ثابت التغير بصورة صحيحة، ولكن تمت إضافته بدلاً من الضرب فيه.

B إجابة صحيحة.

C طُبّق التناسب العكسي بدلاً من الطردي.

D استعملت عملية الضرب، ولكن كان ثابت التغير خطأً.

(2)

A إجابة صحيحة.

B لم تُستعمل إشارة + في تحديد اتجاه الإزاحة.

C فُسر العدد 2 على أنه المقطع من المحور x ، وهذا خطأً.

D خَمّن.

(3)

A تم تجاهل النفي في المسألة.

B تم تجاهل النفي في المسألة.

C تم تجاهل النفي في المسألة.

D إجابة صحيحة.

(4)

A لم يحلل العبارة $x^2 - 16$ بصورة صحيحة.

B تم تبسيط الكسر بصورة غير صحيحة.

C إجابة صحيحة.

D تم قلب الكسر بعد تبسيطه.

(6)

A ضرب بسط ومقام الكسر الأول بـ $x - 3$ وبسط

ومقام الكسر الثاني بـ $x + 3$.

B جمع الكسرين في الطرف الأيسر بدلاً من طرحهما.

C صحيحة.

D خَمّن.

(5)

A صحيحة.

B أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

C أوجد $45 - 32$.

D طرح حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي من حاصل ضرب عناصر القطر الآخر.

(4) ما أبسط صورة للكسر المركب $\frac{(x+3)^2}{\frac{x^2-16}{\frac{x+3}{x+4}}}$ ؟ C

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

(5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي: A

A 77

B 45

C 13

D -77

(6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟ C

A -13

B $\frac{7}{3}$

C 5

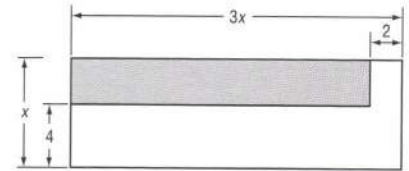
D 7

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.

$$3x^2 - 14x + 8$$



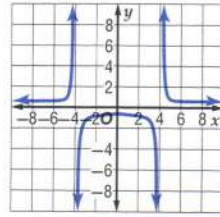
(8) إذا كانت y تتغير طردياً مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 16$. -64

(9) إذا كانت x تتغير طردياً مع y وعكسياً مع z ، وكانت $z = 26$ عندما $x = 8$ و $y = 13$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$. -12

(10) إذا كانت y تتغير عكسياً مع x ، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$. 9.6

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضحاً خطوات الحل:



(11) استعمل التمثيل البياني للدالة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل البياني.

(12) أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي:

(a) $f(x) = x^2$ انظر الهامش
 $g(x) = x - 5$

(b) $f(x) = 6 - x^2$ انظر الهامش
 $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 5 يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (60, 61)

اختبار تراكمي، ص (24)

بدل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 6: حدد الأسئلة ص (63) واجباً منزلياً لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات:

(11) إجابة ممكنة: يوجد خط تقارب رأسي عندما $x = 4$ و $x = -4$ ، وخط تقارب أفقي عندما $y = 0$

(12a) $(f+g)(x) = x^2 + x - 5$

$(f-g)(x) = x^2 - x + 5$

$(f \cdot g)(x) = x^3 - 5x^2$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{x-5}, x \neq 5$

(12b) $(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1$

$(f-g)(x) = -3x^2 - 3x + 11$

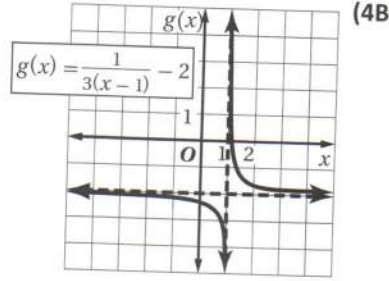
$(f \cdot g)(x) = -2x^4 - 3x^3 + 17x^2 + 18x - 30$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{6-x^2}{2x^2+3x-5}, x \neq 1, x \neq -\frac{5}{2}$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

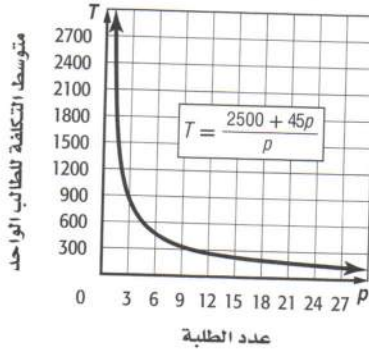
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع حل سؤال...
4-1	5-4	5-5	5-5	5-5	3-3	5-6	2-4	5-1	5-4	5-3	5-5	فعد إلى الدرس...

61 الفصل 5 اختبار تراكمي



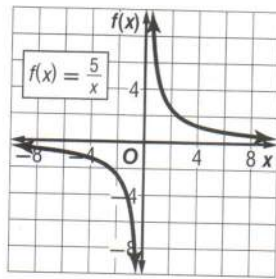
المجال = $\{x \mid x \neq 1\}$ ؛ المدى = $\{g(x) \mid g(x) \neq -2\}$

$$T = \frac{2500 + 45p}{p} \quad (5)$$

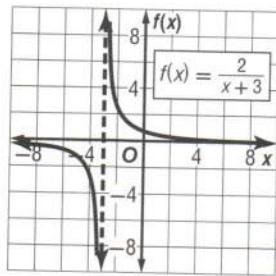


لا يمكن للصفر أن ينتمي إلى المجال؛ لأن عدد الطلبة لا يمكن أن يساوي صفرًا. وكذلك لا ينتمي الصفر إلى المدى؛ لأن متوسط التكلفة لا يمكن أن يكون صفرًا. ولا يمكن لأي من المجال أو المدى أن يحوي قيمًا سالبة، لأنه لا يمكن وجود متوسط تكلفة سالبة لعدد سالب من الطلاب.

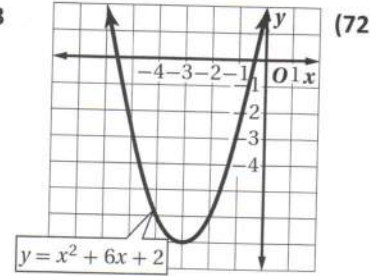
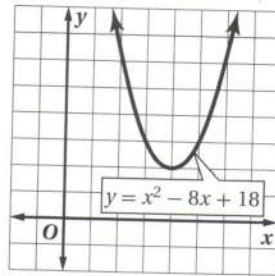
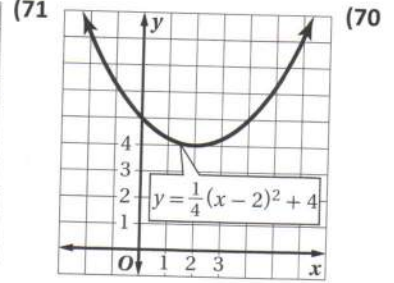
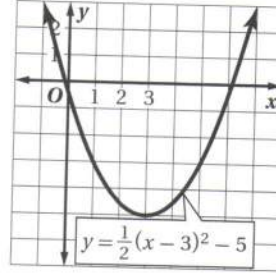
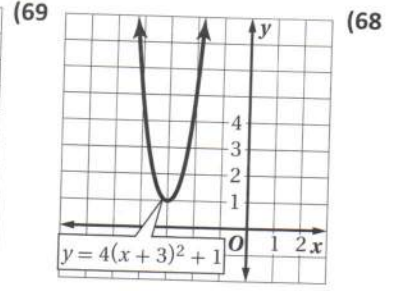
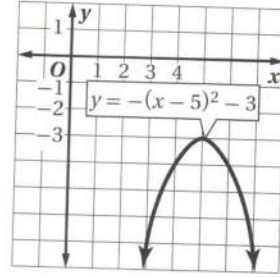
الدرس 5-3 ، ص 28, 29



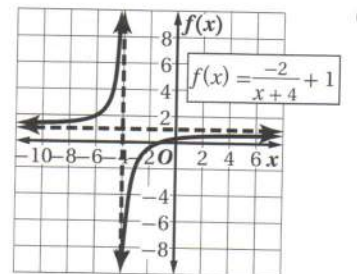
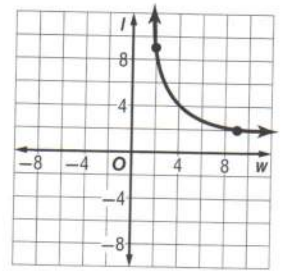
المجال = $\{x \mid x \neq 0\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



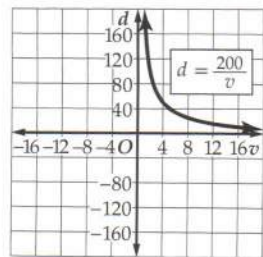
المجال = $\{x \mid x \neq -3\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



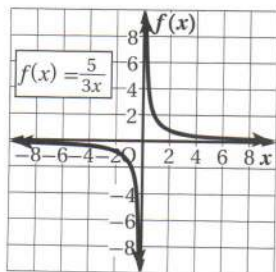
الدرس 5-3 (تحقق من فهمك) ، ص 25-28



المجال = $\{x \mid x \neq -4\}$ ؛ المدى = $\{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$



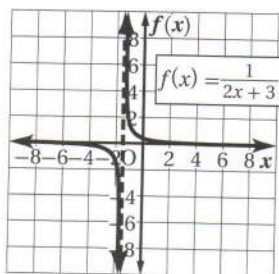
(18b)



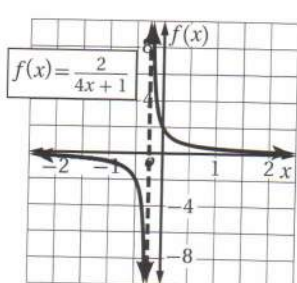
(19)

$\{x | x \neq 0\}$ = المجال

$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى



(21)



(20)

$\{x | x \neq -\frac{3}{2}\}$ = المجال

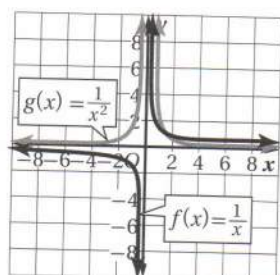
$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى

$\{x | x \neq -\frac{1}{4}\}$ = المجال

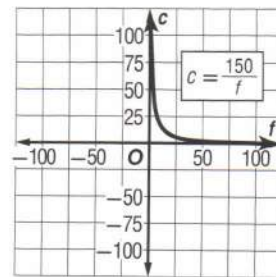
$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى

$g(x) = \frac{1}{x^2}$		$f(x) = \frac{1}{x}$	
x	g(x)	x	f(x)
-3	$\frac{1}{9}$	-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$
-1	1	-1	-1
0	غير معرفة	0	غير معرفة
1	1	1	1
2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{9}$	3	$\frac{1}{3}$

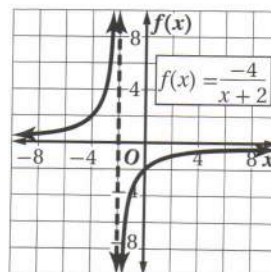
(22a)



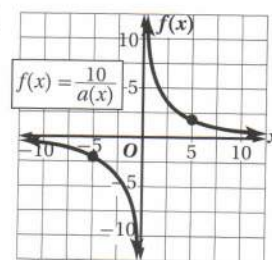
(22b)



(6b)



(11)



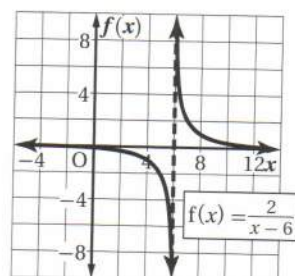
(10)

$\{x | x \neq -2\}$ = المجال

$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى

$\{x | x \neq 0\}$ = المجال

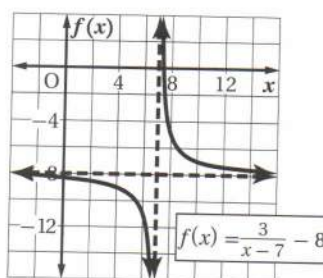
$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى



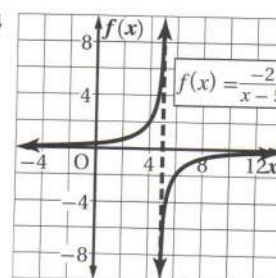
(12)

$\{x | x \neq 6\}$ = المجال

$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى



(14)



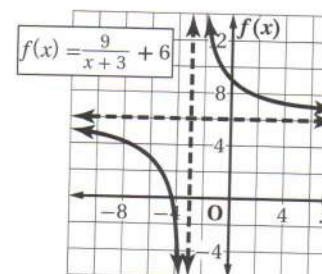
(13)

$\{x | x \neq 7\}$ = المجال

$\{f(x) | f(x) \neq -8\}$ = المدى

$\{x | x \neq 5\}$ = المجال

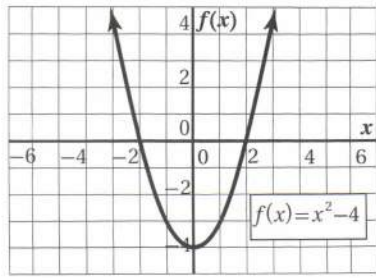
$\{f(x) | f(x) \neq 0\}$ = المدى



(15)

$\{x | x \neq -3\}$ = المجال

$\{f(x) | f(x) \neq 6\}$ = المدى

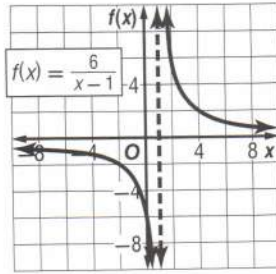


(38)

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

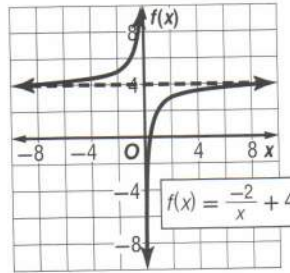
$$\text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$$

اختبار منتصف الفصل ، ص 31



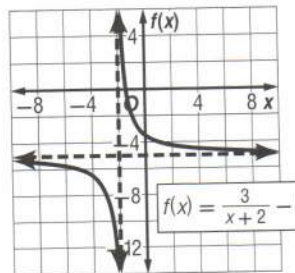
(18)

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq 1\}, \text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$$



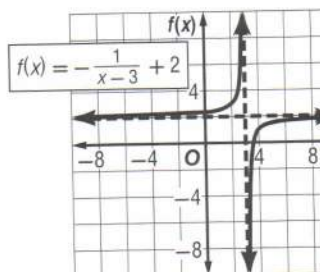
(19)

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq 0\}, \text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq 4\}$$



(20)

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq -2\}, \text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq -5\}$$



(21)

$$\text{المجال} = \{x \mid x \neq 3\}, \text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq 2\}$$

(22c) الجزء الأيمن من التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه التمثيل

البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$. بحيث تعطي قيم x الموجبة قيمًا موجبة

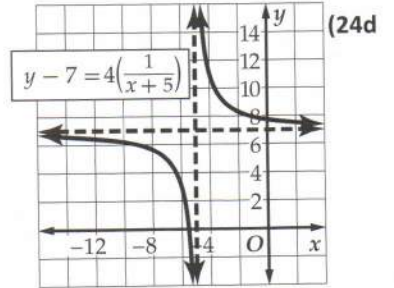
للدالة $f(x)$. والجزء الأيسر من التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ يشبه

الانعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x . بحيث

تعطي جميع قيم x قيمًا موجبة للدالة $g(x)$.

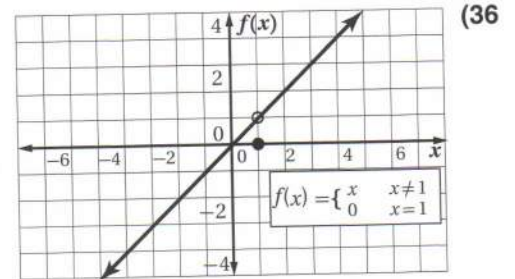
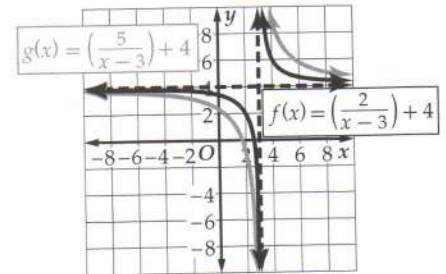
(22d) إجابة ممكنة: يكون التمثيل البياني متماثلًا حول المحور y عندما تكون

n عددًا زوجيًا، ومتماثلًا حول نقطة الأصل عندما يكون n عددًا فرديًا.



(24d)

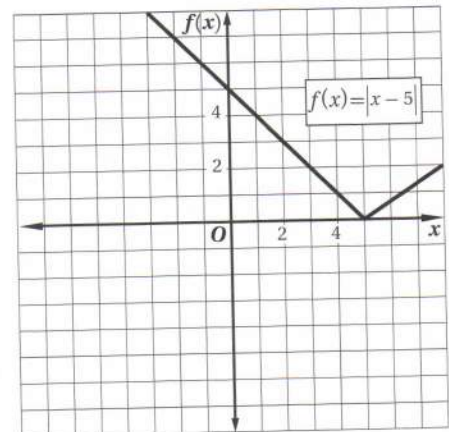
(26) إجابة ممكنة: $g(x) = \frac{5}{x-3} + 4$ و $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$



(36)

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \neq 1\}$$

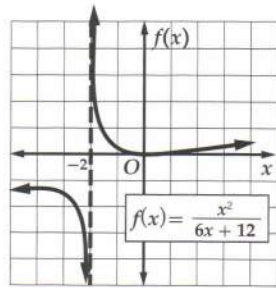


(37)

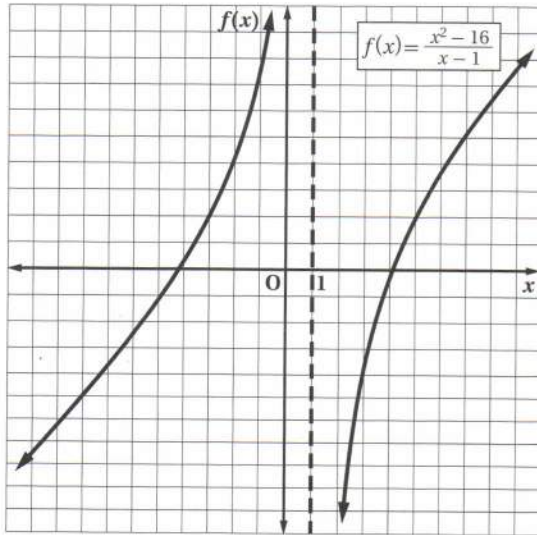
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\text{المدى} = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$$

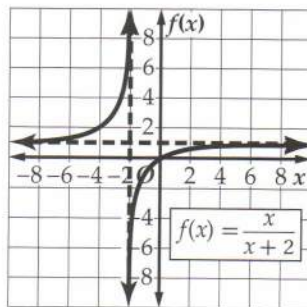
(6)



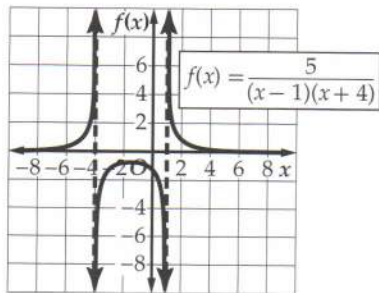
(7)



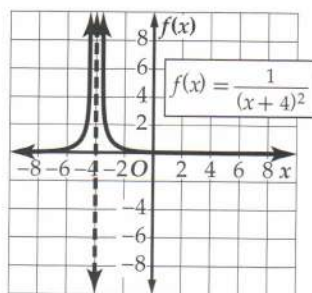
(8)



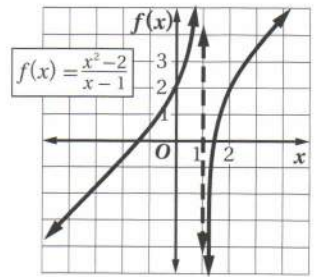
(9)



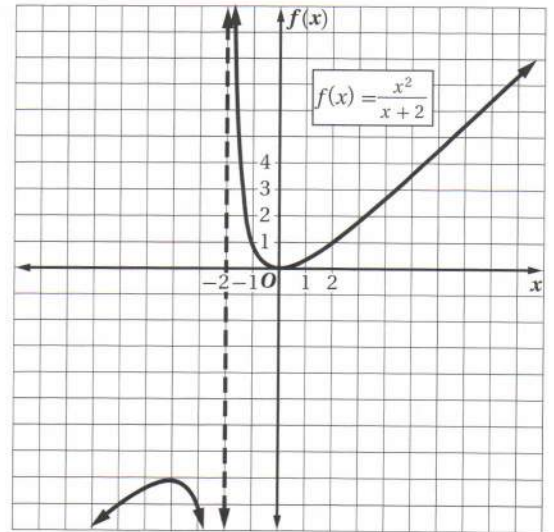
(10)



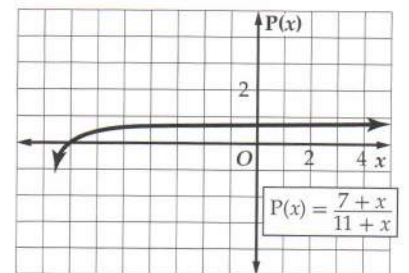
(1)



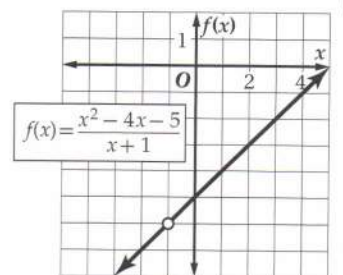
(2)



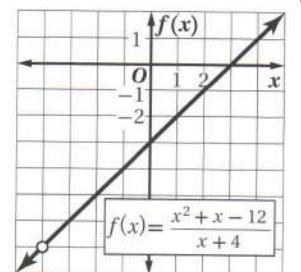
(3a)

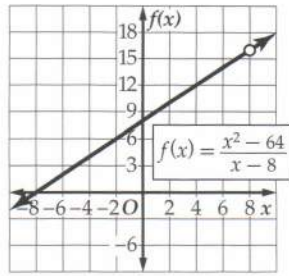


(4)



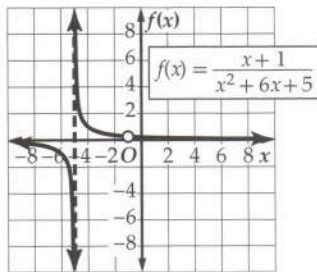
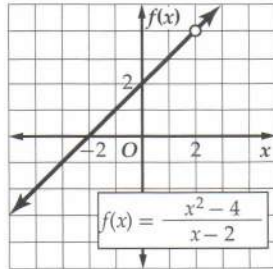
(5)



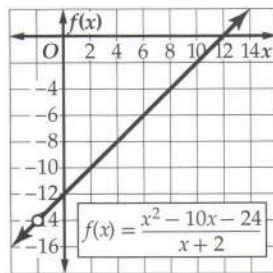


(17)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (18)$$

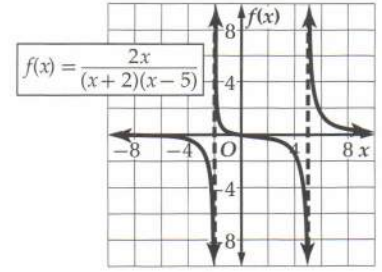
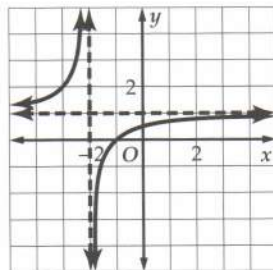


(23)

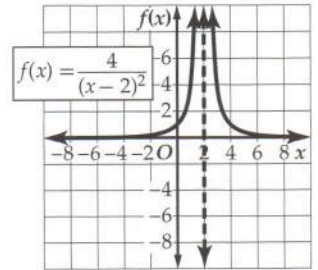


(24)

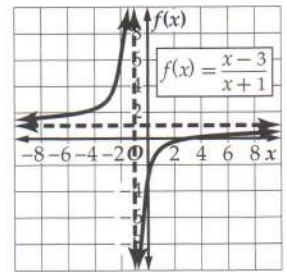
إجابة ممكنة: (25)



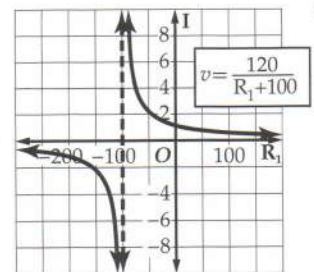
(11)



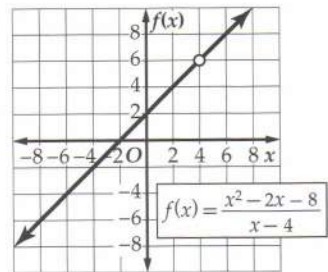
(12)



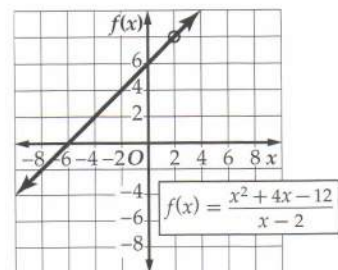
(13)



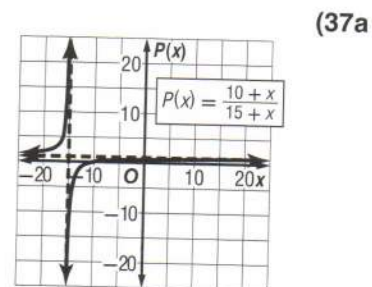
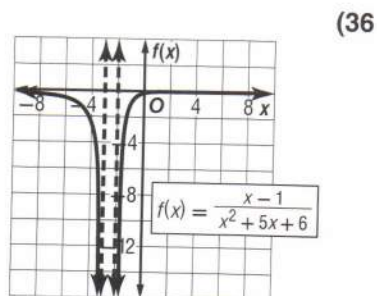
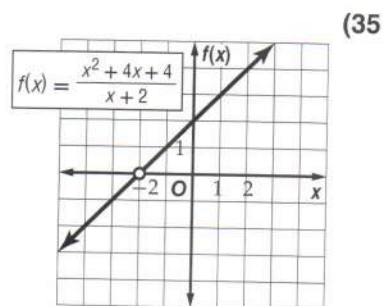
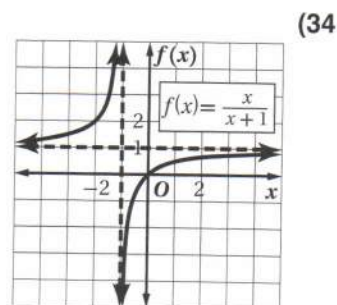
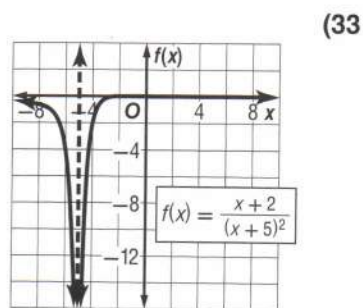
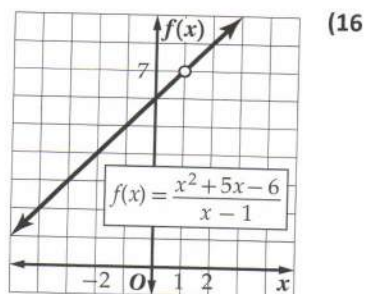
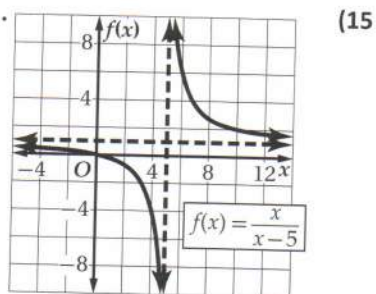
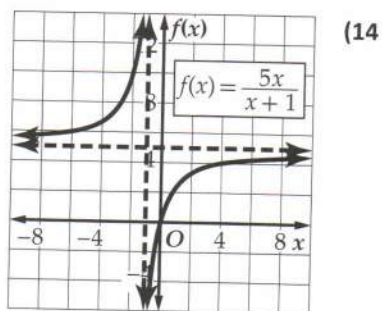
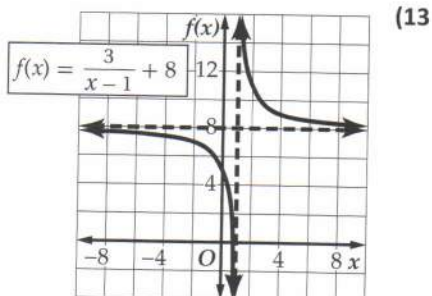
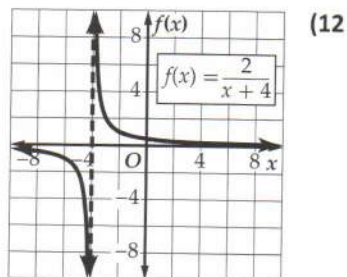
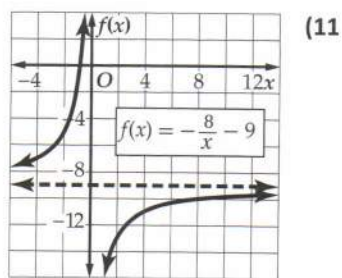
(14a)



(15)



(16)



التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (61)

العنوان	الدرس 1-6 حصتان	الدرس 2-6 (3) حصص	الدرس 3-6 (3) حصص	الدرس 4-6 حصتان
المتابعات بوصفها دوال	المتابعات والامتدادات الحسابية	المتابعات والامتدادات الحسابية	المتابعات والامتدادات الهندسية	المتسلسلات الهندسية غير المنتهية
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> ربط المتابعات الحسابية بالدوال الخطية. ربط المتابعات الهندسية بالدوال الأسية. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال المتابعات الحسابية. إيجاد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال المتابعات الهندسية. إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية. كتابة الكسر العشري الدوري على صورة كسر اعتيادي.
المفردات	المتابعة الحد المتابعة المنتهية المتابعة غير المنتهية المتابعة الحسابية أساس المتابعة الحسابية (الفرق المشترك) المتابعة الهندسية أساس المتابعة الهندسية (النسبة المشتركة)	الأوساط الحسابية المتسلسلة المتسلسلة الحسابية المجموع الجزئي رمز المجموع	الأوساط الهندسية المتسلسلة الهندسية	المتسلسلة الهندسية غير المنتهية المتسلسلة المتقاربة المتسلسلة المتباعدة مالانهاية
التمثيلات المتعددة	ص (76)	ص (89)		
مصادر الدرس	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (10) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (11) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (12) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (13) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	الرسائل الفورية، ص (67)	السبورة التفاعلية، ص (72)	عرض تقديمي، ص (81)	الرسائل النصية، ص (87)
تنويع التعليم	ص (67, 69)	ص (72, 75)	ص (80, 83)	ص (87, 90)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (84)

المفاتيح: **دون** : دون المتوسط **ضمن** : ضمن المتوسط **فوق** : فوق المتوسط

المجموع	المراجعة و التقييم	التدريس
22 حصة	4	18

الدرس 6-6 (3) حصص	توسع 6-5 حصة	الدرس 6-5 (3) حصص	توسع 6-4 حصة
البرهان بالاستقراء الرياضي	معمل الجبر: التوافق ومثلث باسكال	نظرية ذات الحدين	معمل الحاسبة البيانية: النهايات
<ul style="list-style-type: none"> إثبات صحة جمل رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي. إثبات خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال التوافق ومثلث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال مثلث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك $(a + b)^n$. استعمال نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف نهاية متتابعة.
الاستقراء الرياضي فرضية الاستقراء		مثلث باسكال نظرية ذات الحدين	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	المواد اللازمة	مصادر المعلم للأنشطة الصفية	المواد اللازمة
<ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق 	<ul style="list-style-type: none"> الحاسبة العلمية 	<ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق 	<ul style="list-style-type: none"> الحاسبة البيانية
كتاب التمارين		كتاب التمارين	
<ul style="list-style-type: none"> ص (15) دون ضمن فوق 		<ul style="list-style-type: none"> ص (14) دون ضمن فوق 	
عرض تقديمي، ص (98)		تسجيل فيديو، ص (94)	
ص (98, 100)		ص (93, 95)	

التقييم الختامي



- دليل الدراسة و المراجعة ص (101-104)
- اختبار الفصل ص (105)
- اختبار تراكمي ص (108, 109)

المعالجة

التشخيص

التقويم
التشخيصي

بداية الفصل 6

مخطط المعالجة، ص (63)

التهيئة للفصل 6، ص (63)

بداية كل درس

مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب

فيما سبق، والآن، لماذا؟

خلال كل درس ويعدده

التقويم
التكويني

تدريبات المهارات، الفصل 6
تنوع التعليم
تنوع الواجبات المنزلية
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
www.obeikaneducation.com

تحقق من فهمك، لكل مثال
تأكد
مسائل مهارات التفكير العليا
مراجعة تراكمية
أمثلة إضافية
تنبيه!
الخطوة 4، التقويم
الاختبارات القصيرة، ص (30, 31)
www.obeikaneducation.com

منتصف الفصل

تدريبات المهارات، الفصل 6
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
www.obeikaneducation.com

اختبار منتصف الفصل، ص (84)
اختبار منتصف الفصل، ص (32)
www.obeikaneducation.com

نهاية الفصل

تدريبات المهارات، الفصل 6
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
www.obeikaneducation.com

دليل الدراسة والمراجعة، ص (101-104)
اختبار الفصل، ص (105)
اختبار تراكمي، ص (108, 109)
www.obeikaneducation.com

بعد انتهاء الفصل 6

التقويم
الختامي

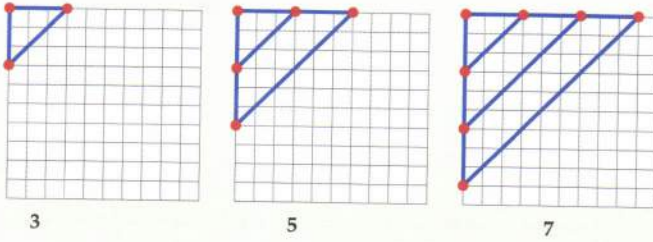
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
www.obeikaneducation.com

اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B، ص (34-39)
اختبار الفصل، النموذج 3، ص (40, 41)
اختبار المفردات، ص (33)
اختبار الفصل ذو الإجابة المطوَّلة، ص (42)
اختبار تراكمي، ص (43-45)
www.obeikaneducation.com

البديل 3 فوق المتوسط

من خلال الرسوم والأشكال، يمكن للطلبة استعمال عناصر هندسية مختلفة لنمذجة مسائل تتعلق بالمتتابعات الحسابية والهندسية، اطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة، ثم كتابة قاعدة للحد العام للمتتابعة.

على سبيل المثال، تُمثل الأشكال أدناه متتابعة حسابية لعدد النقاط الحمراء، وقاعدة الحد العام لها هي $a_n = 3 + 2(n - 1)$.



البديل 1 جميع المستويات فوق ضمن دون

اطلب إلى الطلبة عمل مخطط يُبين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية، مع توضيح معاني المتغيرات في كل منهما.

صمّم مسابقة ودية بين مجموعتين من الطلبة: مجموعة تستعمل مفكوك ذات الحدين، ومجموعة تقوم بعملية ضرب كثيرات الحدود.

اكتب مقدارًا مثل $(2x + y)^5$ على السبورة، واطلب إلى كل مجموعة أن تجد مفكوك هذا المقدار بطريقة تعتمد على اسم المجموعة.

قارن بين النتيجتين موضحًا الزمن اللازم لإيجاد المفكوك لدى كل من المجموعتين.

البديل 2 دون المتوسط دون

لتوضيح مفهوم الاستقراء الرياضي وكيف يتم، ضع خمس قطع من حجارة الدومينو في خط مستقيم، بحيث تكون إحداها أمام الأخرى والمسافة بين كل قطعتين متتاليتين أقل من ارتفاع القطعة، ثم أسقط القطعة الأولى. واسأل الطلبة: ماذا يلاحظون؟ أخبرهم بناءً على ما شاهدوه أن القطعة رقم 29 في مجموعة كبيرة من قطع الدومينو ستسقط إذا قمنا بإسقاط القطعة الأولى. ضع 30 قطعة للتحقق من هذا الاستنتاج.

اسأل الطلبة ماذا سيحدث للقطعة رقم 500 وأخبرهم أنهم في هذه الحالة يستعملون الاستقراء الرياضي.

وضّح لهم أن قولهم إن الجملة الرياضية صحيحة عندما $n = 1$ ، يُشبه إثبات أنه يمكن إسقاط القطعة الأولى من قطع الدومينو، وأن إثبات أن الجملة صحيحة عند $k + 1$ إذا كانت صحيحة عند k ، يُشبه إثبات أن سقوط أي قطعة تعني سقوط القطعة التالية لها؛ أي أنه إذا سقطت القطعة رقم (1) فإن القطعة رقم (2) ستسقط، وإذا سقطت القطعة رقم (2) فإن القطعة رقم (3) ستسقط، وهكذا.

ملخص الدروس

6-1 المتتابعات كدوال

- المتتابعة هي مجموعة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة، ويُسمى كل عدد في المتتابعة حدًا، وتكون المتتابعة:
- منتهية عندما يكون عدد حدودها محدودًا.
- غير منتهية عندما يكون عدد حدودها غير محدود.
- حسابية عندما يكون الفرق بين أي حد والحد السابق له عددًا ثابتًا، ويُسمى هذا الفرق أساس المتتابعة أو الفرق المشترك فيها.
- هندسية عندما تكون النسبة بين أي حد والحد السابق له ثابتة، وتُسمى هذه النسبة (أساس المتتابعة الهندسية) إضافة إلى تسميتها النسبة المشتركة.
- غير حسابية وغير هندسية عندما لا يكون للمتتابعة أساس.
- المتتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداهها أعداد حقيقية.
- المتتابعة الحسابية دالة خطية، أما المتتابعة الهندسية ذات الأساس الموجب فهي دالة أسية.

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

- يمكن إيجاد أي حد a_n في المتتابعة الحسابية إذا عُرف الحد الأول a_1 والأساس d . باستعمال الصيغة $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، حيث n عدد طبيعي.
- يمكن إيجاد مجموع أول n حدًا من متتابعة حسابية باستعمال إحدى الصيغتين $S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ أو $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$ ، ويمكن استعمال رمز المجموع للتعبير عن مجموع المتسلسلة، فعلى سبيل المثال: $\sum_{n=1}^3 (n^2 + 2)$ يُمثل مجموع ثلاثة حدود يمكن الحصول عليها بتعويض القيم 1, 2, 3 على التوالي مكان n .

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

- تُستعمل الصيغة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ لإيجاد قيمة أي حد a_n في متتابعة هندسية؛ حيث a_1 الحد الأول، r أساس المتتابعة.
- يمكن الحصول على متسلسلة هندسية بوضع إشارة + بين كل حدين من حدود المتتابعة الهندسية. وتُستعمل الصيغتان:
- $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ ، $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ حيث $r \neq 1$ لإيجاد مجموع أول n حدًا من متتابعة هندسية.

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 6

- حساب قيمة عبارة جبرية.
- البحث عن نمط والتعبير عن التعميمات جبريًا.
- حل المعادلات.
- تبسيط كثيرات الحدود.
- استعمال التبرير الاستقرائي لصياغة تخمين.

الفصل 6

- ربط المتتابعات الحسابية بالدوال الخطية والمتتابعات الهندسية بالدوال الأسية.
- إيجاد قيمة حد معين في متتابعة ومجموع متسلسلة هندسية أو حسابية منتهية.
- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية وكتابة الكسور الدورية على شكل كسر اعتيادي.
- استعمال مثلث باسكال ونظرية ذات الحدين، لإيجاد مفكوك قوى ذات الحدين.
- استعمال الاستقراء الرياضي لإثبات صحة جمل رياضية.

ما بعد الفصل 6

التهيئة لصف الثالث الثانوي

- التعبير عن الأنماط باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- استعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية وغيرها في حل مسائل واقعية.
- وصف نهايات المتتابعات وتطبيق خواصها للتحقق من تقارب المتسلسلات وتباعدها.
- تطبيق المتتابعات والمتسلسلات في حل مسائل تتعلق بالمجاميع ومفكوك ذات الحدين.

مشروع الفصل
محميات

- كلف الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، مع اختيار إحدى المحميات الطبيعية في المملكة (مثلاً: محمية الخنفة)، ثم اختيار أحد أنواع الحيوانات التي تعيش فيها، مثل غزال الإدمي، وجدير بالذكر أنه توجد في هذه المحمية أعداد قليلة من غزال الریم، بالإضافة إلى الثعابين والأرانب البرية وغيرها.
- على افتراض وجود زيادة أو نقصان في أعداد الحيوانات في المحمية، اطلب إلى كل مجموعة إعداد جدول إحصائي بأعداد غزال الإدمي في المحمية خلال الأعوام 1415 حتى 1432 هـ، ثم تمثيل بيانات الجدول بيانياً لاستخلاص النتائج.
- اطلب إلى كل مجموعة تحديد مقادير الزيادة أو النقصان في أعداد هذا النوع في كل عام وتوقع عدد الغزلان في المحمية في عام 1433 هـ، ثم اطلب إليهم أن يحددوا إذا كانت هذه الزيادة أو النقصان ثابتة في كل عام أم لا.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملاً الطريقة الآتية:

التعريف: الحد هو كل عدد في المتتابعة أو المتسلسلة.

مثال: الحد الرابع في المتتابعة 29, 20, 11, 2, 29, ...

سؤال: ما الحد الأول في المتتابعة السابقة؟ 2

فيما سبق:

درست تبسيط العبارات الجبرية، وإيجاد قيمها.

والآن:

- استعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدين.
- أبرهن جملاً رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا:

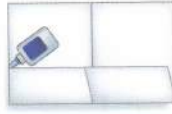
بذور، تظهر المتتابعات بأشكال شتى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلاً تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبناع الشمس.



منظم أفكار
المطويات

المتتابعات والمتسلسلات، اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئاً بورقة واحدة A4.

- 1 اطو الورقة من المنتصف كما في الشكل.
- 2 أعد الورقة إلى وضعها ثم اطو الجانب الأطول بمقدار 5 سنتمترات لعمل جيب كما في الشكل.
- 3 ألق الطرفين لعمل الجيب.
- 4 ضع عنواناً لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقاً أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



منظم أفكار
المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنوع التعليم

- نموذج بناء المفردات، ص (28).
- يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم في أثناء دراستهم المتتابعات والمتسلسلات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1
ضمن المتوسط

إذا ← أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،

فقم ← بمراجعة حل المعادلات بمتغير واحد، وإيجاد قيم العبارات الجبرية، وتمثيل الأزواج المرتبة بيانياً.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2
دون المتوسط

إذا ← أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،

فقم ← بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة سريعة

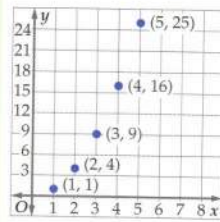
مثال 1

حل المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$$\begin{aligned} \text{بطرح } 400 \text{ من الطرفين} & \quad -375 = 3x^3 \\ \text{بقسمة الطرفين على } 3 & \quad -125 = x^3 \\ \text{بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين} & \quad \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3} \\ \text{بالتبسيط} & \quad -5 = x \end{aligned}$$

مثال 2

مثل الدالة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانياً.



ثم حدد كلاً من المجال والمدى. مجال الدالة هو القيم الممكنة جميعها للمتغير المستقل (x) . لذلك يكون مجال الدالة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أما مدى الدالة فهي القيم الممكنة جميعها للمتغير التابع (y) . إذن مدى الدالة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $x = -2, y = -3$ ، فجد قيمة: $2 \cdot 3^x + y$

$$\begin{aligned} \text{بالتعويض} & \quad 2 \cdot 3^x + y = 2 \cdot 3^{-2} + (-3) \\ \text{بالتبسيط} & \quad = 2 \cdot 3^{-5} \\ \text{تعريف القوة السالبة} & \quad = \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243} \end{aligned}$$

اختبار سريع

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

(1) $x = -12 \quad -6 = 7x + 78$

(2) $x = \pm 4 \quad 768 = 3x^4$

(3) $x = 3 \quad 23 - 5x = 8$

(4) $x = -3 \quad 2x^3 + 4 = -50$

(5) نباتات: يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟ 9 صفوف

مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً: 6-9 انظر الهامش.

(6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

(7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

(8) $\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), (5, \frac{1}{3})\}$

(9) $\{(1, 1), (2, 2), (3, \frac{5}{2}), (4, \frac{11}{4}), (5, \frac{23}{8})\}$

(10) حضنة تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضنة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهرياً. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضنة الشهري عندما تضم c طفلاً. فما ربح الحضنة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلاً؟ 16000 ريال

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند قيم المتغيرات المعطاة.

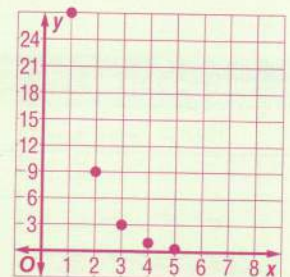
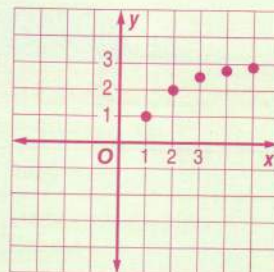
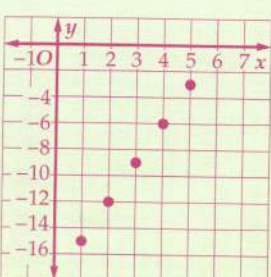
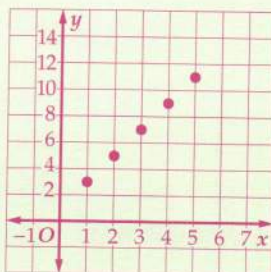
(11) $\frac{a}{3}(b+c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

(12) $r + (n-2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

(13) $x \cdot y^2 + 1$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

(14) $\frac{a(1-bc)^2}{1-b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

إجابات:



المتتابعات بوصفها دوال Sequences as Functions



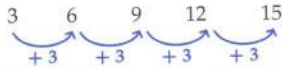
لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كل صف كما يأتي: مشارك واحد في الصف الأول، وثلاثة في الصف الثاني، وخمسة في الصف الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد أو ترتيب معين ويُسمى كل عدد في المتتابعة **حدًا**. ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدد من الحدود مثل: 6, 4, 2, 0, -2، أو **غير منتهية** حيث تستمر إلى ما لا نهاية مثل ... 3, 2, 1, 0. ويُرمز للحد الأول في المتتابعة بالرمز a_1 ، وللحد الثاني بالرمز a_2 ، وهكذا.

مفهوم أساسي		المتتابعات كدوال	
التعبير اللفظي: المتتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداهما مجموعة من الأعداد الحقيقية.			
الرموز:	عناصر المجال:	1 2 3 ... n	ترتيب الحد
	عناصر المدى:	$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$	حدود المتتابعة
أمثلة:	متتابعة منتهية	3, 6, 9, 12, 15	متتابعة غير منتهية
	المجال: {1, 2, 3, 4, 5}		المدى: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
	المدى: {3, 6, 9, 12, 15}		مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

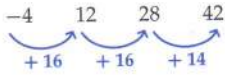
يُحدّد كل حد في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد الذي يسبقه مباشرة. وتُسمى القيمة الثابتة **الفرق المشترك أو الأساس**. فالمتتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كل حد على الحد الذي يسبقه بمقدار 3.



مثال 1 تحديد المتتابعات الحسابية

بيّن إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا:

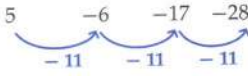
(b) $-4, 12, 28, 42, \dots$



الفرق غير ثابت
المتتابعة ليست حسابية

(1B) $-6, 3, 12, 21, \dots$ نعم

(a) $5, -6, -17, -28, \dots$



الفرق الثابت هو -11
المتتابعة حسابية

(1A) $7, 12, 16, 20, \dots$ لا

تحقق من فهمك

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

تحليل الدوال الخطية والدوال الأسية.

الدرس 6-1

ربط المتتابعات الحسابية بالدوال الخطية.

ربط المتتابعات الهندسية بالدوال الأسية.

ما بعد الدرس 6-1

استعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية وغيرها، في حل مسائل من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- ما النمط الذي تمثّله صفوف المشاركين في المهرجان؟ $1, 3, 5, 7, \dots$
- كيف يمكنك إيجاد الأعداد الأربعة التالية في هذا النمط؟ بإضافة 2 لكل صف تجد عدد الأشخاص في الصف التالي.
- ما أعداد الصفوف الأربعة التالية في النمط؟ $9, 11, 13, 15$
- هل تتوقع أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ لا؛ لأن عدد المشاركين في المهرجان الكشفي محدود.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (67)	• تنوع التعليم، ص (67, 69)	• تنوع التعليم، ص (69)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2

تمثيل المتتابعة الحسابية بيانياً

في المتتابعة الحسابية: $18, 14, 10, \dots$

(a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أي حد من حدود المتتابعة من الحد اللاحق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $10 - 14 = -4$. ويُمثل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي. أضف -4 للحد الأخير المُعطى.

وهكذا أضف -4 لكل حد من الحدود التالية.

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & 6 & 2 & -2 & -6 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ +(-4) & +(-4) & +(-4) & +(-4) & & & \end{array}$$

إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: $6, 2, -2, -6$

(b) مثل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانياً.

مجال المتتابعة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

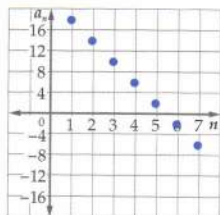
ومدى المتتابعة هو المجموعة: $\{18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, \dots\}$

ولذلك تُمثل هذه الحدود من المتتابعة بيانياً بالشكل المجاور.

تحقق من فهمك

(2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية $18, 11, 4, \dots$

ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً. **انظر الهامش**



إرشادات للدراسة

الفرق بين كل حدين متتاليين (الحد - سابقه) ابتداءً من الحد الثاني.

المتتابعات الحسابية

مثال 1 يبيّن كيفية التأكد من وجود أساس للمتتابعة؛ لتمييز المتتابعة الحسابية عن غيرها.

مثال 2 يبيّن كيفية استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها وتمثيلها بيانياً.

مثال 3 يبيّن كيفية إيجاد أحد حدود المتتابعة الحسابية؛ لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 يبيّن ما إذا كانت كل من المتبعتين الآتيتين حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا:

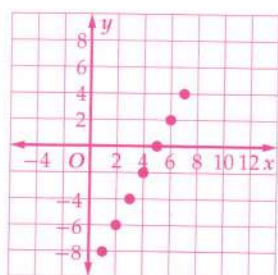
(a) $3, -8, -13, -23, \dots$ لا

(b) $8, -2, 4, 10, \dots$ نعم

2 في المتتابعة الحسابية $8, -6, -4, \dots$

(a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة. $-2, 0, 2, 4$

(b) مثل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانياً.



3 فرق كسفية استعمال المعلومات الواردة في المثال 3؛ لتحديد عدد المشاركين في الصف رقم 20. 39

لاحظ أن النقاط التي تُمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالة خطية متغيرها المستقل هو رقم الحد n ومتغيرها التابع هو الحد a_n والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

مثال 3 من واقع الحياة

الفرق الكسفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم بما أن الفرق الثابت بين كل حد والحد السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افرض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ، $m = 2$. ثم حلّ المعادلة عندما $x = 14$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل والنقطة}$$

$$m = 2, (x_1, y_1) = (3, 5) \quad (y - 5) = 2(x - 3)$$

$$\text{بالضرب} \quad y - 5 = 2x - 6$$

$$\text{بجمع 5 إلى كل من طرفي المعادلة} \quad y = 2x - 1$$

$$\text{بتعويض 14 مكان } x \quad y = 2(14) - 1$$

$$\text{بالتبسيط} \quad y = 28 - 1 = 27$$

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركاً.

تحقق يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صف، بدءاً من الصف الأول حتى نصل إلى الصف الرابع عشر.

تحقق من فهمك

(3) نقود: يتقاضى عليّ نظير عمله أجرة مقدارها 100 ريال يومياً، ويحصل على زيادة على أجرته اليومية مقدارها 5 ريالات كل 3 شهور. فكم تصبح أجرته اليومية بعد مرور 3 سنوات؟ **160 ريالاً**

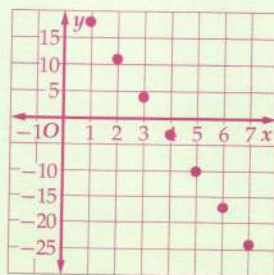


الرياض مع الحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظمون بعمل ترتيبات فاصلة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

إجابة (تحقق من فهمك):

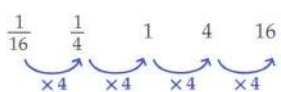
(2) $-3, -10, -17, -24$



تنبيه

تجنب الأخطاء المفاهيمية: تأكد من فهم الطلبة أن n في a_n تُمثل ترتيب الحد، وليست أساً.

المتتابعة الهندسية: المتتابعة الهندسية نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أي حد من حدودها بضرب الحد السابق له مباشرة في عدد ثابت يسمى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.



لاحظ أن المتتابعة $1/16, 1/4, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أي أن كل حد في المتتابعة هو 4 أمثال الحد السابق له مباشرة.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بين إذا كانت كل من المتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

(a) $-2, 6, -18, 54, \dots$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$\frac{6}{-2} = -3, \frac{-18}{6} = -3, \frac{54}{-18} = -3$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

(b) $8, 16, 24, 32, \dots$

$\frac{16}{8} = 2, \frac{24}{16} = 1.5, \frac{32}{24} = 1.\bar{3}$

بما أن النسب غير متساوية؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

(4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \dots$ نعم (4B) $1, 3, 7, 15, \dots$ لا

يمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانياً

المتتابعة: $32, 8, 2, \dots$ متتابعة هندسية.

(a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $1/4$ أو $1/8$

الخطوة 2: لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في العدد $1/4$

وهكذا بضرب كل حد في العدد $1/4$ نحصل على الحدود الآتية.

$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

إذن الحدود الثلاثة التالية هي $1/2, 1/8, 1/32$

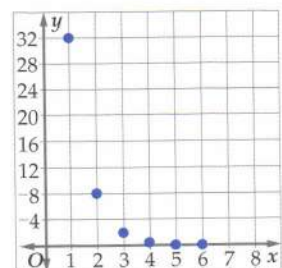
(b) مثل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانياً.

المجال: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

المدى: $\{32, 8, 2, 1/2, 1/8, 1/32, \dots\}$

تحقق من فهمك

(5) أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية: $7, 21, 63, \dots$ ثم مثل الحدود الخمسة الأولى بيانياً. انظرا



المتتابعات الهندسية

مثال 4 يبين كيفية التأكد من وجود نسبة مشتركة (أساس) بين كل حدين متتاليين من حدود المتتابعة للحكم على أن المتتابعة هندسية.

مثال 5 يبين كيفية استعمال "أساس المتتابعة الهندسية" لإيجاد حدود أخرى من المتتابعة، ومن ثم تمثيلها بيانياً.

مثال 6 يبين كيفية تحديد نوع المتتابعة حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك.

تنبيه!
النسب إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحد السابق له فجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة
النسبة بين كل حدين متتاليين الحد ÷ سابقه ابتداء من الحد الثاني.

مثالان إضافيان

4 بين إذا كانت كل من المتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

(a) $8, 20, 50, 125, \dots$ نعم

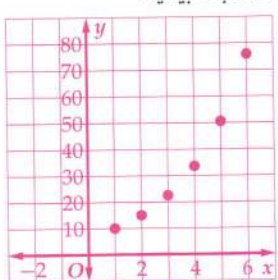
(b) $19, 30, 41, 52, \dots$ لا

5 المتتابعة: $10, 15, 22.5, \dots$ متتابعة هندسية.

(a) جد الحدود الثلاثة التالية.

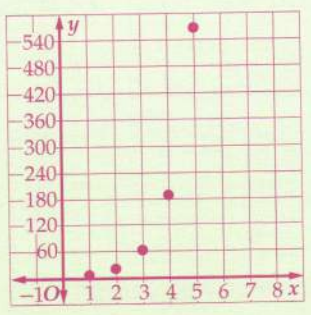
$33.75, 50.625, 75.9375$

(b) مثل الحدود الستة الأولى من المتتابعة بيانياً.



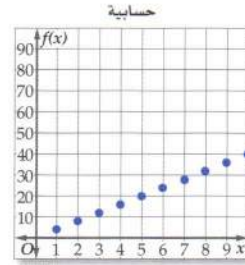
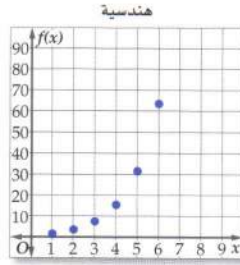
إجابة (تحقق من فهمك):

(5) 189, 567



هي الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 0$ ، $b \neq 1$ وهي متصلة ومتباينة ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداهما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خط تقارب أفقي هو المحور x ، ويمر منحناها بالנקطة $(0, 1)$ دائماً.

تفحص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّي وليس خطياً كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بالدالة $f(x) = r^x$ ، حيث r أساس المتتابعة الهندسية و $r > 0$ و $r \neq 1$



x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2	4	8	16	32	64

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

يمكن استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6

تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

(a) 16, 24, 36, 54, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$\times \quad 36 - 24 = 12 \quad 54 - 36 = 18$$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$$\checkmark \quad \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \frac{36}{24} = \frac{3}{2} \quad \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$

بما أن النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

(b) 1, 4, 9, 16, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$\times \quad 9 - 4 = 5 \quad 16 - 9 = 7$$

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.

$$\times \quad \frac{9}{4} = 2.25 \quad \frac{16}{9} = 1.\bar{7}$$

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس عدداً ثابتاً، وكذلك النسبة بين كل حدين متتاليين ليست ثابتة أيضاً؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

(c) 23, 17, 11, 5, ...

أوجد الفرق بين كل حدين متتاليين.

$$\checkmark \quad 17 - 23 = -6 \quad 11 - 17 = -6 \quad 5 - 11 = -6$$

بما أن الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

تحقق من فهمك

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

$$-4, 4, 5, -5, \dots \quad (6C) \quad 2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \dots \quad (6B) \quad \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots \quad (6A)$$

(6A) حسابية، أساس المتتابعة $\frac{1}{3}$
(6B) هندسية، أساس المتتابعة $-\frac{3}{4}$
(6C) غير ذلك، لا يوجد فرق ثابت ولا نسبة ثابتة.

مثال إضافي

6

حدّد نوع كل من المتتابعات الآتية إذا كانت حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك.

(a) 13, 25, 37, 49, ...

حسابية، الأساس = 12

(b) 2, 5, 9, 14, ... غير ذلك، لا

يوجد فرق ثابت ولا نسبة ثابتة.

(c) 6, -12, 24, -48, ...

هندسية، الأساس = -2

المحتوى الرياضي

المتتابعات ليست كل القوائم العددية التي تتبع أنماطاً معينة، هي متتابعات هندسية أو متتابعات حسابية.

التعليم باستعمال التقنيات

الرسائل الفورية اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يكتب أحدهما الحدود الأربعة الأولى في متتابعة، ثم يرسلها إلى زميله الذي سيقوم بدوره بكتابة الحدود الثلاثة التالية ثم يعيدها إلى زميله. ويمكن بعد ذلك للزميلين أن يتبادلا الأدوار.

تنوع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات صغيرة لمناقشة وتحديد الأخطاء التي وقعوا فيها حول المفاهيم الأساسية في المتتابعات الحسابية والهندسية. واقترح عليهم أن يساعد بعضهم بعضاً في ترتيب وإكمال ملاحظاتهم حول هذه المواضيع.

التقويم التكويني

تعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

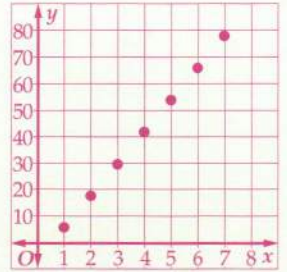
مستعمل الجدول أسفل هذه الصفحة تعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

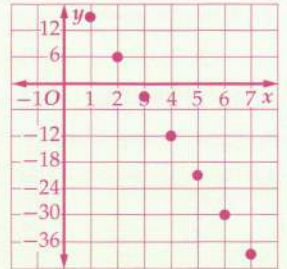
حتاج الطلبة إلى ورق رسم بياني للإجابة عن الأسئلة 3, 4, 8, 9, 15-17, 23-25.

جابات:

42, 54, 66, 78 (3)



-12, -21, -30, -39 (4)



- 1 مثال بين إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.
- (1) $8, -2, -12, -22, \dots$ نعم (2) $-19, -12, -5, 2, 9$ نعم
- 2 مثال أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً:
- (3) $15, 6, -3, \dots$ (4) $3, 4, 6, 18, 30, \dots$ انظر الهامش
- 3 مثال 5 توفير: يوفر سعيد 250 ريالاً شهرياً، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:
- (a) المبلغ الذي يصبح معه بعد مرور 8 أشهر. 3000 ريال
- (b) الوقت الذي يحتاجه ليصبح معه 7250 ريالاً، إذا استمر يوفر بالطريقة ذاتها. 25 شهراً
- 4 مثال حدّد إذا كانت المتتابعة في كل مما يأتي متتابعة هندسية أم لا.
- (6) $4, 12, 36, 108, \dots$ نعم (7) $7, 14, 21, 28, \dots$ لا
- 5 مثال أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً:
- (8) $250, 50, 10, 2, \dots$ (9) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \dots$
- 6 مثال حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك. (11) هندسية، الأساس $-\frac{1}{2}$
- (10) $5, 1, 7, 3, 9, \dots$ (11) $200, -100, 50, -25, \dots$ (12) $12, 16, 20, 24, \dots$ حسابية الأساس 4

تدرب وحل المسائل

- 1 مثال بين إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.
- (14) $9, 3, 0, -3, -9, \dots$ لا (15) $9, 5, 9, 13, 17, \dots$ نعم
- 2 مثال أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً:
- (16) $5, 15, 25, 35, \dots$ (17) $2, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \dots$
- 3 مثال 18 تنظيم قاعات: يوجد 28 مقعداً في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كل صف تالي يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفاً من المقاعد، فكم مقعداً يوجد في الصف الأخير؟ 74 مقعداً
- 19 تمارين قوة: يقوم عليّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويخطط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدة الاستعمال بمعدل دقيقة وثلاثين ثانية يومياً.
- (a) ما مدة استعمال عليّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟ 30 دقيقة و 30 ثانية.
- (b) ما أول يوم سيعتعمل فيه الجهاز مدة ساعة أو أكثر؟ في اليوم الثامن والثلاثين
- (c) هل يُعدّ استمرار عليّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقياً؟ لماذا؟
- 4 مثال بين إذا كانت المتتابعة في كل مما يأتي متتابعة هندسية أم لا.
- (20) $21, 14, 7, \dots$ لا (21) $-27, 18, -12, \dots$ نعم (22) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \dots$ لا
- 5 مثال أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثل المتتابعة بيانياً:
- (23) $81, 108, 144, \dots$ (24) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$ (25) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$
- 6 مثال حدّد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية، أم هندسية أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:
- (26) $3, 12, 27, 48, \dots$ (27) $1, -2, -5, -8, \dots$ حسابية، الأساس -3

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	36-43, 13-30
ضمن المتوسط	13-29 فردي, 32-34, 36-39, 39-43
فوق المتوسط	22-43

(29) هندسية؛ الأساس $\frac{1}{5}$

(28) 12, 36, 108, 324, ... هندسية، الأساس 3 (29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \dots$

(30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$ حسابية؛ الأساس $\frac{1}{2}$ (31) 6, 9, 14, 21, ...

(31) غير ذلك، لا يوجد فرق ثابت ولا توجد نسبة ثابتة.

(32) **قراءة:** أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضم 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًا؟ **86 صفحة**

(33) **نقص القيمة:** تنقص قيمة سيارة ماجد بمعدل 15% سنويًا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات تقريبًا الجواب إلى أقرب ريال؟ **22185 ريالاً**

(34) **طي الأوراق:** عند طي ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm وأمكن طيها 37 مرة، فكم يصبح سمكها؟ **حوالي 13744 km**



الربط مع الحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدل 15% إلى 20% سنويًا، وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

مسائل مهارات التفكير العليا

(35) **تحدي:** إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هي هذه الحدود؟ **3, 2, 7**

(36) **مسألة مفتوحة:** أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كل منها كما يأتي 3, 9, ... بحيث تكون إحداها حسابية والثانية هندسية والثالثة لا حسابية ولا هندسية. **انظر الهامش**

(37) **تبرير:** إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$ ، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$ ؟ **انظر الهامش**

(38) **اكتب:** صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة توضيح كيفية الحصول على أي حد في متتابعة حسابية أو هندسية، بمعلومية الحدود الأولى منها.

إجابات:

(36) **إجابة ممكنة:**

حسابية:

3, 9, 15, 21, ...

هندسية:

3, 9, 27, 81, ...

لا حسابية ولا هندسية:

3, 9, 21, 45, ...

(37) **إجابة ممكنة:** إذا كان أساس المتتابعة

الهندسية r حيث $|r| < 1$ ، فإن زيادة قيمة n تجعل القيمة المطلقة لكل حد

تقل وتقترب من الصفر؛ لأننا نضرب الحد في كسر أصغر من الواحد.

وعندما تكون $|r| \geq 1$ ، فإن القيمة المطلقة للحدود تتزايد وتقترب من

لانهاية؛ لأن الضرب يتم في عدد أكبر من 1.

تدريب على اختبار

(39) **إجابة قصيرة:** صالة مستطيلة الشكل بُعِداها 13 مترًا، و11 مترًا. إذا أردنا وضع سجادة تُغطي الصالة كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالاً. **8580 ريالاً**

(40) ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$ ؟ **D**

C $\frac{9}{4}$

A $\frac{11}{8}$

D $\frac{81}{32}$

B $\frac{27}{16}$

مراجعة تراكمية

(41) حل المعادلة: $9 = 10 - \frac{3}{x-3}$ (الدرس 5-6) **6**

أوجد معادلة المستقيم في كلِّ ممَّا يأتي: مهارة سابقة

(42) المار بالنقطة (4, 6)، وميله 0.5. **$y = 0.5x + 1$**

(43) المار بالنقطتين (1, 3)، $(8, -\frac{1}{2})$. **$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$**

الدرس 6-1 المتتابعات بوصفها دوال 39

تنويع التعليم

ضعن فوق

توسّع اطرح السؤال التالي على الطلبة "هل المتتابعة 1, 2, 4, 8, 16, ... حسابية أم هندسية؟ كيف عرفت ذلك؟" **هندسية أساسها 2.** ثم اطرح السؤال: "إذا تم استبدال كل حد من حدود المتتابعة 1, 2, 4, 8, 16, ... بمقلوبه، فهل ستبقى المتتابعة هندسية؟ كيف تقرر ذلك؟" **نعم، أساس المتتابعة $\frac{1}{2}$.** اطلب إلى الطلبة كتابة متتابعات هندسية خاصة بهم، ثم اطلب إليهم تحديد إذا كانت المتتابعة الناتجة عن مقلوب كل حد هي متتابعة هندسية أيضًا أم لا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 6

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

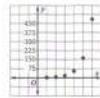
الاسم: التاريخ:

(تنمة)

6-1 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات بوصفها دوال

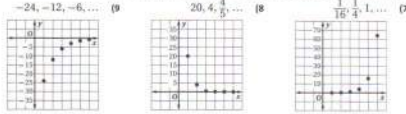
المتابع	التعريف	المصطلح
مثال الأساس في متتابعة هندسية حدودها الاشتاتية ... 5, 10, ... هو $10 \div 5 = 2$	$F = a, ar, ar^2, \dots$	أساس المتتابعة الهندسية
الحد الرابع في متتابعة هندسية الحد الأول منها 5، وأساسها 2 هو $5(2^{4-1}) = 40$	الحد n هو $a \cdot r^{(n-1)}$ حيث a الحد الأول، و r الأساس.	الحد النوني في المتتابعة الهندسية

مثال
أوجد الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة الهندسية ... 2, 6, 18, ... ثم مقل المتابعة بيانياً.
أوجد الأساس بقسمة حدين متتاليين.
 $r = 3$ و $3 \div 2 = 1.5$ و $6 \div 3 = 2$ و $18 \div 6 = 3$
الآن احرب الحد الثالث للمتتابعة في العدد 3، ثم واصل الضرب في العدد 3 حتى تجد الحدود الثلاثة المطلوبة.
الحدود الثلاثة التالية هي 54, 162, 486
أوجد المجال والمدى للحدود الستة الأولى في المتتابعة.
المجال: (1, 2, 3, 4, 5, 6)
المدى: (2, 6, 18, 54, 162, 486)



تقاربن

أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مقل المتابعة بيانياً:



الفصل ٦، المتتابعات والمتسلسلات

7

الفصل الثاني التتالي

دون

تدريبات إعادة التعليم (6)

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعات الحسابية، المتتابعة الحسابية هي متتابعة من الأعداد يتبع كل حد فيها من إضافة أساس المتابعة (التفرق المشترك) إلى الحد السابق له.

الحد النوني في متتابعة $a, a+d, a+2d, \dots$ حيث a هو الحد الأول، و d أساس المتتابعة، n أي عدد حسابية صحيح موجب.

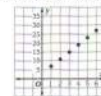
مثال
أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... 7, 11, 15, ... ثم مقل المتابعة البيانية السبعة الأولى للمتتابعة بيانياً.

أوجد أساس المتتابعة عن طريق طرح حدين متتاليين.

$11 - 7 = 4$ و $15 - 11 = 4$ ، لذا فإن $d = 4$

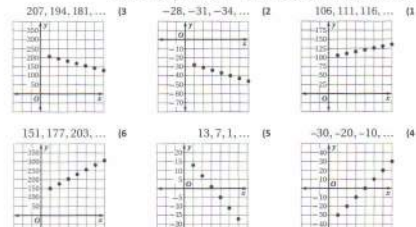
الآن اجمع 4 للحد الثالث من المتابعة، ثم واصل الجمع بإضافة 4 حتى تجد الحدود الأربعة المطلوبة. الحدود الأربعة التالية هي: 19, 23, 27, 31

مقل كل نقطة من النقط (7, 31), (6, 27), (5, 23), (4, 19), (3, 15), (2, 11), (1, 7) على المستوى الإحداثي.



تقاربن

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مقل المتابعة بيانياً:



الفصل ٦، المتتابعات والمتسلسلات

6

الفصل الثاني التتالي

فوق

تدريبات حل المسألة (9)

الاسم: التاريخ:

(4) جعلين، تحاول علود إيجاد مقعداً في مسرح، والقاعد مرتبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين. وفي كل صف 30 مقعداً.



(1) توهير، وقر عائله 370 ريالاً لشري دراجه، واستمر يتدبر 10 ريلات كل أسبوع. أوجد مجموع ما وقده بعد 7 أسابيع.

(2) هو الشهره في شهر فبراير كان طول شعر سعاد 47.0 سم، فواظبت على قياس طول شعرها كل شهر، فالتابع نموّه، فوجدت أن طولها بلغ 50.1 سم في مارس، وفي إبريل 53.2 سم، وفي مايو 56.3 سم، وفي يونيو 59.4 سم. استعمل متسلسلة حسابية، وأوجد أساسها، وحدّد معدّل نموّ شعرها الشهري.

(3) مكتبيها، بكثيرها سارتينوكريسي بنومونا أحد الأرواح الكبريا التي تسبب مرض ذات الرئة، ويمكن أن تضاعف هذه الكبريا عددها خلال 20 دقيقة. إذا بدأت عينة عددها 300 بكثيرها، وتضاعفت كل 20 دقيقة، فاستخدم متسلسلة هندسية لإيجاد عدد الكبريا في العينة بعد 80 دقيقة.

(5) حلقت، ما عدد الزينات الصغيرة في الحلقات الثلاث الأولى في الشكل؟



(6) إذا تكرّر النقط، فكتب صيغة تعدد المربعات في الحلقة رقم n .

(b) ما طول ضلع الحلقة رقم n ؟

الفصل ٦، المتتابعات والمتسلسلات

9

الفصل الثاني التتالي

فوق

تدريبات المهارات (8)

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات المهارات المتتابعات بوصفها دوال

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مقل المتابعة بيانياً.



أوجد الحدود الثلاثة التالية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مقل المتابعة بيانياً.



الفصل ٦، المتتابعات والمتسلسلات

8

الفصل الثاني التتالي

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series



لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرّ العصور.

لقد حل جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية

لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 - 6؛ لإيجاد قيمة حد معين في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أي حد من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه. ففي المتتابعة الحسابية $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ التي أساسها d يكون:

$$\text{صيغة الميل والنقطة} \quad (y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d \quad (a_n - a_1) = d(n - 1)$$

$$\text{جمع } a_1 \text{ للطرفين} \quad a_n = a_1 + d(n - 1)$$

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حد من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحد الأول والأساس.

اضف الى
مطويتك

مفهوم أساسي

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحد النوني في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن هذه الصيغة في السؤال 58

مثال 1

إيجاد حد معين في متتابعة حسابية

أوجد الحد الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: $9, 16, 23, 30, \dots$

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

$$16 - 9 = 7 \quad 23 - 16 = 7 \quad 30 - 23 = 7$$

$$d = 7 \text{ إذن}$$

الخطوة 2: أوجد الحد الثاني عشر.

$$\text{الحد النوني في المتتابعة الحسابية} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 9 + 77 = 86$$

تحقق من فهمك

أوجد الحد المطلوب في كلٍّ من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(1A) a_n علمًا بأن: $n=9, d=6, a_1=-4$ (1B) a_{20} علمًا بأن: $d=-8, a_1=15, a_{137}=-137$

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2

تمييز المتتابعة الحسابية.

الدرس 6-2

استعمال المتتابعات الحسابية.

إيجاد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

ما بعد الدرس 6-2

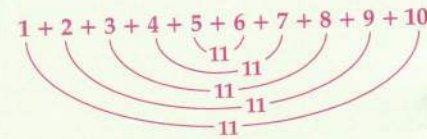
إثبات صحة جمل رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- ما نوع المتتابعة التي تُمثّلها مجموعة الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100؟ **حسابية**
- ما قيمة الحد الأول؟ **1**
- كيف يمكنك الحصول على مجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى بسهولة؟
إجابة ممكنة: $5 \times 11 = 55$



مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنوع التعليم، ص (72, 75)	• تنوع التعليم، ص (75)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإشرافية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإشرافية، ص (15)

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغة للحد النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة للحد النوني في المتتابعات الحسابية

اكتب صيغة للحد النوني للمتتابعة الحسابية في كلِّ ممَّا يأتي:

$$5, -13, -31, \dots \text{ (a)}$$

$$d = -13 - 5 = -18 \text{ والحد الأول } 5$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 5 + (n - 1)(-18)$$

$$a_n = -18n + 23$$

$$a_5 = 19, d = 6 \text{ (b)}$$

أولاً، أوجد قيمة a_1

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$19 = a_1 + (5 - 1)(6)$$

$$-5 = a_1$$

ثم اكتب المعادلة

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = -5 + (n - 1)(6)$$

$$a_n = 6n - 11$$

تحقق من فهمك

$$a_n = 8n - 36 \quad a_6 = 12, d = 8 \text{ (2B)} \quad a_n = -9n + 21 \quad 12, 3, -6, \dots \text{ (2A)}$$

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين **أوساطاً حسابية**، ويمكن استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $-8, 2, 2, 2, 2, 22, \dots$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحد الأول والحد الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$ إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$22 = -8 + (6 - 1)d$$

$$30 = 5d$$

$$6 = d$$

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$\begin{array}{ccccccccc} -8 & & -2 & & 4 & & 10 & & 16 & & 22 \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & +6 & & +6 & & +6 & & +6 & & +6 & \end{array}$$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

تحقق من فهمك

$$\text{(3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين } 36, -18 \text{ } -9, 0, 9, 18, 27$$

المتتابعات الحسابية

مثال 1 يبين طريقة الحصول على حد معين لمتتابعة حسابية، بمعلومية عدد من حدودها.

مثال 2 يبين طريقة الحصول على صيغة الحد العام للمتتابعة الحسابية بمعلومية بعض حدودها.

مثال 3 يبين طريقة الحصول على عدد من الأوساط الحسابية بين حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد العشرين في المتتابعة الحسابية: $3, 10, 17, 24, \dots$ **136**

2 اكتب صيغة الحد النوني لكل من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

$$-8, -6, -4, \dots \text{ (a)}$$

$$a_n = 2n - 10$$

$$a_6 = 11, d = -11 \text{ (b)}$$

$$a_n = -11n + 77$$

3 جد الأوساط الحسابية في المتتابعة:

$$21, _, _, _, 45, \dots$$

$$27, 33, 39$$

المحتوى الرياضي

صيغة الحد النوني للمتتابعة

الحسابية

يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتابعة الحسابية، من خلال معرفة قيمة الحد السابق له مباشرة، شريطة معرفة أساس المتتابعة، ولكن كتابة صيغة للحد النوني للمتتابعة تتطلب معرفة الحد الأول فيها.

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل، تحقق من صحة الحل، باستعمال صيغة الحد النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقق دائماً من أن صيغة الحد النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدل عددين أو أكثر.

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

المتسلسلات الحسابية يمكن الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة؛ لذا فالمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية، ويُسمى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة المجموع الجزئي ويُرمز له بالرمز S_n .

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

مفهوم أساسي

أضف إلى مطوبتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حداً (S_n) هو،
بالصيغة العامة	a_1, a_n	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$
بالصيغة البديلة	a_1, d	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لا بد من إيجاد إحدى القيم a_1, a_n, n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحد النوني.

مثال 4 استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \dots + 180$

الخطوة 1، $a_1 = 12, a_n = 180, d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولاً كي نجد المجموع.

الحد النوني في المتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$	$180 = 12 + (n-1)(7)$
باستعمال خاصية التوزيع، ثم بالتبسيط	$168 = 7n - 7$
بحل المعادلة	$25 = n$

الخطوة 2، استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n

صيغة المجموع	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$
$n = 25, a_1 = 12, d = 7$	$S_{25} = \frac{25}{2} [2(12) + (25-1)(7)]$
بالتبسيط	$S_{25} = 12.5(192) = 2400$

تحقق من فهمك أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية مما يأتي.

2880 $n = 16, a_n = 240, d = 8$ (4B) 2550 $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ (4A)

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتسلسلة الحسابية.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $S_n = 430, a_n = 79, a_1 = 7$

الخطوة 1، أوجد قيمة n

صيغة المجموع	$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$
$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$	$430 = n \left(\frac{7 + 79}{2} \right)$
بالتبسيط	$430 = n(43)$
بقسمة طرفي المعادلة على 43	$10 = n$

إرشادات للدراسة

سُميت الصيغة

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

بالصيغة العامة؛ لأنها

الاستنتاج الأصلي، بينما

سُميت الصيغة

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

بالصيغة البديلة؛ لأنها

تشتق من الصيغة العامة،

ويمكن استعمالها بديلاً

عن الصيغة العامة.

المتسلسلات الحسابية

مثال 4 يوضح طريقة استعمال صيغة لحساب المجموع الجزئي في متسلسلة.

مثال 5 يوضح طريقة استعمال صيغ المجموع الجزئي لإيجاد حدود في متسلسلة حسابية.

مثال 6 يوضح طريقة إيجاد مجموع متسلسلة حسابية مكتوبة باستعمال رمز المجموع.

مثالان إضافيان

4 أوجد مجموع حدود المتسلسلة:

$$836 \quad 8 + 12 + 16 + \dots + 80$$

5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة الحسابية التي فيها:

$$S_n = 129, a_1 = 14, a_n = 29$$

$$14, 17, 20$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب مثلاً على السبورة للمساعدة في توضيح صيغة مجموع حدود متسلسلة حسابية. ثم اكتب متتابعة الأعداد من 1 إلى 10، ثم قم بتشكيل المجاميع الآتية:

$1 + 10, 2 + 9, 3 + 8$

أوجد مجموع حدود المتسلسلة. وأخيراً وضح للطلبة كيف تساعدهم صيغة المجموع في تبسيط إيجاد المجموع.

تنويع التعليم

ضمن

المتعلمون المتفاعلون ناقش مع الطلبة الفرق بين المتتابعة والمتسلسلة، واطلب إليهم أن يقترحوا طرقاً مختلفة للتمييز بين المفهومين.

الخطوة 2، أوجد قيمة d

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n = 79, a_1 = 7, n = 10 & \quad 79 = 7 + (10-1)d \\ \text{ب طرح 7 من طرفي المعادلة} & \quad 72 = 9d \\ \text{بقسمة طرفي المعادلة على 9} & \quad 8 = d \end{aligned}$$

الخطوة 3، استعمل d لحساب كل من a_2, a_3

$$\begin{aligned} a_3 &= 15 + 8 = 23 & a_2 &= 7 + 8 = 15 \\ \text{إذن الحدود الثلاثة الأولى هي} & & & 7, 15, 23 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعات الحسابية الآتية: (5B) $-24, -16, -8$

$$(5A) \quad a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280 \quad (5B) \quad -6, 0, 6 \quad S_n = 120, n = 8, a_n = 36$$

المحتوى الرياضي

المتسلسلة المنتهية تُستعمل الصيغة

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

لحساب مجموع

حدود المتسلسلة الحسابية فقط عندما

يكون عدد الحدود n منتهياً.

مثال إضافي

تدريب على اختبار:

D أوجد $\sum_{k=3}^{10} (2k+1)$

23 A

70 B

98 C

112 D

6

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع.

أضف إلى طويجتك

مفهوم أساسي رمز المجموع

صيغة حدود المتسلسلة

أخر قيمة لـ k

أول قيمة لـ k

الرموز:

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12} (4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \dots + [4(12)+2]$$

$$= 6 + 10 + 14 + \dots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع:

\sum يقرأ الرمز "سيجما" وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد $\sum_{k=4}^{18} (6k-1)$

1008 D 975 C 910 B 846 A

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كل حد يزيد على الحد السابق له بمقدار 6،

ويوجد فيها 15 حداً ($n=15$)؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$$a_n = 6(18) - 1 = 107 \quad a_1 = 6(4) - 1 = 23$$

أوجد المجموع

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + an}{2} \right)$$

$$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107 \quad S_{15} = 15 \left(\frac{23 + 107}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15(65) = 975$$

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو C.

تحقق من فهمك

6 أوجد $\sum_{m=9}^{21} (5m+6)$ B

1701 D

1281 C

1053 B

972 A

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتتابعين الحسابيين الآتيتين :

233 (1) a_n علمًا بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$ (2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \dots$

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني لكل من المتتابعين الحسابيين الآتيتين :

(3) $13, 19, 25, \dots$ $a_n = 6n + 7$ (4) $a_5 = -12, d = -4$ $a_n = -4n + 8$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعين الآتيتين:

(5) $6, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 42$ $15, 24, 33$ (6) $-4, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 8$ $-1, 2, 5$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

(7) أول 50 عددًا طبيعيًا 1275 (8) $4 + 8 + 12 + \dots + 200$ 5100

(9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$ 4500 (10) $a_n = 145, d = 5, n = 21$ 1995

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعين الحسابيين الآتيتين:

(11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$ $8, 12, 16$ (12) $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$ $10, 16, 22$

مثال 6 (13) اختيار من متعدد، أوجد $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$ C

342 C 45 A

410 D 78 B

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

(14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$ (15) a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$ 248

(16) a_{15} في المتتابعة $\dots -19, -12, -5, -103$ (17) a_{24} في المتتابعة $\dots 8.25, 8.5, 8.75$ 14

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني في كل متتابعة حسابية فيما يأتي:

(18) $24, 35, 46, \dots$ (19) $a_5 = 1.5, d = 4.5$ (20) $9, 2, -5, \dots$

(21) $a_6 = 22, d = 9$ (22) $a_8 = -8, d = -2$ (23) $-12, -17, -22, \dots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الآتية:

(24) $24, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, -1$ $19, 14, 9, 4$

(25) $-6, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 49$ $5, 16, 27, 38$

(26) $-28, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 7$ $-21, -14, -7, 0$

(27) $84, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 39$ $75, 66, 57, 48$

(18) $a_n = 11n + 13$

(19) $a_n = 4.5n - 21$

(20) $a_n = -7n + 16$

(21) $a_n = 9n - 32$

(22) $a_n = -2n + 8$

(23) $a_n = -5n - 7$

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: ساعد الطلبة على التعامل مع رمز المجموع بصورة صحيحة وذلك عن طريق قراءة عبارات مكتوبة باستعمال رمز المجموع. ووضح لهم أن رمز المجموع هو حرف S مكتوبًا بصورة كبيرة باللغة اليونانية. واطلب إلى الطلبة إعطاء أمثلة على مصطلحات رياضية أخرى تستخدم الأحرف اليونانية. **إجابة ممكنة: π**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

الأسئلة

المستوى

62-70 ، 56-60 ، 54 ، 14-41

دون المتوسط **دون**

64-70 ، 43-55 ، 14-41

ضمن المتوسط **ضمن**

43-70

فوق المتوسط **فوق**

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية. 10100

(29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية. 40000

(30) $66 + (-12) + (-15) + (-18) + \dots + 72$ (31) $408 - 24 + (-18) + (-12) + \dots + 72$

(32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$ (33) $1558 \quad n = 19, a_n = 154, d = 8$

(34) **مسابقات ثقافية:** تبدأ جائزة مسابقة ثقافية بمبلغ 150 ريالاً، ويضاف مبلغ 50 ريالاً إلى الجائزة كل شهر، إذا استمرت المسابقة مدة أحد عشر شهراً، فكم يكون مجموع قيم الجوائز؟ **4400 ريال**

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

(35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$ (36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$ (37) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

(37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$ (38) $-15, -6, 3$ انظر الهامش

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

(39) $\sum_{k=1}^{16} (4k - 2)$ (40) $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$ (41) $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$ (42) $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$

(41) $\sum_{k=5}^{16} (2k + 6)$ (42) $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$

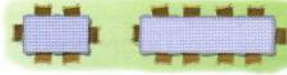
(43) **قرض حسن:** اقترض عليّ مبلغاً من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسطاً كما يأتي: القسط الأول 50 ريالاً، وكل قسط تالي يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالاً. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟ **2250 ريالاً.**

استعمل المعلومات المعطاة في كل من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحد النوني لكل متتابعة حسابية:

(44) الحد رقم 100 في المتتابعة هو 245، وأساس المتتابعة 13. $a_n = 13n - 1055$

(45) الحد الحادي عشر في المتتابعة هو 78، وأساس المتتابعة -9. $a_n = -9n + 177$

(46) الحد الخامس والعشرون في المتتابعة هو 121، والحد الثمانون 506. $a_n = 7n - 54$

(47) **تنظيم:** تُصَفّ الطاولة المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورة لتُشكّل طاولة كبيرة. الشكل المجاور يُبيّن عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولة.(a) ارسم شكلاً يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولة في كل من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كل مرة). **انظر الهامش.**(b) اكتب معادلة تُمثّل الحد النوني في هذا النمط. $p_n = 4n + 2$ (c) هل من الممكن ترتيب الطاولة بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضح إجابتك. **لا، لا يوجد عدد كلي n حيث $4n + 2 = 100$.**

الربط مع الحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقداً بينه وبين من يقرضه المال، عملاً بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَأْتِيهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا تَدَايَنُوهُمْ وَيَدِينُ إِلَهُكُمْ مُسْكِنٌ قَاسِمٌ...﴾



إجابات:

(38) -33, -21, -9

(47a) 14, 18, 22

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب متسلسلة حسابية مثل: $21 + 17 + 13 + 9 + 5$ على السبورة، ثم اطلب إلى الطلبة كتابة المجموع باستعمال رمز المجموع بدلالة n بحيث تبدأ n من العدد 1.

$$\sum_{n=1}^5 (4n + 1)$$

(48) **جاذبية:** عندما يسقط جسم سقوطاً حراً تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الرياح، فإنه يقطع مسافة 16 قدماً في الثانية الأولى، و48 قدماً إضافية في الثانية الثانية، و80 قدماً إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟ **1600 قدم**

(49) **دخل سنوي:** إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة 92000 ريال، ويزيد سنوياً بمقدار 16000 ريال، فبعد كم سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟ **السنة التاسعة عشرة**

(50) **رياضة:** خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطِّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يومياً في الأسبوع الأول، ومن ثم يقوم بزيادة المسافة بمقداره نصف ميل أسبوعياً.

(a) اكتب معادلة للحد النوني لهذه المتتابعة. $a_n = 2.5 + 0.5n$ **الأسبوع الخامس عشر**

(b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أي أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يومياً؟

(c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيّاً؟ وضح إجابتك.

(51) **تمثيلات متعددة:** معتبراً $\sum_{k=1}^n (2k+2)$ أجب عما يأتي: (a-c) **انظر ملحق الإجابات**

(a) **جدولياً:** اعمل جدولاً للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \leq k \leq 10$.

(b) **بيانياً:** مثل بيانياً المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع a (k, S_k) .

(c) **بيانياً:** مثل الدالة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

(d) **لفظياً:** ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

(e) **تحليلياً:** ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

(f) **جبرياً:** أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون التمثيل البياني للمجاميع الجزئية فيها (k, S_k) هو نفسه للدالة $g(x) = x^2 + 8x$ **انظر الهامش.**

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

$$16 \sum_{k=5}^x (8k+2) = 1032 \quad (53)$$

$$18 \sum_{k=3}^x (6k-5) = 928 \quad (52)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(54) **تبرير:** إذا كان a هو الحد الثالث في متتابعة حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبر عن c بدلالة a, b **$4b - 3a$**

(55) **تحديد:** يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فجد الوسط الحسابي للعددين a, b . **16**

(56) **مسألة مفتوحة:** اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود ومجموعها 324.



الربط مع الحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

(50c) **إجابة ممكنة:** لا، في النهاية سيكون عدد الأميال التي يقطعها في اليوم الواحد غير واقعي.

(51d) **إجابة ممكنة:** مع أن لتمثيليهما البيانيين المدى نفسه إلا أن مجال المتسلسلة هي مجموعة من الأعداد الطبيعية: $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، ومجال الدالة التربيعية هو مجموعة من الأعداد الحقيقية: $\{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$

(51e) **إجابة ممكنة:** يوجد مع كل مجموع جزئي للمتسلسلة الحسابية دالة تربيعية بحيث يكون لكل منهما المدى نفسه.

(56) **إجابة ممكنة:** $9 + 18 + 27 + \dots + 72$

تنبه!

تحتاج الطلبة إلى أوراق رسم بياني للإجابة عن السؤال 51.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في سؤال 51، طرقاً مختلفة للتعبير عن العلاقة بين الدالة التربيعية ومجموع المتتابعة حسابية، ومن هذه الطرق: الجداول، لتمثيلات البيانية، والعبارات الجبرية.

إجابات

(5) بما أن:

$$g(1) = 9, g(2) = 20$$

$$\text{وبذلك } s_1 = 9, s_2 = 20 - 9 = 11$$

تكون المتسلسلة الحسابية هي:

$$9 + 11 + 13 + \dots$$

والتي تكتب اختصاراً على الصورة:

$$\sum_{k=1}^n 2k + 7$$

57) اكتب: بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية. انظر الهامش.

58) برهان: اشتق صيغة الحد النوني للمتتابعة الحسابية. انظر ملحق الإجابات.

59) برهان: اشتق قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1 . انظر ملحق الإجابات.

60) برهان: اشتق الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) تحدّ: بالعودة إلى فقرة لماذا؟ ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت). انظر أعمال الطلاب.

تنبيه!

تجنّب الأخطاء: تأكد أن الطلبة يُظهرون فهمًا لرمز المجموع، وذلك بأن تطلب إليهم كتابة عدة متسلسلات حسابية باستعمال رمز المجموع.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلبة وصف كيف ساعدهم تعلمهم المتتابعات في الدرس السابق على فهمهم هذا الدرس.

التقويم التكويني

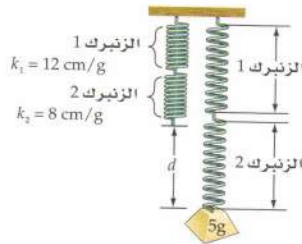
تحقق من فهم الطلاب للدرس 6-1، 6-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

إجابة

57) إجابة ممكنة: المتتابعة الحسابية

هي مجموعة من الحدود (الأعداد) الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقدارًا ثابتًا. والمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية.



67) **فيزياء:** تربط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلقة فيه. ويعبر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، و m الكتلة، و k ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يحسب باستعمال المعادلة (الدرس 5-6) $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

(a) إذا وصل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول 12 cm/g ، وثابت الزنبرك الثاني 8 cm/g ، فجد ثابت الزنبرك الناتج. 4.8 cm/g

(b) إذا علقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟ 24 cm

أوجد قيمة كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$\frac{1}{81} \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \quad (70)$$

$$\frac{1}{32} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad (69)$$

$$1458 \cdot 2 \cdot 3^6 \quad (68)$$

77 الدرس 6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

المعادلة العامة للمجموع

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \quad (60)$$

معادلة الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

بالتعويض

$$S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$S_n = [2a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

6-2 تدريبات إعادة التعليم

المتابعة الحسابية	الوصف	المثال
أساس المتابعة الحسابية (الفرق المشترك)	$d = a_{n+1} - a_n$	الأساس في المتابعة الحسابية هو: 5, 7, ... $7 - 5 = 2$
الحد الثوري في متابعة حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث d هو أساس المتابعة، و n هو أي عدد صحيح موجب.	الحد الرابع في المتابعة الحسابية التي أساسها 3 و $a_1 = 2$ هو: $3 + (3 \times 2) = 9$

أوجد قيمة الحد الثامن عشر في المتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 21$ و $d = -6$.
استعمل قيمة الحد الثوري في المتابعة الحسابية بتعويض $n = 13$, $a_n = 21$, $d = -6$ في
صيغة الحد الثوري
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $a_{13} = 21 + (13-1)(-6)$
 $a_{13} = -51$

أوجد قيمة الحد العاشر في المتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 9$ و $d = -14$.
استعمل قيمة الحد الثوري في المتابعة الحسابية بتعويض $n = 9$ و $a_n = 9$ في
صيغة الحد الثوري
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $9 = 9 + (9-1)(-14)$
 $9 = 9 - 112$
 $9 = -103$

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل متتابعة حسابية بما يأتي:
1. الحد العاشر في المتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = 15$ و $d = 4$ و $n = 9$
2. الحد السابع في المتابعة الحسابية التي فيها $a_1 = -81$ و $d = 12$ و $n = 9$
3. a_1 في المتابعة الحسابية ... $18, 15, 12, 9, \dots$
4. a_n في المتابعة الحسابية ... $-63, -58, -53, -48, \dots$
اكتب صيغة الحد الثوري في كل متتابعة حسابية بما يأتي:
5. $a_1 = 38n - 23$ و $d = 38$ و $a_n = 15$
6. $a_1 = -13n + 85$ و $d = -13$ و $a_n = 72$
7. $a_1 = 17n - 73$ و $d = -56$ و $a_n = -39$
8. $a_1 = 42n - 136$ و $d = -94$ و $a_n = -52$

الفصل ١٦، المتتابعات والمتسلسلات 11

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (12) دون

6-2 تدريبات إعادة التعليم

المتابعة الحسابية، يستخدم الحرف اللاتيني S_n لتمثيل المتسلسلة. رمز المجموع للمتسلسلة $6 + 12 + 18 + 24 + 30$ هو S_5 .
المجموع الحزبي للمتسلسلة الحسابية هو $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{18} (3k + 4)$
المجموع هو متسلسلة حسابية أساسها 3. بتعويض $k = 1$ في العبارة $3k + 4 = 7$ ، $k = 18$ في العبارة $3k + 4 = 58$ و $n = 18$ في المتسلسلة، نجد أن مجموع المتسلسلة الحسابية هو $S_{18} = \frac{18}{2}(7 + 58) = 9(65) = 585$

- أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية بما يأتي:
- $a_1 = 50, a_n = -50, n = 12$
 - $a_1 = 180, d = -5, n = 15$
 - $a_1 = 4, n = 20, d = 2\frac{1}{2}$
 - $16 + 22 + 28 + \dots + 112$
 - $\sum_{k=1}^{10} (3k + 4) = 585$
 - $a_1 = 12, a_n = 100, n = 12$
 - $a_1 = 20, d = 4, n = 11$
 - $a_1 = 42, n = 8, d = 6$
 - $-10 + 8 + 6 + 4 + \dots + -10$
 - $\sum_{k=1}^{25} (4n - 9) = 2775$

الفصل ١٦، المتتابعات والمتسلسلات 12

تدريبات المهارات (13) دون ضمن فوق

6-2 تدريبات المهارات

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل من المتابعات الحسابية الآتية:
1. $a_1 = 56, d = 13, n = 73$
2. $a_1 = 16, 32, 48, \dots$
اكتب صيغة الحد الثوري في كل متتابعة حسابية بما يأتي:
3. $a_1 = 14n + 50$ و $d = 14$
4. $a_1 = 93n - 509$ و $d = -416$

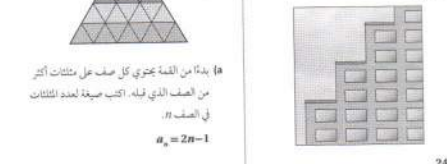
أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتابعات الحسابية الآتية:
5. $23, 29, 35, 17, \dots$
6. $206, 177, 148, 119, 90, 61, 255, \dots$
7. $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 43$
8. $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 32$
9. $3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 19$
10. $-2 + (-5) + (-8) + \dots + (-20)$
11. $\sum_{k=1}^n (2k - 3)$
12. $\sum_{k=1}^n (10 + 3k)$
13. $\sum_{k=1}^n (4k + 1)$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كل من المتابعات الحسابية الآتية:
14. $a_1 = 4, a_n = 31, S_n = 175$
15. $a_1 = -3, a_n = 41, S_n = 228$
16. $a_1 = 4, 7, 10$
17. $n = 10, a_n = 41, S_n = 230$

الفصل ١٦، المتتابعات والمتسلسلات 13

6-2 تدريبات حل المسألة

1. فوهة أحد جوانب مبنى مستطيل على شكل درج. توافقه مرتبة في أعمدة يجري العمود الأول على 6 نوافذ. والعمود الثاني على 4، والعمود الثالث على 2 نوافذ. وما عدد النوافذ على جانب الواجهة إذا كان فيها 15 عموداً؟



2. كتي، يمتلك عبدالله مجموعة أقلام لجرار الرياضية المزينة. كتبها بالكمبيوتر جداول تشكل المتابعة: $5, 10, 15, \dots$ إذا كان لديه نقول من كل كتلة، فما كتلة الأقلام التي يمتلكها جميعاً؟

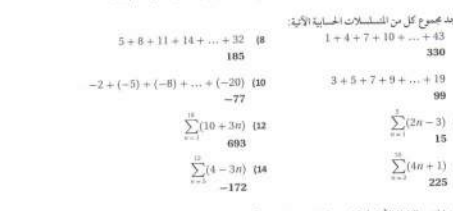
3. كريب، يشارك محمد في الماراثون. إذا ركض مسافة 20 ميلاً في أسبوعه الأول من التدريب، وكان عدد الأميال التي يركضها يزيد بمقدار 6 أميال في كل أسبوع من الأسبوع السابق له، فما عدد الأميال التي يركضها في 8 أسابيع من التدريب؟

الفصل ١٦، المتتابعات والمتسلسلات 14

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

6-2 تدريبات حل المسألة

1. متتلة، مستطيل مثلث من عدد من المثلثات المتطابقة الأضلاع كما في الشكل.



2. إذا احتوى الشكل على n صف من المثلثات الصغيرة، فما عدد المثلثات الصغيرة التي استخدمت في تكوينه؟

الفصل ١٦، المتتابعات والمتسلسلات 14

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية Geometric Sequences and Series



لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت وجد "أحمد" موضوعاً عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كل من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدد. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحد النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أي حد من حدودها.

فيما سبق:

درست تمييز المتتابعة الهندسية.

والآن:

- استعمل المتتابعات الهندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المضردائق:

الأوساط الهندسية
geometric means

المتسلسلات الهندسية
geometric series

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

تمييز المتتابعة الهندسية.

الدرس 6-3

استعمال المتتابعات الهندسية.

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

ما بعد الدرس 6-3

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

• ما الحدود الثلاثة الأولى في هذا النمط؟
5, 25, 125

• لماذا لا تُشكّل هذه المتتابعة متتابعة حسابية؟ لأن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس ثابتاً.

• ما النسبة بين كل حد، والحد السابق له مباشرة؟ $r = 5$

• قارن بين أساس المتتابعة الحسابية، وأساس المتتابعة الهندسية. أساس المتتابعة الحسابية يجمع للحد للحصول على الحد الذي يليه، بينما أساس المتتابعة الهندسية يضرب بالحد.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

الحد النوني في المتتابعة الهندسية

يُعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{حيث } n \text{ عدد طبيعي}$$

ستبرهن صحة هذه الصيغة في السؤال رقم (39)

إيجاد الحد النوني

مثال 1 من واقع الحياة

في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسل في المرحلة الثامنة؟

افهم تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كل شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة).

خطط يُشكّل عدد الرسائل المرسل في كل مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$ ، لذا استعمل صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية.

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} && \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \\ a_8 &= 5(5)^{8-1} && a_1 = 5, r = 5, n = 8 \\ a_8 &= 5(78125) = 390625 && 5^7 = 78125 \end{aligned}$$

وعليه، فإن عدد الرسائل المرسل في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقق اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.
5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625

تحقق من فهمك

(1) **بريد إلكتروني:** أرسل سعيد رسالة إلى أربعة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني، ثم قام كلٌّ منهم بإرسالها إلى أربعة أصدقاء آخرين، وهكذا كان كل واحد يستلم الرسالة يبعثها إلى أربعة أصدقاء جدد. إذا استمر هذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرسالة في المرحلة التاسعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟ 262144

مصادر الدرس 6-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنوع التعليم، ص (80, 83)	• تنوع التعليم، ص (80, 83)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحد النوني لها.

مثال 2 إيجاد صيغة الحد النوني

اكتب معادلة الحدّ النوني لكل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

$$0.5, 2, 8, 32, \dots \text{ (a)}$$

الحد الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

$$\text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_1 = 0.5, r = 4 \quad a_n = 0.5(4)^{n-1}$$

$$a_4 = 5, r = 6 \text{ (b)}$$

الخطوة 1: إيجاد a_1

$$\text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 5, r = 6, n = 4 \quad 5 = a_1 (6^4 - 1)$$

$$\text{إيجاد قيمة } 6^3 \text{ ثم القسمة عليها} \quad \frac{5}{216} = a_1$$

الخطوة 2: كتابة الصيغة

$$\text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_1 = \frac{5}{216}, r = 6 \quad a_n = \frac{5}{216} (6)^{n-1}$$

$$a_n = -0.25(-8)^{n-1} \text{ (2A)} \quad \text{تحقق من فهمك}$$

$$a_n = 1(4)^{n-1} \quad a_3 = 16, r = 4 \text{ (2B)} \quad -0.25, 2, -16, 128, \dots \text{ (2A)}$$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن الأوساط الهندسية هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2، 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحد الأول والحد الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $n = 5$ ، ولذلك يكون $3 + 2 = 5$

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$$\text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5 \quad 1250 = 2r^{5-1}$$

$$\text{بقسمة الطرفين على 2، ثم إيجاد الجذر الرابع} \quad \pm 5 = r$$

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$$2 \quad 10 \quad 50 \quad 250 \quad 1250 \quad \text{أو} \quad 2 \quad -10 \quad 50 \quad -250 \quad 1250$$

$\times 5 \quad \times 5 \quad \times 5 \quad \times 5$ أو $\times -5 \quad \times -5 \quad \times -5 \quad \times -5$

إذن الأوساط الهندسية هي: $10, 50, 250$ أو $-10, 50, -250$

تحقق من فهمك

(3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 0.5، 512

2, 8, 32, 128

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد السادس في المتتابعة

الهندسية التي فيها $a_1 = -3$ ،

$$a_6 = 96, r = -2$$

2 اكتب معادلة الحد النوني لكل من

المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

$$5, 10, 20, 40, \dots \text{ (a)}$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_5 = 4, r = 3 \text{ (b)}$$

$$a_n = \frac{4}{81} (3^{n-1})$$

3 جد ثلاثة أوساط هندسية بين

العددين 3.12، 49.92

$$6.24, 12.48, 24.96$$

$$\text{أو } -6.24, 12.48, -24.96$$

تنبيه

تجنب الأخطاء: عند بدء حل

مسائل المتتابعات الهندسية، شجّع

الطالبة على كتابة قيم كل من المتغيرات

n, a, r المعطاة.

المحتوى الرياضي

المتتابعات الهندسية المتزايدة والمتتابعات المتناقصة العديد من المتتابعات الهندسية في هذا الدرس إمّا متزايدة وإمّا متناقصة، وفي كلتا الحالتين يكون الأساس عددًا موجبًا. أمّا إذا كان الأساس عددًا سالبًا، فلا تعدّ المتتابعة متزايدة ولا متناقصة.

المتسلسلات الهندسية: يمكن الحصول على المتسلسلة الهندسية بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية، ويرمز لمجموع أول n حدًا في المتسلسلة بالرمز S_n . ويمكن إيجادها باستعمال أي من الصيغتين الآتيتين:

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, r \neq 1$

إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

مثال 4 من واقع الحياة

بريد إلكتروني: بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المرسل حتى نهاية المرحلة الثامنة؟

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.
إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$$\text{صيغة المجموع } S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$a_1 = 5, r = 5, n = 8 \quad S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5}$$

$$\text{بالتبسيط } S_8 = 488280$$

إذن مجموع الرسائل المرسله حتى 8 مراحل هو: 488280.

تحقق من فهمك أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$3875 \quad a_1 = 2000, a_n = 125, r = \frac{1}{2} \quad (4B) \quad 59048 \quad a_1 = 2, n = 10, r = 3 \quad (4A)$$

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

مثال 5 المجموع باستعمال رمز المجموع

$$\text{أوجد } \sum_{k=3}^{10} 4(2)^k - 1$$

لاحظ أن المتسلسلة المعطاة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدين متتاليين فيها ثابت وهو 2، إذن $r = 2$ ،
والآن أوجد قيمة كل من a_1, n ، ولإيجاد الحد الأول عوض العدد 3 مكان k ، ويستخرج كما يأتي:

$$16 = 4 \cdot 2^{3-1} = a_1, \text{ وأساس المتسلسلة الهندسية هو } r, \text{ حيث } r = 2.$$

وعدد الحدود هو: $8 = 10 - 3 + 1$ إذن $n = 8$.

$$\text{صيغة المجموع } S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$a_1 = 16, r = 2, n = 8 \quad S_8 = \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} = 4080$$

تحقق من فهمك أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$58253.333 \quad \sum_{k=2}^9 \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1} \quad (5B) \quad 66426.75 \quad \sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1} \quad (5A)$$

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه
طلب إيجاد المجموع من
الحد الثالث إلى الحد
العاشر.

شهادات للمعلم الجديد

حس الرياضي: ربما تحتاج إلى قيام
لدية بإيجاد مجموع حدود متسلسلة أو
بدون استعمال صيغة المجموع، وهذا
وره يؤدي إلى توضيح فاعلية هذه الصيغة.

تنبيه!

تجنب الأخطاء: أكد دائماً على
أهمية كتابة كل خطوة في أثناء الحل
وتبريرها.

متسلسلات الهندسية

ال 4 يبين طريقة إيجاد مجموع أول
حدًا في متسلسلة هندسية.

ال 5 يبين طريقة إيجاد مجموع حدود
متسلسلة هندسية كُتبت باستعمال رمز
المجموع.

ال 6 يبين طريقة إيجاد الحد الأول
متسلسلة هندسية، بمعلومية كل من
مجموع وأساس المتتابعة.

مثالان إضافيان

بريد إلكتروني: استعمل

المعلومات الواردة في مثال 4،

لإيجاد إجمالي عدد الرسائل

الإلكترونية المرسله حتى نهاية

المرحلة السادسة. 19530

$$\text{أوجد قيمة } \sum_{n=1}^{12} 3 \cdot 2^{n-1} = 12285$$

تنويع التعليم

ضمن فوق

أردت إثارة دافعية الطلبة لمعرفة كيفية ربط هذا الدرس مع مواقف من الحياة.

إليهم البحث عن الكيفية التي استعمل بها علماء الأحياء وعلماء البيئة المتسلسلات الهندسية في أبحاثهم، حيث قاموا من خلالها بحصر تزايد أو تناقص مجتمعات عامة من الكائنات الحية، والتنبؤ بأعدادها مستقبلاً.

يمكن استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حد معين من حدود المتسلسلة.

مثال 6

إيجاد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $r = 3$, $n = 7$, $S_n = 13116$

$$\text{صيغة المجموع} \quad S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$S_n = 13116, r = 3, n = 7 \quad 13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$$

$$\text{باستعمال خاصية التوزيع} \quad 13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$$

$$\text{بالطرح} \quad 13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 13116 = 1093a_1$$

$$\text{بقسمة الطرفين على 1093} \quad 12 = a_1$$

تحقق من فهمك

6 أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $r = -3$, $n = 8$, $S_n = -26240$

مثال إضافي

أوجد قيمة a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها:

$$3 \quad S_n = 765, n = 8, r = 2$$

المحتوى الرياضي

صفتان لمجموع حدود المتسلسلة الهندسية

تُستعمل الصيغة $S_n = \frac{a_1 - a_n r^n}{1 - r}$ لإيجاد مجموع متسلسلة هندسية عندما يكون عدد الحدود غير معطى. أما الصيغة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ ، فتُستعمل عندما يكون عدد الحدود n معلوماً؛ لأنه في هذه الحالة لا داعي لحساب قيمة الحد a_n .

تأكد

1 مثال 1 أرسل هاني موضوعاً عن طريقة الدراسة الجيدة إلى ثلاثة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني. ومن ثم قام كل واحد منهم بإرسال الموضوع إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط. فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة السابعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة)؟ 2187

2 مثال 2 اكتب معادلة الحد النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية: (3) $a_n = -4(-4)^{n-1}$

$$(2) \quad a_n = 2(2^{n-1}), 2, 4, 8, \dots \quad (3) \quad a_n = 4, r = 3 \quad (4) \quad a_n = \frac{4}{3}(3)^{n-1}$$

3 مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتابعتين الآتيتين:

$$(5) \quad 0.25, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 64 \quad (6) \quad 0.20, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 125$$

7 مثال 4 بالعودة إلى السؤال رقم (1) من فقرة تأكد. ما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المرسله حتى المرحلة السابعة؟ 3279

5 مثال 5 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^6 3(4)^{k-1} \quad (9) \quad \sum_{k=1}^8 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

6 مثال 6 أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

$$(10) \quad S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6 \quad (11) \quad S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$$

الدرس 3-6 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية 81

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 1 (12 طقس: نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm، فإذا كانت الزيادة في كل يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كل من الأيام الأربعة التالية، فكم ستنمّرًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟ **48 cm**

أوجد a_n لكل من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

$$(13) \quad \frac{75}{128} = 0.5859375 \quad a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$$

$$(14) \quad a_1 = -4, r = -2, n = 8$$

مثال 2 اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

$$(15) \quad -1, 1, -1, \dots \quad -3, 6, -12, \dots$$

$$(16) \quad a_3 = 28, r = 2 \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$$

$$(17) \quad a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad a_4 = -8, r = 0.5$$

$$(18) \quad a_n = 7(2)^{n-1}$$

$$(19) \quad a_n = -64(0.5)^{n-1}$$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

$$(21) \quad 810, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 10$$

$$(22) \quad \frac{7}{2}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \frac{56}{81}$$

(23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2، 16، -8، 4

مثال 4 (24 بندول: يقطع بندول مسافة 30 cm في الذبذبة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الذبذبة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 ذبذبة. **471 cm تقريبًا**

$$(20) \quad a_n = \frac{1}{15552} (6)^{n-1}$$

$$(21) \quad 270, 90, 30 \text{ أو } -270, 90, -30$$

$$(22) \quad \frac{7}{3}, \frac{14}{9}, -\frac{28}{27} \text{ أو } \frac{7}{3}, \frac{14}{9}, \frac{28}{27}$$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

$$(25) \quad 53.9918 \quad a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$$

$$(26) \quad 31.9375 \quad a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$$

$$(27) \quad 831.855 \quad a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$$

مثال 5 أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

$$(28) \quad 2188 \sum_{k=1}^7 4(-3)^{k-1} \quad (29) \quad 255 \sum_{k=1}^8 (-3)(-2)^{k-1} \quad (30) \quad 0 \sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$$

مثال 6 أوجد قيمة a_1 في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

$$(31) \quad -8 \quad S_n = -2912, r = 3, n = 6$$

$$(32) \quad 64 \quad S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$$

33 علوم: ارتفاع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كل دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق. **193.75 ft**



الرابط مع الحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتز اهتزازات منتظمة تقريبًا.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة

المستوى

41-50 ، 36-39 ، 12-33

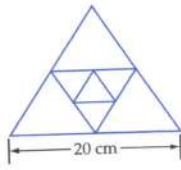
دون المتوسط **دون**

41-50 ، 12-39

ضمن المتوسط **ضمن**

34-50

فوق المتوسط **فوق**



34 هندسة: في الشكل المجاور، طول ضلع المثلث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلث الداخلي الذي تصف رؤوسه أضلاع هذا المثلث. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلثات الثمانية الأولى في النمط؟ تقريباً **119.5 cm**

35 معالجة المياه: يقوم نظام معين لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب أثناء مرور عينة مياه خلاله. فإذا مرّت عينة المياه في النظام أربع مرات. فما النسبة المئوية للشوائب التي سيقوم النظام بإزالتها من العينة؟ **99.19%**

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلبة وصف كيف يمكن أن تساعدهم معرفتهم حول مجموع حدود المتسلسلة الهندسية المنتهية على إيجاد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

إجابات:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \quad (36)$$

$$\text{خواص القوى} = \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} \cdot r}{1 - r}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} \quad (37)$$

الصيغة البديلة للمجموع

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

صيغة الحد النوني

$$\frac{a_n}{r^{n-1}} = a_1$$

بقسمة الطرفين على r^{n-1}

$$S_n = \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - a_n r}{1 - r}$$

بالتعويض

$$= \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - \frac{a_n r \cdot r^{n-1}}{r^{n-1}}}{1 - r}$$

توحيد المقامين في البسط.

$$= \frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1}(1 - r)}$$

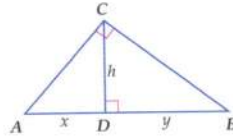
إخراج العامل المشترك a_n في البسط

$$= \frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1}(1 - r)}$$

بالقسمة على $(1 - r)$.

$$= \frac{a_n(1 - r^n)}{r^{n-1} - r^n}$$

بالتبسيط



40 تحد: استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة $x, y, x^2 y^2$

41 مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252. **إجابة ممكنة:** $4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

42 اكتب: وضح كيف يمكنك تحديد إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية ولا هندسية، أم كليهما. **انظر الهامش.**

(46 غير ذلك؛ لا يوجد أساس

(فرق مشترك أو نسبة مشتركة)

(47 حسابية؛ الأساس = $\frac{1}{50}$

(48 غير ذلك؛ لا يوجد أساس

(فرق مشترك أو نسبة مشتركة).

تدريب على اختبار

43 إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟ **D**

- | | |
|------------|------------|
| 7 C | 5 A |
| 8 D | 6 B |

44 إجابة قصيرة عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟ **32000 ريال**

مراجعة تراكمية

45 نقود: اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدماً، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمناً للجهاز؟ **(الدرس 2-6) 4000 ريال**

حدّد إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضح إجابتك: **(الدرس 1-6)**

$$\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \dots \quad (46) \quad -\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \dots \quad (47) \quad -\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \dots \quad (48)$$

49 إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9, z = -5$ علماً بأن $y = -90$ عندما $x = -6, z = 15$. **(الدرس 5-5) -45**

50 أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. **(مهارة سابقة) $-\frac{5}{7}$**

83 **الدرس 3-6** المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسع اكتب الحد النوني في المتتابعة الهندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، على السبورة. واطلب إلى الطلبة كتابة عبارة للحد التالي؛ أي الحد الذي ترتيبه $(n+1)$ ، من خلال تعويض $n+1$ بدلاً من n في الحد النوني $a_n = a_1 r^{n-1}$. ثم اطلب إليهم إيضاح أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ يساوي أساس المتتابعة r .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 r^{(n+1)-1}}{a_1 r^{n-1}} = \frac{r^n}{r^{n-1}} = r^{n-(n-1)} = r^1 = r$$

42 **إجابة ممكنة:** تكون المتسلسلة حسابية، إذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً، وهندسية إذا كانت النسبة بين كل حدين متتاليين نسبة ثابتة. وإذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين ثابتاً، وكذلك إذا كانت النسبة ثابتة، فإن المتسلسلة تكون حسابية وهندسية في الوقت نفسه. وبغير ذلك، لا يمكن اعتبار المتسلسلة هندسية أو حسابية.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 6

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (17)

الاسم: التاريخ: (تنمة)

6-3 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية، المتسلسلة الهندسية من مجموع حدود متتابعة هندسية، برمز مجموع أول n من الحدود في المتسلسلة بالرمز S_n .

مجموع أول n حد S_n معطاة ل a و r يعطى بالصيغة: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $r \neq 1$ مجموع أول n حد S_n معطاة ل a و r يعطى بالصيغة: $S_n = \frac{a-nar}{1-r}$ $r = 1$	المجموع الهندسي لمتسلسلة هندسية
--	------------------------------------

أوجد a_n في المتسلسلة الهندسية التي لها $r=2, n=6, S_6 = 1530$	أوجد a_n في كل متتابعة هندسية مما يأتي:
صيغة المجموع $S_6 = \frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$ $1530 = \frac{a_1(2^6-1)}{2-1}$ $1530 = a_1(2^6-1)$ $1530 = a_1(2^6-1)$ $1530 = a_1(2^6-1)$ $1530 = 255a_1$ $6 = a_1$	1) $a_1 = 9, r = -3, n = 7$ 2) $a_1 = -6, r = -\frac{1}{2}, n = 8$ 3) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ 4) $a_1 = 8, r = \frac{2}{3}, n = 5$ 5) $a_1 = -54, r = -3, n = 6$ 6) $a_1 = 7, r = 3, n = 5$ 7) $a_1 = -34816, r = \frac{1}{2}, n = 6$ 8) $a_1 = 46875, r = \frac{1}{5}, n = 7$ 9) $a_1 = 7, r = 3, n = 5$

أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

1) $\sum_{k=1}^{10} 4(-1)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{10} (-3)(4)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{10} 2(-3)^{k-1}$ (ج)	2) $\sum_{k=1}^{10} 3(3)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{10} (-10)(-1)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{10} (-1)(5)^{k-1}$ (ج)
3) $\sum_{k=1}^{10} 3(3)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{10} (-10)(-1)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{10} (-1)(5)^{k-1}$ (ج)	4) $\sum_{k=1}^{10} 3(3)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{10} (-10)(-1)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{10} (-1)(5)^{k-1}$ (ج)

أوجد قيمة a_n في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

1) $S_n = 29127, n = 9, r = 4$ (ب) $S_n = 720, n = 4, r = 3$ (د)	2) $S_n = 720, n = 4, r = 3$ (د) $S_n = -6552, r = 3, a_1 = -4374$ (ج)
3) $S_n = -936, r = 5, a_1 = -750$ (ب) $S_n = -6552, r = 3, a_1 = -4374$ (ج)	4) $S_n = -936, r = 5, a_1 = -750$ (ب) $S_n = -6552, r = 3, a_1 = -4374$ (ج)

الفصل ٦ - المتتابعات والمتسلسلات 17

دون

تدريبات إعادة التعليم (16)

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات إعادة التعليم المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

المتتابعة الهندسية، المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون فيها كل حد بعد الحد الأول حاصل ضرب الحد السابق بعدد ثابت يسمى أساس المتابعة (النسبة المشتركة).

الحد الترتيبي في متتابعة $a_n = ar^{n-1}$ حيث a هو الحد الأول، r أساس المتابعة الهندسية، و n هو أي عدد صحيح موجب.	عند صياغة موجبة
---	-----------------

أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية $1200, 480, 192, \dots$ الختامية	أوجد a_n في كل متتابعة هندسية مما يأتي:
بما أن $0.4 = \frac{192}{480} = \frac{480}{1200}$ فإن أساس المتابعة $r = 0.4$ و $a_1 = 1200$ في هذه المتتابعة $a_n = 3.6$ و $r = 3$ استخدم صيغة الحد الترتيبي n في كتابة الحد الترتيبي $a_n = ar^{n-1}$ $a_n = 3.6 \cdot 3^{n-1}$ معادلة الحد الترتيبي هي $a_n = 3.6(3)^{n-1}$	1) $a_1 = -10, r = 4, n = 2$ 2) $a_1 = -10, r = 4, n = 2$ 3) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ 4) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ 5) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ 6) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$ 7) $a_1 = 7, r = 3, n = 5$

أوجد a_n في كل متتابعة هندسية مما يأتي:

1) $a_1 = -10, r = 4, n = 2$	2) $a_1 = -10, r = 4, n = 2$
3) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$	4) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$
5) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$	6) $a_1 = 16, r = 2, n = 10$
7) $a_1 = 7, r = 3, n = 5$	8) $a_1 = 7, r = 3, n = 5$

أوجد a_n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

1) $8, 32, 128, \dots$ (ب) $500, 350, 245, \dots$ (د)	2) $500, 350, 245, \dots$ (د) $a_n = 500(0.7)^{n-1}$ (ج)
3) $9, 54, 324, 1944, \dots$ (ب) $11, -24.2, 53.24, \dots$ (د)	4) $11, -24.2, 53.24, \dots$ (د) $a_n = 11(-2.2)^{n-1}$ (ج)
5) $-53, -424, -3392, -27136, \dots$ (ب) $17, 187, 2057, 22627, \dots$ (د)	6) $17, 187, 2057, 22627, \dots$ (د) $a_n = 17(11)^{n-1}$ (ج)

الفصل ٦ - المتتابعات والمتسلسلات 16

دون

تدريبات حل المسألة (19)

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات حل المسألة المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

1) الامتحان 10، عندما يكون الأساس في متسلسلة هندسية ما مساويًا لـ 10، فمن السهل أحيانًا حساب المجموع، لأننا نستخدم النظام العشري للأعداد على سبيل المثال، ما مجموع $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4$ ؟
111111

رقم الأقسام	5	4	3	2	1	0
عدد الخلايا الناجمة	32	16	8	4	2	1

2) دعوتك، تريد مريم أن تقيم حفلة، فذهبت إليها 3 صديقات، وطلبت من كل صديقة أن تدعو 3 صديقات أخريات، وهكذا قامت كل واحدة بدعوة 3 صديقات أخريات. إذا استمرت عملية الدعوة على 5 مراحل، فما عدد الدعوات إلى الحفلة؟
363

3) تقفون معاً، اقترح غوردون مور، اللغوي المساعد لإيتان، أن يتضاعف عدد الترتيبات على الإثني عشر من الدائرة المتكاملة في شركة الكمبيوتر كل 18 شهرًا. بافتراض أن قارتون مور صحيح، كم مرة توقع أن يتضاعف عدد الترتيبات على الإثني عشر من الدائرة المتكاملة كل 18 شهر على مدى السنوات الست القادمة؟
2, 4, 8, 16

4) أوجد عدد الخلايا بعد 100 تقسيم تقريبًا 6.34×10^{29}

الفصل ٦ - المتتابعات والمتسلسلات 19

دون

تدريبات المهارات (18)

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات المهارات المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

أوجد a_n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:	أوجد a_n في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:
1) $a_1 = 5, r = 2, n = 6$ 160	1) $a_1 = 5, r = 2, n = 6$ 160
2) $a_1 = -3, r = -2, n = 5$ -48	2) $a_1 = -3, r = -2, n = 5$ -48
3) $a_1 = 65536, r = \frac{1}{2}, n = 6$ 64	3) $a_1 = 65536, r = \frac{1}{2}, n = 6$ 64

أوجد الأساطير الهندسية المثلثية في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

1) $3, 9, 27, \dots$ (ب) $a_n = 3^n$ (د)	2) $2, -6, 18, \dots$ (ب) $a_n = 2(-3)^{n-1}$ (د)
3) $12, 36, 108, 324, \dots$ (ب) $a_n = 12(3^{n-1})$ (د)	4) $25, 175, 1225, 8575, \dots$ (ب) $a_n = 25(7^{n-1})$ (د)

أوجد a_n في كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

1) $1, \dots, 81$ (ب) $\pm 8, 16, \pm 32$ (د)	2) $51, \dots, 499, 37179$ (ب) $59049, 6561, 729, 81$ (د)
3) $S_n = 1640, r = 3, n = 8$ (ب) $S_n = 1295, r = 6, n = 4$ (د)	4) $S_n = 218\frac{2}{5}, a_1 = 1\frac{2}{5}, r = \frac{1}{5}$ (ب) $S_n = -342, a_1 = -512, r = -2$ (د)

الفصل ٦ - المتتابعات والمتسلسلات 18



مصادر الدرس 3 - 6

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

كتاب التمارين (12)

فوق ضمن

التدريبات الإثرائية (20)

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

أوجد a_n في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

$-4860, a_1 = 20, r = -3, n = 6$ (أ) $1215, a_1 = 5, r = 3, n = 6$ (ب)

$\frac{1}{32}, a_1 = 8, r = \frac{1}{2}, n = 9$ (ج) $2048, a_1 = -4, r = -2, n = 10$ (د)

$\frac{3}{1000000}, a_1 = 3, r = \frac{1}{10}, n = 8$ (هـ) $-\frac{1}{128}, a_1 = -3125, r = -\frac{1}{5}, n = 9$ (و)

اكتب معادلة الحد النوني في كل من المتابعات الهندسية الآتية:

$a_n = -1(5)^{n-1} \dots$ (أ) $a_n = (4)^{n-1} \dots$ (ب)

$a_n = -3(2)^{n-1} \dots$ (ج) $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1} \dots$ (د)

أوجد مجموع الحدود لكل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

$-9 \sum_{k=1}^6 9(-1)^{k-1}$ (أ) $-9840 \sum_{k=1}^8 (-3)(3)^{k-1}$ (ب) $1360 \sum_{k=1}^6 (-4)(-2)^{k-1}$ (ج)

أوجد a_n في كل من المتسلسلات الهندسية المعرفة كما يأتي:

$24, S_1 = 1512, n = 6, r = 2$ (أ) $50, S_1 = 1550, n = 3, r = 5$ (ب)

$121.5, S_1 = 4860, r = 3, a_1 = 3280.5$ (ج) $3485, S_1 = 3478.2, r = 2, a_1 = 3481.6$ (د)

(أ) أحياء: مجموع من الكبريتا في 200 عنصر، إذا عُدت أن عدد الكبريتا يتضاعف كل ساعتين مرة، فما عدد الكبريتا في المجتمع بعد 12 ساعة؟ 12800

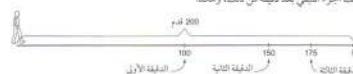
(ب) هواء: إذا كانت نسبة الضوء التي تحجبها طبقة سُمكها قدم واحدة من ماء بحيرة هي 60% من كمية الضوء الساقط عليها، فما نسبة كمية الضوء التي تمر خلال طبقة سُمكها 5ft من الماء؟ 1.024%

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات إثرائية

نصف المسافة

افترض أنك هل بعد 200 قدم من نقطة ثابتة P، والافترض أيضاً أنك تستطيع أن تصل إلى نقطة المنتصف في دقيقة واحدة، وإلى نقطة منتصف الجزء المتبقي بعد دقيقة من ذلك، وهكذا.



ستنجز متابعة ملقنة لالتياءه لأن تبعد المسافة، فأنت أن تصل النقطة P حقيقة، على الرغم من أنك تقرب منها بصورة كبيرة. يمكنك أن تحسب كم ستحتاج لتكون ضمن مسافة معينة صغيرة من النقطة. أدخل إلى الآلة الحاسبة المسافة التي تبين قطعها، ثم عد عدد مرات النسبة المتتالية على 2 النقطلة للوصول ضمن المسافة المطلوبة.

سؤال: ما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 قدم من نقطة تبعد 200 قدم؟

عد عدد المرات التي تقسم بها على 2. أدخل: 2 ENTER 2 ENTER 2 ENTER 2 ENTER، وهكذا النتيجة: 0.0976562. لقد قسمت على 2 إحدى عشرة مرة. الوقت المطلوب هو 11 دقيقة.

تأليف:

استخدم الطريقة الموضحة أعلاه لحل كل مسألة ما يأتي:

- إذا كانت المسافة بين مدينتين 2500 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.1 ميل من المدينة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عنها في ذلك الوقت؟
15 دقيقة، 0.0762934 ميل
- إذا كانت المسافة حول الأرض 25000 ميل، فكم دقيقة ستطلب لتكون ضمن 0.5 ميل من الدورة الكاملة حول الأرض؟ وكم سيكون بعدك عن نقطة النهاية؟
16 دقيقة، 0.3814697 ميل
- إذا كانت المسافة من الأرض إلى القمر 250000 ميل، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 0.5 ميل عن القمر؟ وكم سيكون بعدك عن سطح القمر عندها؟
19 دقيقة، 0.4768372 ميل
- إذا كانت المسافة بين جزيرتين 30000000 قدم، فما عدد الدقائق المطلوبة لتكون ضمن 1 قدم من الجزيرة الثانية؟ وكم سيكون بعدك عن الجزيرة الثانية في ذلك الوقت؟ 25 دقيقة، 0.8940697 ميل

ملاحظات المعلم

(9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عدداً فردياً في الأعداد الطبيعية؟ B

625 A

2500 B

2499 C

2401 D

أوجد الحد المطلوب في كلٍّ من المتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

(10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$ 512

(11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$ 1048576

(12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتابعة أدناه؟ D

0.5, _____, _____, _____, 2048

512.375, 1024.25, 1536.125 A

-683, 1365.5, -2048 أو 683, 1365.5, 2048 B

-2, 8, -32 أو 2, 8, 32 C

-4, 32, -256 أو 4, 32, 256 D

(13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان

راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهرياً. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر

الأربعة؟ 22412.65 ريال

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

(14) $\sum_{k=1}^8 3 \cdot 2^{k-1}$ 765

(15) $\sum_{k=1}^9 4 \cdot (-1)^{k-1}$ 4

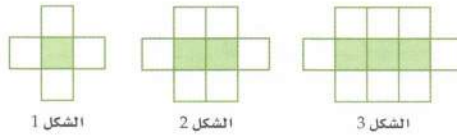
حدّد نوع المتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

غير ذلك؛ لا يوجد فرق ثابت

(1) $5, -3, -12, -22, -33, \dots$ ولا نسبة ثابتة

(2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \dots$ متتابعة حسابية؛ لأن هناك فرق ثابت وهو $\frac{1}{2}$

(3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطاً من المربعات المظللة والمربعات غير المظللة.



الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

(a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحد النوني) في هذا النمط. $a_n = 2n + 2$

(b) هل يمكن الحصول على 84 مربعاً (غير مظلّل) بالضبط في هذا النمط؟ انظر الهامش

أوجد الحد التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

(4) $a_1 = 10, d = -5$ -30

(5) $a_1 = -8, d = 4$ 24

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

(6) $-15 + (-11) + (-7) + \dots + 53$ 342

(7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$ 1584

(8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية

$\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟ -3620

التقويم التكويني

ستعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32).

المطويات

بل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجّعهم على مراجعة لمعلومات في الدروس من 6-1 إلى 6-3 من خلال مطوياتهم.

جاية

(31) نعم، عندما $2n + 2 = 84$ ، فإن $n = 41$ لذا ففي الشكل الحادي والأربعين (41) سيوجد 84 مربعاً غير مظلّل.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 6-1 إلى 6-3.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 6-4

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

الدرس 6-4

إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية.

كتابة الكسر العشري الدوري على صورة كسر اعتيادي.

ما بعد الدرس 6-4

إيجاد نهاية متتابعة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

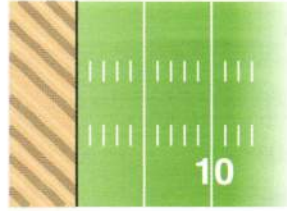
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- عند كتابة متسلسلة هندسية تُمثّل هذا الموقف. ما الحد الأول فيها؟ 5
- ما الحد الثاني؟ 2.5
- اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلة؟

$$5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \dots$$

• لماذا تُسمّى هذه المتسلسلة متسلسلة غير منتهية؟

• إجابة ممكنة: تستمر بلا حدود.



لماذا؟

إذا وضعت كرة على بُعد 10 أمتار من حائط، وبعد ذلك قمت بنقل الكرة في اتجاه الحائط على عدة مراحل، بحيث تبلغ المسافة التي تنقل إليها الكرة نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة، فهل تصل الكرة إلى الحائط؟ ما عدد المراحل التي تنقل فيها الكرة؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهاية).

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي التي لها عدد لا نهائي من الحدود، والمتسلسلة التي لها مجموع تكون **مقاربة**؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي، أما إذا لم يكن للمتسلسلة مجموع، فإنها تُسمّى **متسلسلة متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًا من متسلسلة هندسية لانهاية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع المسافات التي تقطعها الكرة تعطى بالمتسلسلة غير المنتهية $5 + 2.5 + 1.25 + \dots$ ، وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من 10 أمتار (وهو المجموع الفعلي لها). وبالتالي يمكن اعتبار أن الكرة تصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدودها إلى ما لانهاية. والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n ، حيث $1 \leq n \leq 10$

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المقاربة والمتسلسلات المتباعدة

المتسلسلات المتباعدة	المتسلسلات المقاربة
التعبير اللفظي: لا يقترب المجموع من عدد حقيقي.	التعبير اللفظي: يقترب المجموع من عدد حقيقي.
إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس): $ r \geq 1$	إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس): $ r < 1$
مثال: $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$	مثال: $5 + 2.5 + 1.25 + \dots$

مثال 1 المتسلسلات المقاربة والمتسلسلات المتباعدة:

حدّد أي المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين مقاربة، وأيهما متباعدة:

$$54 + 36 + 24 + \dots \quad (a)$$

أوجد قيمة r

وبما أن $1 < \frac{2}{3} < -1$ فإن المتسلسلة مقاربة.

فيما سيأتي:

درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

والآن:

- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية.
- أكتب الكسر الدوري على صورة كسر اعتيادي.

المفردات:

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

infinite geometric series

المتسلسلة المقاربة

convergent series

المتسلسلة المتباعدة

divergent series

مالانهاية

infinity

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني $-1 < r < 1$

مصادر الدرس 6-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنوع التعليم، ص (87، 90)	• تنوع التعليم، ص (87، 90)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

$$8 + 12 + 18 + \dots \text{ (b)}$$

و بما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

$$100 + 50 + 25 + \dots \text{ (1B) متقاربة}$$

$$2 + 3 + 4.5 + \dots \text{ (1A) متباعدة}$$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة

$$\frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1}{1 - r}$

مفهوم أساسي مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1 - r}$

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$)، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \dots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n ، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًا.

مثال 2 مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \dots \text{ (a)}$$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.
بقسمة الحد على الحد السابق له مباشرة $r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$
بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموع.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$\text{بالتبسيط} = \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$$

$$6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \dots \text{ (b)}$$

$r = \frac{9}{6} = 1.5$ ؛ وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

تحقق من فهمك

$$16 + 20 + 25 + \dots \text{ (2B) متباعدة}$$

$$\frac{8}{3} 4 - 2 + 1 - 0.5 + \dots \text{ (2A)}$$

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد
تتقارب المتسلسلة
الهندسية اللانهائية
عندما تكون القيمة
المطلقة لأي حد فيها
أقل من القيمة المطلقة
للحد السابق له. وتكون
المتسلسلة الحسابية
اللانهاية متباعدة دائمًا.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهاية)

مثال 1 يبين طريقة تحديد إذا كانت متسلسلة متقاربة أو متباعدة.

مثال 2 يبين طريقة إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية لانهاية.

مثال 3 يبين طريقة إيجاد المجموع لحدود متسلسلة مكتوبة باستعمال رمز المجموع.

التقويم التكويني

ستعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة لمفاهيم.

مثالان إضافيان

حدّد أي المتسلسلتين الآتيتين متقاربة وأيهما متباعدة؟

$$729 + 243 + 81 + \dots \text{ (a) متقاربة}$$

$$2 + 5 + 12.5 + \dots \text{ (b) متباعدة}$$

أوجد مجموع حدود كل من

المتسلسلتين الآتيتين، (إن وجد):

$$-\frac{4}{3} + 4 - 12 + 36 - \dots \text{ (a)}$$

$$108 + \dots \text{ ليس لها مجموع}$$

$$2 \cdot 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \dots \text{ (b)}$$

إرشادات للمعلم الجديد

برير تأكد من فهم الطلبة للعلاقة بين $|r| < 1$ ، والمتباينة المركبة $-1 < r < 1$.
تمثيل هذه المتباينة بيانياً على خط أعداد يساعد الطلبة على فهم المعنى ياضي لهما.

المحتوى الرياضي

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يتم تحديد إذا كانت المتسلسلة الهندسية اللانهائية متقاربة أم لا، اعتماداً على حاصل ضرب أي حد فيها في أساس المتسلسلة r . وبما أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب أي عدد في كسر بين -1 و 1 يكون دائماً أقل من القيمة المطلقة للعدد الأصلي، لذا يكون للمتسلسلة مجموع إذا كان الأساس r يُحقق المتباينة: $-1 < r < 1$.

يمكن استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{k=1}^{\infty} 18 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$\text{صيغة المجموع} \quad S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}} \quad \text{ثم بالتبسيط} \quad a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$$

$$= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90 \quad \text{بالتبسيط}$$

تحقق من فهمك ✓

$$(3) \text{ أوجد قيمة } \sum_{k=1}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهاية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545... = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + ...$ ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهاية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + ... = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + ...$$

$$\text{صيغة المجموع} \quad S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}} \quad a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$$

$$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11} \quad \text{بالتبسيط}$$

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$$\text{افرض } x = 0.\overline{63} \quad x = 0.\overline{63}$$

$$\text{بالكتابة على صورة كسر عشري دوري} \quad x = 0.636363...$$

$$100x = 63.636363...$$

$$99x = 63$$

$$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

تحقق من فهمك ✓

$$(4) \text{ اكتب } 0.\overline{21} \text{ على صورة كسر اعتيادي. } \frac{7}{33}$$

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب في كثير من الأحيان يمكن حل المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي.

مثال إضافي

$$3 \text{ أوجد قيمة } \sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

تنبيه!

تجنب الأخطاء كلف الطلبة كتابة بعض حدود المتسلسلة في المثال 3 لتأكد من فهمهم رمز المجموع.

الكسور العشرية الدورية

المثال 4 يبين طريقة تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال إضافي

$$4 \text{ اكتب الكسر الدوري } 0.\overline{25} \text{ على صورة كسر اعتيادي. } \frac{25}{99}$$

التعليم باستعمال التقنيات

الرسائل النصية اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يقوم الأول بإرسال رسالة إلى زميله تحتوي على كسر عشري دوري، فيرد الطالب الآخر على الرسالة بتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي، ثم يتبادلون الأدوار.

تنوع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة البحث عن إحدى الأحاجي الرياضية المشهورة، وهي أحجية زينو (Zeno's Paradox) ودعمهم يناقشوا هذه القصة عن سباق السلاحف من خلال محتوى الدرس.

مثال 1 حدّد أي المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيهما متباعدة:

(1) متقاربة $16 - 8 + 4 - \dots$ (2) متباعدة $1 + 1 + 1 + \dots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين (إن وجد):

(3) $880 + 440 + 220 + 110 + \dots$ (4) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \dots$ غير موجود

مثال 3 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين (إن وجد):

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ غير موجود (6) $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$ -4

مثال 4 اكتب كلاً من الكسرين العشريين الدوريين الآتين على صورة كسر اعتيادي:

(7) $0.3\overline{35}$ $\frac{35}{99}$ (8) $0.6\overline{42}$ $\frac{214}{333}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة.

م استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة

لعين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب

ستوياتهم.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أي المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيهما متباعدة:

(9) متباعدة $21 + 63 + 189 + \dots$ (10) متباعدة $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots$

(11) متقاربة $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$ (12) متباعدة $0.008 + 0.08 + 0.8 + \dots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية الآتية (إن وجد):

(13) $18 + 21.6 + 25.92 + \dots$ غير موجود (14) $-3 - 4.2 - 5.88 - \dots$ غير موجود

(15) $\frac{24}{5} + \frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \dots$ (16) $32 + 40 + 50 + \dots$ غير موجود

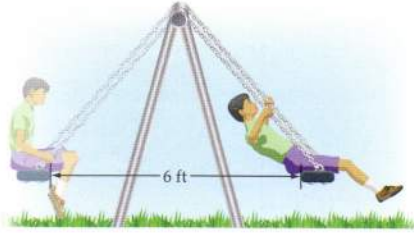
(17) أراجيج: إذا ترك سعيد نفسه عند نقطة البداية

ليتأرجح دون دفع منه، كما في الشكل، وقد

بدأت المسافة تتناقص بمقدار 10% في كل

تأرجح، فجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد

قطعها عندما تتوقف الأرجوحة تماماً. 60 ft



مثال 3 أوجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

(18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ غير موجودة (19) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ (20) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ 16

مثال 4 اكتب كلاً من الكسور العشرية الدورية الآتية، على صورة كسر اعتيادي:

(21) $0.3\overline{21}$ $\frac{53}{165}$ (22) $4.\overline{96}$ $\frac{164}{33}$ (23) $0.12\overline{14}$ $\frac{601}{4950}$

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة

المستوى

38-46 ، 36 ، 35 ، 9-23

دون المتوسط

23-46

ضمن المتوسط

24-46

فوق المتوسط



الربط مع الحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كل عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلاً من 100 بطارية عادية.

24) بطاريات قابلة للشحن أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟ **8000 ساعة**

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد):

$$(25) \dots + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{15}{4} + \frac{45}{4} \quad (26) \dots - 1 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9} + \frac{64}{63} - 27 \quad \text{غير موجود} \quad \frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \dots$$

28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

(a) حسابياً: افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. فُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحد الأول، ثم قص النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحد الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة غير المنتهية، التي تعبر عن الأجزاء لديك. $\dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

(b) عددياً: إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى ما لانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**. **1**

(c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

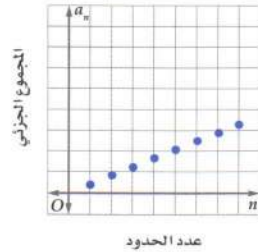
29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وبعد ذلك تركت لتندرج تلقائياً، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft، ثم بدأت تقطع في كل دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعها في الدقيقة السابقة. فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟ **200 ft**

30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الأرجحة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الأرجحة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقف عن الحركة. **240 cm**

31) ألعاب: أسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 قدماً، فكانت ترتد في كل مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فجد المسافة التي تقطعها حتى تقف. **1170 ft**

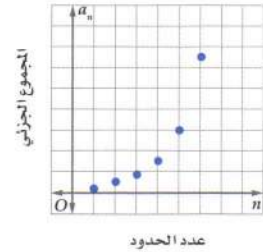
32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحد الزوار بسحب جسم معلق بزنبرك إلى أسفل ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كل مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم. **6 ft**

اربط بين كل شكل والوصف المناسب له:



(34)
d

- (b)** متسلسلة هندسية متباعدة.
(d) متسلسلة حسابية متباعدة.



(33)
b

- (a)** متسلسلة هندسية متقاربة.
(c) متسلسلة حسابية متقاربة.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في السؤال 28، النماذج والتحليل العددي، والوصف اللفظي، لتمثيل متسلسلة هندسية غير منتهية ومجموعها.

28c) مساحة البطاقة الأصلية هي وحدة مربعة، ولذلك فإن مجموع مساحات جميع القطع لا يمكن أن يزيد على 1.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **اكتشف الخطأ**، طُلب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ فكانت إجابتهما كما يأتي. فهل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح تبريرك: **انظر الهامش**

أحمد

لا يمكن إيجاد المجموع لأن $|r| \geq 1$ ، والمتسلسلة متباعدة.

علي

المجموع صفر، لأن مجموع كل زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.

36) **برهان**، اشتق معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية. **انظر الهامش**.

37) **تحدّ**، ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $3 + 9b + 27b^2 + 81b^3 + \dots$

38) **تبرير**، متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضح تبريرك.

39) **مسألة مفتوحة**، اكتب المتسلسلة $3 - 6 + 12 - \dots$ باستعمال رمز المجموع وبتريقتين مختلفتين.

40) **اكتب**، وضح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائماً. **انظر الهامش**.

$$-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3} \quad (37)$$

38) إجابة ممكنة: يكون

للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموع إذا كانت القيمة المطلقة للأساس أقل من 1، وعندما يحدث هذا فإن الحدود تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، وعندما تكون قيم الحدود قريبة من الصفر فإن المتسلسلة تقترب من عدد حقيقي، أما إذا كانت القيمة المطلقة للأساس أكبر من أو تساوي 1 فإن الحدود تزداد بصورة كبيرة وتقترب من اللانهاية مع زيادة قيمة n ، ولهذا فإن المجموع ليس له قيمة حقيقية.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3(-2)^{k-1}, \quad (40)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3(-2)^k$$

تدريب على اختيار

42) **هندسة**، ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. **C**

ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A حجم الكرة $\frac{1}{9}$

B حجم الكرة $\frac{1}{\pi^3}$

C حجم الكرة $\frac{1}{27}$

D حجم الكرة $\frac{1}{3}$

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 27 وأساسها $\frac{2}{3}$ هو: **A**

A 81

B 65

C 34

D 18

مراجعة تراكمية

43) **مسابقات**، تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كل جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصاً، فكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 3-6)

$$a_n = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

44) **حياكة**، مشغّل فيه 9 عاملات، تنتج كل منهن فستاناً يومياً. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبين مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كل يوم. (الدرس 2-6) **9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72**

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(46) \quad 27p^2 - 21p + 2 \quad (9p - 1)(3p - 2)$$

$$(45) \quad y^2 + 7y + 12 \quad (y + 4)(y + 3)$$

90 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية بحيث يقوم أحدهما بكتابة كسر عشري دوري، ويقوم الآخر بتحويله إلى كسر اعتيادي، ثم اطلب إليهم أن يتبادلوا الأدوار.

إجابات:

35) إجابة ممكنة: أحمد؛ لأن أساس

المتسلسلة هو $r = -1$ ، والقيمة

المطلقة هي $r = 1$ ، ولذا، فإن

المتسلسلة متباعدة.

36) إجابة ممكنة: مجموع المتسلسلة

$$\text{الهندسية هو } S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

وبالنسبة إلى المتسلسلة الهندسية غير

المنتهية التي فيها $|r| < 1$ ،

فإن $r^n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$. وبهذا

$$S = \frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

40) لأن للمتسلسلة الحسابية أساس. حيث

يزداد كل حد من حدودها إذا كان

الأساس موجباً، وينقص كل حد من

حدودها إذا كان الأساس سالباً. وفي

كلتا الحالتين لا يصل المجموع إلى

قيمة حقيقية محدّدة.

تنبيه

اكتشف الخطأ، في السؤال 35، ذكّر

الطلبة أن قيمة r تُحدّد هل المتسلسلة

متقاربة أم متباعدة.

تنبيه

قانون ذكّر الطلبة في السؤال 42 أن قانون

حجم الكرة يُعطى بالصيغة: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل عدة نسخ من ورقة

فيها خمس متسلسلات هندسية مختلفة،

عضها متقاربة وبعضها متباعدة. وأعط

كل طالب نسخة، واطلب إليه التمييز إذا

كانت كل متسلسلة فيها متقاربة أم متباعدة

وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الفصل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 3-6، 4-6، إعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لاستكشاف نهاية متتابعة.

المواد

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

يتم تمثيل المتتابعات بيانياً من خلال البرامج الإحصائية بالطريقة نفسها التي تُمثل بها البيانات الأخرى. ومن المهم أن يكون عدد العناصر في L_1 مساوياً لعدد العناصر في L_2 .

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم استعمال الحاسبة؛ لتنفيذ الخطوتين 2، 1 من النشاط.

• يمكن استعمال المفاتيح:

4:Window/Zoom

6:Window Settings...

لتحديد قيمًا لـ x, y لزيادة توضيح التمثيل البياني للمتتابعة.

• يمكن للطلبة التحقق من التمثيل مباشرة على الشاشة الرئيسية باستعمال ميزة Table بالضغط على المفاتيح:

2:View A:Show Table

على شاشة التمثيل البياني نفسها، حيث يظهر الجدول يمين التمثيل البياني، ويؤدي النتيجة نفسها، ويمكن اختصار العملية مباشرة من الشاشة الرئيسية بالضغط على ctrl T لظهور الجدول.

• تأكد من فهم الطلبة أن المتتابعة يكون لها نهاية عندما تقترب قيم حدودها من عدد معين.

التدريب كلف الطلبة حل التمارين 3-6.

علك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحد في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويسمى "الصفر" في هذه الحالة نهاية المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

يمكن عمل جدول للمتتابعة، وذلك بالضغط على المفاتيح:

4:Add Lists & Spreadsheets وكتب في العمود الأول n ، وكتب فيه الأعداد الصحيحة الموجبة، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحد النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ، ثم اضغط على المفتاح enter .

n	a_n
7	1/4096
8	1/16384
9	1/65536
10	1/262144
11	1/1048576

لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ ، فإن قيمة كل حد تكون قريبة من 0، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0.

الخطوة 2: مثل المتتابعة.

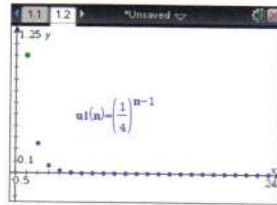
لتمثيل المتتابعة اضغط على المفاتيح:

2:Add Graphs 3:Graph Type 5:Sequence

1:Sequence ثم أدخل صيغة الحد النوني، والحد الأول للمتتابعة ثم اضغط على

المفاتيح: 4:Window/Zoom 6:Zoom - Quadrant 1

ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، مما يعني أن نهاية المتتابعة هي 0.



تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

(1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

(3) $a_n = 5^n$ غير موجودة

(6) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ غير موجودة

3 من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة في التمرين 5 تفحص المتتابعة: $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ ، ثم قسمة البسط والمقام على 3^n ، واستعمال النتيجة في توضيح أن النهاية هي 1.

3 التقويم

التقويم التكويني

ستعمل تمرين 6، لتقويم فهم الطلبة للحالة التي لا يوجد فيها نهاية للمتتابعة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: التاريخ:

6-4 تدريبات إعادة التعليم

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية، يطلق على المتسلسلة الهندسية التي ليس لها نهاية متسلسلة هندسية غير منتهية. وبعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لها مجموع، بينما البعض الآخر ليس لها مجموع، لأن المصاعم الجزئية تزداد دون أن تقرب من قيمة معينة.

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية
 $S = \frac{a_1}{1-r}$ لكل $-1 < r < 1$
 إذا كانت $r \geq 1$ ، فإن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ليس لها مجموع.

أمثلة:
 أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):
 (a) $75 + 15 + 3 + \dots$
 أوجد أول أربعة r لحدود ما إذا كان المجموع موجوداً، $a_1 = 75$
 $r = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$
 $S = \frac{75}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{75}{\frac{4}{5}} = \frac{75 \times 5}{4} = \frac{375}{4}$
 ما إن $|r| < 1$ فإن المجموع موجود. الآن استخدم صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
 $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{75}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{75}{\frac{4}{5}} = \frac{75 \times 5}{4} = \frac{375}{4}$
 صيغة المجموع
 $S_n = \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$
 $1 - r^{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$
 $S_n = \frac{75(1 - (\frac{1}{5})^{n+1})}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{75(1 - (\frac{1}{5})^{n+1})}{\frac{4}{5}} = \frac{75 \times 5(1 - (\frac{1}{5})^{n+1})}{4}$
 إذن مجموع المتسلسلة هو 93.75 أو $\frac{375}{4}$

ب) $48 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 في هذه المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $a_1 = 48$ و $r = \frac{1}{3}$
 صيغة المجموع
 $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{48}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{48}{\frac{2}{3}} = 48 \times \frac{3}{2} = 72$
 $1 - r^{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$
 $S_n = \frac{48(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{48(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})}{\frac{2}{3}} = 72(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$
 إذن $S_n = 72 - 72 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

ج) $1000 + 800 + 640 + \dots$
 غير موجود

د) $1000 + 800 + 640 + \dots$
 غير موجود

هـ) $24 \left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}$
 $S = \frac{24}{1 - \frac{7}{12}} = \frac{24}{\frac{5}{12}} = 24 \times \frac{12}{5} = \frac{288}{5} = 57.6$

و) $22 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $S = \frac{22}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{22}{\frac{1}{2}} = 44$

ز) $50 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$
 $S = \frac{50}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{50}{\frac{1}{5}} = 250$

الفصل ٦، التمارين والتطبيقات: 21

تدريبات إعادة التعليم - تمة (22) دون

الاسم: التاريخ:

6-4 تدريبات إعادة التعليم

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

الكسور العشرية المئوية، الكسر العشري الدوري يمثل كسرًا اعشاريًا، ولإيجاد الكسر الاعشاري، اكتب الكسر العشري على شكل متسلسلة هندسية غير منتهية، واستخدم صيغة المجموع

أ) 0.42
 اكتب الكسر العشري الدوري على صورة مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية
 $0.42 = 0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

ب) 0.524
 $S = \frac{0.524}{1 - 0.01} = \frac{0.524}{0.99} = \frac{524}{990} = \frac{262}{495}$

ج) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

د) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

هـ) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

و) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

ز) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

ح) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

ط) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

ي) $0.42424242 \dots$
 $S = \frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$

الفصل ٦، التمارين والتطبيقات: 22

تدريبات المهارات (23) دون ضمن دون فوق

الاسم: التاريخ:

6-4 تدريبات المهارات

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الآتية (إن وُجد):

1) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$
 $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

2) $a_1 = 5, r = -\frac{2}{5}$
 $S = \frac{5}{1 - (-\frac{2}{5})} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3}$

3) $a_1 = 8, r = 2$ غير موجود

4) $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$
 $S = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}} = 12$

5) $8 + 4 + 2 + \frac{1}{2} + \dots$
 $S = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$

6) $405 + 540 - 180 + 60 - 20 + \dots$
 $S = \frac{405}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{405}{\frac{1}{5}} = 2025$

7) $5 + 10 + 20 + \dots$ غير موجود

8) $-268.8 - 336 + 84 - 21 + \dots$
 $S = \frac{-268.8}{1 - \frac{1}{2}} = -537.6$

9) $156.25 + 125 + 25 + 5 + \dots$
 $S = \frac{156.25}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{156.25}{\frac{4}{5}} = \frac{156.25 \times 5}{4} = \frac{390.625}{4} = 97.65625$

10) $81 - 9 - 1 + \frac{1}{9} + \dots$
 $S = \frac{81}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81}{\frac{8}{9}} = \frac{81 \times 9}{8} = \frac{729}{8} = 91.125$

11) $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{27}{4} + \dots$ غير موجود

12) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
 $S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

13) $2 + 0.8 + 0.32 + \dots$
 $S = \frac{2}{1 - 0.4} = \frac{2}{0.6} = \frac{10}{3} \approx 3.33$

14) $27 + 9 + 6 + 4 + \dots$
 $S = \frac{27}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{27}{\frac{1}{3}} = 81$

15) $20 \sum_{k=1}^{\infty} 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$
 $S = 20 \times \frac{10}{1 - \frac{2}{3}} = 20 \times \frac{10}{\frac{1}{3}} = 20 \times 30 = 600$

16) $\frac{9}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 9 \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
 $S = \frac{9}{2} \times \frac{9}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{81}{2} \times \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{81 \times 9 \times 3}{4} = \frac{2187}{4} = 546.75$

17) $25 \sum_{k=1}^{\infty} 16 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$
 $S = 25 \times \frac{16}{1 - \frac{2}{3}} = 25 \times \frac{16}{\frac{1}{3}} = 25 \times 48 = 1200$

18) $-2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^{k-1}$
 $S = -2 \times \frac{1}{1 - (-\frac{4}{3})} = -2 \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = -6$

الفصل ٦، التمارين والتطبيقات: 23

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن دون فوق

الاسم: التاريخ:

6-4 تدريبات حل المسألة

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

1) مقارنة: إذا استعملت صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية على المتسلسلة التي حدها الأول 1 وأساسها 2، ستكون النتيجة المعادلة:
 $1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$
 حل هذه المسألة صحيحة؟ اذكر السبب ونقشه.

2) ليس صحيحاً: المتسلسلة الهندسية غير المنتهية لها مجموع فقط عندما $|r| < 1$

3) قواعد: الكسر العشري الدوري غير المنتهي...
 يساوي 1، ويمكن إثبات ذلك باستخدام مجموع متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ وحدها الأول $\frac{9}{10}$.
 أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{b-1}{b^3} + \dots$ حيث b عدد صحيح موجب أكبر من 1.

4) سؤال: طعم رجل آلي يبحث ينسأل كثر ارتفاعاً في كل مرة ليضع فيها حل زرع الشعير، وعندما تُسقط على الزرع لأول مرة، تسأل الرجل الآلي 10 أقدام. وفي كل مرة بعد ذلك كان ينسأل 75% مما تسأل في المرة السابقة، ما أعلى ارتفاع يمكن أن يتسأل الرجل الآلي؟

الفصل ٦، التمارين والتطبيقات: 24

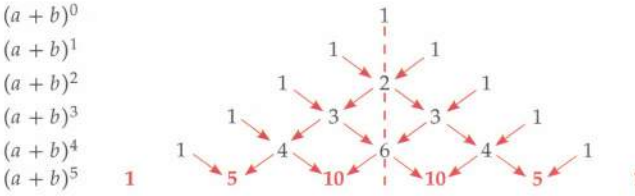
نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem



لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 6 متخصصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلث باسكال: اكتشف الصينيون في القرن الثالث عشر الميلادي نمطًا من الأعداد سُمي لاحقًا **مثلث باسكال**. ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a + b)^n$.



فعلى سبيل المثال يكون:

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

استعمال مثلث باسكال

مثال 1 من واقع الحياة

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية وذلك بإيجاد مفكوك $(a + b)^8$.

اكتب ثلاثة صفوف إضافية، مستعملًا النمط أعلاه.

5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

كما تبين من فقرة "لماذا؟" أعلاه ومن الصف الثامن في مثلث باسكال، فإن عدد حدود مفكوك $(a + b)^8$ هو 9، ومجموع الأسس في كل حد هو 8، وأن أس الحد الأول a يتناقص بمقدار 1 في كل مرة، بينما يتزايد أس الحد الثاني. لذا فعند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 256 توفيقًا من مختصّي المنطقتين يمكن استجارهم، وبما أن العدد 28 في المقدار $28a^6b^2$ يُمثل عدد التوفيقات التي فيها 6 مختصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استجار 6 مختصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{28}{256}$ أو 11% تقريبًا، وذلك حسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 28 وعدد الطرائق جميعها 256.

$$c^9 + 9c^8d + 36c^7d^2 + 84c^6d^3 + 126c^5d^4 + 126c^4d^5 + 84c^3d^6 + 36c^2d^7 + 9cd^8 + d^9$$

تحقق من فهمك

1 أوجد مفكوك $(c + d)^9$.

فيما سبق:

درست التوافيق واستعمالاتها.

والآن:

- أستعمل مثلث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a + b)^n$
- أستعمل نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$

المضردات:

مثلث باسكال

Pascal's triangle

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 6-5

استعمال التوافيق.

الدرس 6-5

استعمال مثلث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك $(a + b)^n$.

استعمال نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار $(a + b)^n$.

ما بعد الدرس 6-5

إيجاد احتمالات تجارب ذات حدين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"، واسأل:

- افترض أن اثنين فقط من كل منطقة تم اختيارهم. فكم عدد المتتابعات الممكنة تكوينها من 2 من المنطقة الأولى (M_1) ، و2 من المنطقة الثانية (M_2) ، حدّد قائمة بالخيارات. 6؛
- أوجد مفكوك $(a + b)^4$. ما الحد الذي معاملته 6 في المفكوك؟

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- ما عدد المتتابعات التي يكون فيها 3 أشخاص من المنطقة الأولى وشخص واحد من المنطقة الثانية؟ استعمل مفكوك $(a + b)^4$. ثم سجّل النتائج. 4؛

$$M_1M_1M_1M_2, M_1M_2M_1M_1, M_2M_1M_2M_1, M_2M_1M_1M_1$$

مصادر الدرس 6-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• ص (14)	• تنوع التعليم، ص (93, 95)	• تنوع التعليم، ص (95)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (90)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (90)

نظرية ذات الحدين: يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك ذات الحدين بدلاً من استعمال مثلث باسكال (تذكر أن: ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$).

مفهوم أساسي نظرية ذات الحدين

إذا كان n عدداً طبيعياً، فإن:

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n b^0 + {}_n C_1 a^{n-1} b^1 + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

عند استعمال النظرية استبدل n بقيمة الأس. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمط نفسه في مثلث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدين سالبة $(a-b)^n$ ، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافق.

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدين.

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7 C_1 a^6 b + {}_7 C_2 a^5 b^2 + {}_7 C_3 a^4 b^3 + {}_7 C_4 a^3 b^4 + {}_7 C_5 a^2 b^5 + {}_7 C_6 a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + \frac{7!}{6!} a^6 b + \frac{7!}{2!5!} a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!} a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!} a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!} a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد القوى، وبدلاً من إيجاد المعاملات باستعمال التوافق، استعمل الصف السابع من مثلث باسكال.

6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

(2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معامل الحدين في ذات الحدين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدين.

مثال 3 استعمال نظرية ذات الحدين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4 C_1 (5a)^3 (-4b) + {}_4 C_2 (5a)^2 (-4b)^2 + {}_4 C_3 (5a) (-4b)^3 + {}_4 C_4 (-4b)^4$$

$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!} (125a^3) (-4b) + \frac{4!}{2!2!} (25a^2) (16b^2) + \frac{4!}{3!} (5a) (-64b^3) + 256b^4$$

$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280a b^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

(3) أوجد مفكوك $(3x+2y)^5$. $243x^5 + 810x^4 y + 1080x^3 y^2 + 720x^2 y^3 + 240x y^4 + 32y^5$.

مثلث باسكال

المثال 1 يبين طريقة استعمال مثلث باسكال لإيجاد معاملات مفكوك قوى ذات الحدين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد مفكوك $(p+t)^5$.

$$p^5 + 5p^4 t + 10p^3 t^2 + 10p^2 t^3 + 5p t^4 + t^5$$

نظرية ذات الحدين

مثال 2 يبين طريقة استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد المفكوك.

مثال 3 يبين طريقة إيجاد المفكوك عندما يختلف المعاملان عن 1.

مثال 4 يبين طريقة استعمال نظرية ذات الحدين، لإيجاد حد معين في المفكوك.

مثالان إضافيان

2 أوجد مفكوك $(t-w)^8$.

$$t^8 - 8t^7 w + 28t^6 w^2 - 56t^5 w^3 + 70t^4 w^4 - 56t^3 w^5 + 28t^2 w^6 - 8t w^7 + w^8$$

3 أوجد مفكوك $(3x-y)^4$.

$$81x^4 - 108x^3 y + 54x^2 y^2 - 12x y^3 + y^4$$

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصراً كل مرة سابقاً بالرمز $n C_r$ ، وسيرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_n C_r$.

ارشادات للدراسة

توافق

$$0! = 1$$

$${}_n C_0 = \frac{n!}{(n-0)! 0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$${}_n C_n = 1$$

$${}_n C_n = \frac{n!}{(n-n)! n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2) x^{10} + 10x^9 y + 45x^8 y^2 + 120x^7 y^3 + 210x^6 y^4 + 252x^5 y^5 + 210x^4 y^6 + 120x^3 y^7 + 45x^2 y^8 + 10x y^9 + y^{10}$$

ارشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكن حساب قيمة ${}_n C_r$ باستعمال الحاسبة البيانية. اضغط على الزر **MATH** ثم اختر 3 PRB

تنوع التعليم

ضمن

إذا أردت إعطاء الطلبة الفرصة ليكونوا مبدعين.

فاطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية لكتابة أنشودة أو عدد من أبيات الشعر، يصفون فيها الأنماط في نظرية ذات الحدين.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك؛ لذا استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك ذات الحدين $(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k)$.

مثال 4 إيجاد قيمة حد معين

أوجد الحد الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

الخطوة 1: استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك نظرية ذات الحدين؛ لكتابة المفكوك.

$$(y+z)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k$$

الخطوة 2:

$$\begin{aligned} \text{عند الحد الخامس، تكون } k=4 \\ {}_{11}C_4 = 330 \\ \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^k = \frac{11!}{4!(11-4)!} y^{11-4} z^4 \\ = 330y^7z^4 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(4) أوجد الحد السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$. $252c^5d^5$



تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلث المشهور الذي يسمى الآن مثلث باسكال.

التعليم باستخدام التقنيات

تسجيل فيديو اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات لإنتاج شريط فيديو يوضح كيفية إيجاد مفكوك ذات الحدين. وأن يوضحوا من خلال عملهم كيفية استعمال كل من مثلث باسكال، ونظرية ذات الحدين في إيجاد المفكوك.

مفكوك ذات الحدين

ملخص المفاهيم

في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أس a في الحد الأول هو n ، وكذلك أس b في الحد الأخير هو n .
- يقل أس a بمقدار واحد، ويزيد أس b بمقدار واحد في أي حدين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حد يساوي n دائماً.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

المحتوى الرياضي

الأنماط ونظرية ذات الحدين

لإيجاد مفكوك $(a+b)^n$ ، فإن إشارة كل حد في المفكوك تعتمد على إشارة كل من a, b . فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

تأكد

الأمثلة 1-3

$$2) x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

$$3) y^4 - 16y^3z + 96y^2z^2 - 256yz^3 + 256z^4$$

مثال 4

$$5) -108864c^3d^5$$

$$6) y^5$$

$$7) 243a^5$$

تدريب وحل المسائل

الأمثلة 1-3

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

$$8) c^7 - 7c^6d + 21c^5d^2 - 35c^4d^3 + 35c^3d^4 - 21c^2d^5 + 7cd^6 - d^7$$

$$(3a-4b)^5 \quad (10)$$

$$(2a+4b)^4 \quad (9)$$

$$(c-d)^7 \quad (8)$$

مثال إضافي

أوجد الحد الرابع في مفكوك $(a+3b)^4$. $108ab^3$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-7 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة

المستوى

22-29 ، 8-17

دون المتوسط **دون**

22-29 ، 8-21

ضمن المتوسط **ضمن**

17-29

فوق المتوسط **فوق**

(11) **لجان** : إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلبة الصفين الأول والثاني الثانويين في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلاب الصفين متساوٍ وأن الاختيار يتم عشوائيًا.

(12) **كرة سلة** : إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلة لأحد اللاعبين، يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محددة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرة من بين 12 محاولة.

$$\frac{12}{4096} \approx 0.00293$$

أوجد الحد المطلوب في كلِّ ممَّا يأتي: **مثال 4**

(13) الحد الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$. $(14 - 540y^3x^3)$ الحد السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$. $75000xy^5$

(15) الحد الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$. $(16 - 32256x^5)$ الحد الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$. $12096c^5$

أوجد مفكوك كلِّ ممَّا يأتي: **للسؤالين 17, 18 انظر الهامش**

$$(17) \left(x - \frac{1}{3}\right)^4 \quad (18) \left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$$

(19) **كرة قدم** : إذا كان احتمال أن يسجل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70%، فأوجد احتمال أن يسجل 9 أهداف من 10 ضربات. **0.121 تقريبًا**

$$(11) \frac{120}{1024} = \frac{15}{128} \approx 0.117$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(20) **تحذر** : أوجد الحد السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$ ، ووضح إجابتك. $792a^3b^2\sqrt{ab}$

(21) **تبرير** : وضح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلِّ من $(x - y)^n$ ، $(x + y)^n$ ، وكيف تختلف.

(22) **مسألة مفتوحة** : اكتب قوة لذات حدين، الحد الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$. **إجابة ممكنة: $(x + \frac{6}{5}y)^5$**

(23) **اكتب** : وضح كيف يمكنك كتابة حدود مثلث باسكال. **انظر الهامش**

4 التقويم

بطاقة مكافأة أعط الطلبة قصاصات

من الورق، واطلب إليهم كتابة الصفوف السبعة الأولى من مثلث باسكال على هذه القصاصات، ثم اطلب إليهم تسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الفصل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

إجابات:

$$(17) x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{1}{81}$$

$$(18) 32b^5 + 20b^4 + 5b^3 + \frac{5}{8}b^2 + \frac{5}{128}b + \frac{1}{1024}$$

(23) **إجابة ممكنة**: الصف الأول فيه فقط العدد 1، والصف الثاني فيه العدد 1 مرتان، وكل صف تالي يبدأ وينتهي بالعدد 1. وكل عدد بينهما هو مجموع المعاملين الواقعين أعلاه في الصف السابق.

(30) **الطرف الأيمن 2، والطرف الأيسر هو:**

$$\frac{(1+1)(1+1)}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

إذن، فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

تدريب على اختبار

(25) أيُّ العلاقات التالية تُمثل دالة خطية؟ **C**

$$y = \frac{x+3}{2} \quad \text{C} \quad y = \frac{x+3}{x+2} \quad \text{A}$$

$$y = |3x| + 2 \quad \text{D} \quad y = (3x + 2)^2 \quad \text{B}$$

(24) **احتمال** : يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تم سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأرقام المبرية؟ **A**

$$\frac{1}{5} \quad \text{D} \quad \frac{5}{10} \quad \text{C} \quad \frac{7}{15} \quad \text{B} \quad \frac{5}{12} \quad \text{A}$$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلِّ من المتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 6-2)

$$a_6 = -7, a_7 = -1 \quad (27) \quad a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 5 \quad (26)$$

$$-37, -31, -25, -19, -13 \quad (28) \quad \text{أوجد مجموع المتسلسلة } \dots + 3 - 6 + 9 - 12 + 15 - 18 + 21 - 24$$

$$(29) \text{ بيّن إذا كانت الجملة } 2 = \frac{(n+1)(n+1)}{2} \text{ صحيحة عندما } n = 1, \text{ أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة) انظر الهامش}$$

تنوع التعليم

توسيع

توسيع اكتب العدد $(1.002)^5$ على السبورة، واسأل الطلبة كيف يمكنهم كتابة هذا العدد على شكل القوة الخامسة لذات حدين. ثم اطلب إليهم استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد قيمة $(1.002)^5$ مقربة إلى خمس منازل عشرية. **1.01004**

1 التركيز

هدف استعمال التوافيق ومثلث باسكال، لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

ارشادات التدريس

لفرق الرئيس بين التوافيق والتباديل، هو في أهمية الترتيب. ففي التباديل يكون الترتيب مهماً، أما في التوافيق فإن الترتيب غير مهم. ولتوضيح هذا الفرق ومساعدة الطلبة على فهمه يمكنك استعمال مثال الشطائر حيث يختار الطالب قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، ثم وجه الأسئلة الآتية:

• ماذا تلاحظ في ${}^5C_2, {}^5C_3$ ؟

لهما القيمة نفسها: 10.

• هل يمكن حساب 5C_6 ؟ لا يمكن.

• كيف يمكنك توسيع مثلث باسكال

للحصول على صفوف أكثر؟ إجابة

ممكنة: استعمال النمط الموجود في مثلث

باسكال، كل من العددين الأول والأخير

في أي سطر هو 1. وكل عدد بينهما هو

مجموع العددين القريبين له في السطر

السابق، وعدد العناصر في كل سطر يزيد

على عدد العناصر في السطر السابق له

بمقدار 1.

تدريب اطلب إلى الطلبة حل التمرينين

1, 2 من فقرة حُلّل النتائج.

تذكر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهم يُسمى توفيقاً. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة على الصورة: 6C_2 أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهندس في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1:

إذا لم يفز المتسابق في أية مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرة.

وتعلم مسبقاً أن ${}^nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}^5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أي جائزة تين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أي 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلث باسكال.

الخطوة 2:

تفحص مثلث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0	1					
الصف 1	1	1				
الصف 2	1	2	1			
الصف 3	1	3	3	1		
الصف 4	1	4	6	4	1	
الصف 5	1	5	10	10	5	1

حلّ النتائج:

(1) اكتب تخميناً حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار n من العناصر $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$ من العناصر من بين n من العناصر. (1) إجابة ممكنة، يوجد n من العناصر ولذلك نستعمل الصف n لإيجاد عدد الخيارات الممكنة، فالعدد

الأول يُمثل اختيار صفر من العناصر، والعدد الثاني يُمثل اختيار عنصر واحد وهكذا.

(2) على فرض أن قواعد المسابقة تغيرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 جوائز. 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلبة استعمال مثلث باسكال لإثبات أن

عندما يتم ثني مثلث باسكال حول

مستقيم رأسي يمر في المنتصف، فإن الأعداد تتطابق

فينطبق العنصر في الرتبة K مع العنصر في الرتبة

$n - k$ من أي سطر (صف).

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 2 من فقرة حُلّل النتائج لتقويم مدى فهم

الطلبة لكل من التوافيق ومثلث باسكال، واستعمال كل

منهما في إيجاد عدد طرق اختيار الجائزة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 6

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (27)

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-5 **تدريبات إعادة التعليم**
نظرية ذات الجدين

نظرية ذات الجدين (تزمة)

إذا كانت n عدداً طبيعياً، فإن:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

أوجد متكوك $(a-3b)^4$

$$(a-3b)^4 = \sum_{k=0}^4 \frac{4!}{k!(4-k)!} a^{4-k} (-3b)^k$$

$$= \frac{4!}{4!} a^4 + \frac{4!}{3!1!} a^3(-3b) + \frac{4!}{2!2!} a^2(-3b)^2 + \frac{4!}{1!3!} a(-3b)^3 + \frac{4!}{0!4!} (-3b)^4$$

$$= a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4$$

تساويين

أوجد متكوك كل ما يأتي:

$$1) (a-3)^5 = 18a^5 - 135a^4 + 540a^3 - 1215a^2 - 1450a + 729$$

$$2) (r+2)^5 = r^5 + 14r^4 + 84r^3 + 280r^2 + 560r + 672r^2 + 448r + 128r$$

$$3) (4x+y)^4 = 256x^4 + 256x^3y + 96x^2y^2 + 16xy^3 + y^4$$

$$4) (2 - \frac{m}{2})^3 = 32 - 40m + 20m^2 - 5m^3 + \frac{5}{8}m^4 - \frac{1}{32}m^5$$

أوجد الحد المطلوب في كل ما يأتي:

$$6) \text{ الحد الخامس في متكوك } (a+1)^6 = 35a^5$$

$$7) \text{ الحد الرابع في متكوك } (x+2k)^5 = 448k^4$$

$$8) \text{ الحد السادس في متكوك } (10-3t)^8 = -510300t^6$$

$$9) \text{ الحد الثاني في متكوك } (m+\frac{2}{3})^5 = 6m^4$$

$$10) \text{ الحد السابع في متكوك } (5x-2)^{10} = 9240000x^3$$

الفصل 6: التمارين والتطبيقات 27

دون

تدريبات إعادة التعليم (26)

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-5 **تدريبات إعادة التعليم**
نظرية ذات الجدين

مثلث باسكال، مثلث باسكال لخط العلامات للفرق بين متتاليات متساوية، يبدأ كل سطر ويتتهي بالعدد 1، وكل عدد هو مجموع للعددتين الوافتين فوقه في الصف السابق.

مثلث باسكال

$$\begin{matrix} (a+b)^0 \\ (a+b)^1 \\ (a+b)^2 \\ (a+b)^3 \\ (a+b)^4 \\ (a+b)^5 \end{matrix}$$

استعمل مثلث باسكال في إيجاد عدد الحالات الممكنة التي تحتوي على a^2 و b^2 العامل 10 للحد a^2b^2 في متكوك $(a+b)^5$ يعطي عدد الحالات التي تحتوي على a^2 و b^2

تساويين

أوجد متكوك كل ما يأتي:

$$1) (a+5)^4 = a^4 + 20a^3 + 150a^2 + 500a + 625$$

$$2) (x-2y)^6 = x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6$$

$$3) (j-3k)^5 = j^5 - 15j^4k + 90j^3k^2 - 270j^2k^3 + 405jk^4 - 243k^5$$

$$4) (2r+t)^7 = 128r^7 + 448r^6t + 672r^5t^2 + 560r^4t^3 + 280r^3t^4 + 84r^2t^5 + 14rt^6 + t^7$$

$$5) (2p+3m)^6 = 64p^6 + 576p^5m + 2160p^4m^2 + 4320p^3m^3 + 4860p^2m^4 + 2916pm^5 + 729m^6$$

$$6) (a - \frac{b}{2})^4 = a^4 - 2a^3b + \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{16}b^4$$

7) ربي القطع التالية، برمي عبد الرحمن قطعة نقدية 15 مرة، ما عدد الحالات المختلفة لرمي القطعة التي تتضمن ظهور 4 كرات و 11 شعرا؟

1365

الفصل 6: التمارين والتطبيقات 26

فوق

تدريبات حل المسألة (29)

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-5 **تدريبات حل المسألة**
نظرية ذات الجدين

1) مساحة طول ضلع المربع المرسوم $x+y$ لذا فإن مساحة تساوي:

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$$

يشكل كل حد من الحدود الأربعة جزءاً معيناً من المساحة. ضع كل حد في المنطقة التي تخصه من مساحة المربع

2) قومي، تبين نظرية ذات الجدين عن أن:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

وضح ما الذي ستؤول إليه قوى العدد 2 إذا عرّضت عن $n=3$ في المعادلة.

مجموع الأعداد في كل صف في مثلث باسكال هو قوة لعدد 2.

3) تحسب العيار، يوجد في الحكمة العليا تسعة قطاعات وتطلب معظم الأحكام رأي الأغلبية، ما عدد مجموعات التصويت المحتملة للوصول إلى الأغلبية؟ مساعداً: الأغلبية تعني 5 أو 6 أو 7 أو 8 أو 9 أصوات.

$$9C_5 + 9C_6 + 9C_7 + 9C_8 + 9C_9 = 256$$

4) تصانق، نقرأ الأعداد في كل صف في مثلث باسكال من اليسار إلى اليمين، وهو يمثل لقراءتها من اليمين إلى اليسار. وضح سبب هذه الحالة؟

إجابة ممكنة: إذا بدأنا مع x ونظرية ذات الجدين، فإن المعاملات سينعكس ترتيبها، وأن $(x+y)^n = (y+x)^n$ ، فإن المعاملات لا تتغير فيها.

5) حجة، طول كل حرف من الكعب التالي هو $x+y$ وحدة.

أوجد متكوك $(x+y)^3$ مستخدماً نظرية ذات الجدين.

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

الفصل 6: التمارين والتطبيقات 29

فوق

تدريبات المهارات (28)

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-5 **تدريبات المهارات**
نظرية ذات الجدين

أوجد متكوك كل ما يأتي:

$$1) (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$2) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3) (g-h)^4 = g^4 - 4g^3h + 6g^2h^2 - 4gh^3 + h^4$$

$$4) (m+1)^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$5) (a-5)^4 = a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$$

$$6) (d+2)^3 = d^3 + 6d^2 + 12d + 8$$

$$7) (y-7)^2 = y^2 - 14y + 49$$

$$8) (d+10)^4 = d^4 + 40d^3 + 60d^2 + 40d + 1$$

$$9) (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$10) (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$11) (c-4d)^2 = c^2 - 8cd + 16d^2$$

$$12) (2a+3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$$

$$13) \text{ أوجد الحد المطلوب في كل ما يأتي: } (5x+3)^2 = 45000x^2$$

$$14) \text{ الحد الخامس في متكوك } (x-3)^{10} = 1215x^5$$

$$15) \text{ الحد الثالث في متكوك } (11x+3)^5 = 1976535x^3y^2$$

$$16) \text{ الحد الثاني عشر في متكوك } (13x-4y)^{11} = -4194304y^{11}$$

$$17) \text{ الحد الرابع في متكوك } (m+n)^{10} = 120m^3n^7$$

$$18) \text{ الحد السابع في متكوك } (x-y)^8 = 28x^2y^6$$

$$19) \text{ الحد الثالث في متكوك } (b+6)^5 = 360b^3$$

$$20) \text{ الحد السادس في متكوك } (r-2)^7 = -4032r^4$$

$$21) \text{ الحد الخامس في متكوك } (2a+3)^5 = 4860a^3$$

$$22) \text{ الحد الثامن في متكوك } (3x-y)^7 = -5103x^3y^4$$

الفصل 6: التمارين والتطبيقات 28

البرهان بالاستقراء الرياضي Proof by Mathematical Induction



لماذا؟

إذا صُنِّت قطع الدومينو متقاربة كما في الشكل المجاور، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى. وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضي.

الاستقراء الرياضي: الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية.

والآن:

أبرهن الجمل الرياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.
أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضاد.

المضردات:

الاستقراء الرياضي mathematical induction

فرضية الاستقراء induction hypothesis

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 6-6

إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.

الدرس 6-6

برهنة صحة جمل رياضية باستعمال

الاستقراء الرياضي

إثبات خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال

مضاد.

ما بعد الدرس 6-6

إيجاد نهايات المتتابعات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- تخيل أن كل حجر من أحجار الدومينو أعطي رقمًا من الأعداد الطبيعية، فما الذي يجعل الحجر رقم 2 يسقط؟
- سقوط الحجر رقم 1.
- ما الذي يجعل الحجر رقم 3 يسقط؟
- سقوط الحجر رقم 2.
- إذا سقط الحجر رقم n فما الذي سيحدث للحجر رقم $n + 1$ ؟ سيسقط.

الاستقراء الرياضي

المثالين 1, 2 يوضحان الخطوات الثلاث

للبرهان، باستعمال الاستقراء الرياضي.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

الاستقراء الرياضي

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n اتبع الخطوات الآتية:

- الخطوة 1:** برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.
- الخطوة 2:** افرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمى **فرضية الاستقراء**.
- الخطوة 3:** برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 برهان المجموع

برهن أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افرض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أي برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

فرضية الاستقراء

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

بجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين

بالجمع

بالتحليل

بالتبسيط

بالتحليل

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$ ، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

(1) برهن أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ انظر ملحق الإجابات

97 الدرس 6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي

مصادر الدرس 6-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (98)	• تنويع التعليم، ص (98, 100)	• تنويع التعليم، ص (100)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

وكما في برهان المجموع فإن الاستقراء الرياضي يمكن استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضاً.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .
الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^1 - 1 = 7$ ، وبما أن 7 يقبل القسمة على 7، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$.

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$ أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7؛

$$\text{فرضية الاستقراء} \quad 8^k - 1 = 7r$$

$$\text{بإضافة 1 لكلا الطرفين} \quad 8^k = 7r + 1$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في 8} \quad 8(8^k) = 8(7r + 1)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 8^{k+1} = 56r + 8$$

$$\text{ب طرح 1 من كلا الطرفين} \quad 8^{k+1} - 1 = 56r + 7$$

$$\text{بالتحليل} \quad 8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$$

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7؛ إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7. وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2 برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n . انظر ملحق الإجابات

الأمثلة المضادة يمكن إثبات خطأ جملة رياضية من خلال الاستقراء الرياضي، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضاد تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضاد لإثبات خطأ جملة رياضية

أعط مثلاً مضاداً يبين أن الجملة $2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 حيث n أي عدد طبيعي، هي جملة خاطئة. اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

هل تقبل القسمة على العدد 4؟	$2^n + 2n^2$	n
نعم	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	1
نعم	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	2
لا	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	3

إذن، فالقيمة $n = 3$ تعد مثلاً مضاداً للجملة.

تحقق من فهمك

3 أعط مثلاً مضاداً يبين خطأ الجملة: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ حيث n أي عدد طبيعي.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

العدد r هو عدد طبيعي يُستعمل لتوضيح قابلية القسمة. فمثلاً إذا ساوى عدد ما المقدار $4r$ ، فهذا يعني أن هذا العدد يقبل القسمة على 4.

التقويم التكويني

تعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة مفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي جهّز عرضاً تقديمياً عن الاستقراء الرياضي، يتضمن العديد من الأمثلة. ثم انشره في موقع على شبكة الإنترنت كي يستطيع الطلبة الوصول إليه.

مثالان إضافيان

$$\text{برهن أن: } 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، الطرف الأيمن هو $\frac{1[3(1) - 1]}{2}$ ويساوي 1، ولذلك فإن العبارة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي

$$\text{الخطوة 3: } 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{k(3k - 1)}{2} + [3(k + 1) - 2]$$

$$= \frac{k(3k - 1)}{2} + 3k + 1 - 2 = \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2}$$

والجملة الأخيرة هي الطرف الأيمن في المعادلة المطلوب إثبات صحتها، عندما $n = k + 1$.

برهن أن $6^n - 1$ يقبل القسمة على العدد 5 لكل عدد طبيعي n . تُستعمل في البرهان خطوات شبيهة بخطوات حل المثال 2 في كتاب الطالب.

مراجعة المفردات

مثال مضاد

أحد معاني كلمة مضاد هو مناقض، لذلك فإن المثال المضاد هو مثال يناقض الفرضية.

تنوع التعليم

دور ضمن

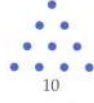
المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة تمثيل الاستقراء الرياضي وذلك بتنظيم أنفسهم في صف واحد. أخبر الطالب الموجود في بداية الصف رسالة شفوية ما، ثم اطلب إليه نقل الرسالة التي سمعها إلى زميله الذي يليه في الصف وهكذا. وضح للطلبة أن إخبار الطالب الأول لزميله التالي تُمثّل أن $n = 1$ عبارة صحيحة. وأن تعليماتك لنقل الرسائل جميعها للزميل التالي تُمثّل أن $k + 1$ عبارة صحيحة.

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها: **مثال 1**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2) \quad \text{انظر ملحق الإجابات}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (1) \quad \text{انظر الهامش}$$

(3) نظرية الأعداد يُسمى العدد عدداً مثلثياً، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلث كما في الشكل أدناه.



(a) إذا علمت أن العدد المثلثي الأول هو 1. فجد الأعداد المثلثية الخمسة التالية.

(b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلثي الذي ترتيبه n .

(c) برهن أن مجموع أول n من الأعداد المثلثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها: **مثال 2**

$$10^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 9 \quad (4)$$

$$4^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 3 \quad (5)$$

أعط مثلاً مضاداً يُبين خطأ كل من الجملتين الآتيتين، حيث n أي عدد طبيعي:

$$3^n + 1 \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 2 \quad (6)$$

$$2^n + 3^n \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 1 \quad (7)$$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

برهن صحة كل من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها: **11-8** انظر ملحق الإجابات

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (8)$$

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2} \quad (9)$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad (10)$$

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = 2n^2 + n \quad (11)$$

(12) هندسة، برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب $(2n-2)$ ، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$ باستعمال الاستقراء الرياضي والهندسة. انظر ملحق الإجابات.



مثال 2

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

$$9^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 8. \quad (13)$$

$$12^n + 10 \text{ يقبل القسمة على } 11. \quad (14)$$

أعط مثلاً مضاداً يُبين خطأ كل من الجملتين الآتيتين، حيث n أي عدد طبيعي:

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (2n+2)^2 \quad n = 3 \quad (15)$$

$$n^2 + n + 23 \text{ عدد أولي. } n = 1 \quad (16)$$

تنبيه!

ورق رسم بياني من المفيد للطلبة أن يرسموا الأشكال الخمسة الأولى في السؤال 17 على ورقة رسم بياني.

أمثلة مضادة

مثال 3 يوضح كيفية إثبات خطأ جملة معينة عن طريق إعطاء مثال مضاد.

مثال إضافي

3 أعط مثلاً مضاداً يبين خطأ الجملة $(n^2 + n + 5)$ عدد أولي لكل عدد طبيعي n . إجابة ممكنة: $n = 4$

التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

1 الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف

الأيسر من المعادلة هو 1، أما الطرف

الأيمن فهو $1^2 = 1$ ؛ أي أن المعادلة

صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3:

$$1 + 3 + 5 + \dots +$$

$$(2k-1) + (2(k+1)-1)$$

$$= k^2 + (2(k+1)-1)$$

$$\text{بجمع } 2(k+1)-1 \text{ للطرفين}$$

$$= k^2 + (2k+2-1)$$

$$\text{بالتحليل } = k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من

المعادلة المطلوبة إثبات صحتها عندما

$n = k + 1$ ؛ أي أن المعادلة صحيحة

عندما $n = k + 1$. إذن

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

لكل عدد طبيعي n .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأئلة
دون المتوسط	28-36 ، 25-26 ، 8-16
ضمن المتوسط	28-36 ، 25-26 ، 8-17
فوق المتوسط	18-36

فهم الرياضيات اكتب معادلة في متغير واحد على السبورة، بحيث لا تكون صحيحة لقيم المتغير جميعها. واطلب إلى الطلبة أن يعد كل منهم قصاصة ورق مكتوب عليها أمثلة مضادة، توضح أن المعادلة ليست صحيحة دائماً.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 6-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابة:

الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف

الأيسر من المعادلة هو f_1 . وأما

الطرف الأيمن فهو $f_3 - 1$ وبما

$f_1 = 1, f_3 = 2$ فإن المعادلة تصبح

$1 = 2 - 1$ وهي صحيحة عندما

$n = 1$

الخطوة 2: افرض أن

$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f_{k+2} - 1$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1}$

$= f_{k+2} - 1 + f_{k+1}$

$= f_{k+1} + f_{k+2} - 1$

$= f_{k+3} - 1$

وذلك لأن كل عدد من أعداد متتابعة

(فيوناشي) ينتج عن جمع العددين

السابقين. العبارة الأخيرة هي الطرف

الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها،

حيث $n = k + 1$ ؛ لذا، تكون المعادلة

صحيحة عندما $n = k + 1$ ؛ أي أن:

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$

لكل الأعداد الطبيعية n .



الربط مع الحياة

تظهر حدود متتابعة فيوناشي كثيراً، كما في بذور قرص تباع الشمس.

(17) متتابعة فيوناشي: تبدأ متتابعة فيوناشي بالحدود $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ويكون الحد التالي فيها مساوياً لمجموع الحدين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحد الثاني). فإذا كان f_n يمثل عدد فيوناشي ذا الرقم n ، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كل جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعط مثالاً مضاداً يثبت خطأها:

(18) $5 + 7^n$ يقبل القسمة على 6 **انظر ملحق الإجابات (19)** $1 - 18^n$ يقبل القسمة على 17 **انظر ملحق الإجابات**

(20) $n^2 + 21n + 7$ عدد أولي. $n = 6$ **(21)** $n^2 + 3n + 3$ عدد أولي. $n = 3$

(22) $625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 500 + 100 + 20 + \dots + 4 \cdot 5^4 - n$ **انظر ملحق الإجابات**

مسائل مهارات التفكير العليا

(23) انظر ملحق الإجابات

(23) تحد: اكتب قاعدة تمثل المجموع $2n + 2 + 4 + 6 + \dots$ ، ثم برهنها باستعمال الاستقراء الرياضي.

تبرير: حدّد إذا كانت كل من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأ. وضح إجابتك.

(24) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضاد في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

(25) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ وعند $n = k + 1$ ، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

(26) تحد: برهن أن: $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **انظر ملحق الإجابات**

(27) مسألة مفتوحة: اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال الاستقراء الرياضي.

انظر ملحق الإجابات

(28) اكتب: وضح الاستقراء الرياضي بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

(24) إجابة ممكنة: خطأ حتى إن لم نستطع إيجاد مثال مضاد مباشرة، فهذا لا يعني عدم وجوده. إذ يمكن إثبات خطأ جملة بسهولة، ولكن إثبات صحتها يكون أصعب؛ لأن إثبات الصواب يتطلب استعمال الاستقراء الرياضي أو الهندسة أو طرق أخرى.

(26) إجابة ممكنة: خطأ، مثال مضاد $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5

عندما $n = 2$ وعندما $n = 3$

لكنها غير صحيحة عندما $n = 1$.

(29) إجابة ممكنة: صعود السلم، حيث إن كل خطوة تقود إلى الخطوة التالية.

تدريب على اختبار

(29) أي الأعداد الآتية يُعدّ مثالاً مضاداً لإثبات خطأ الجملة: **B**

$$n^2 + n - 11 \text{ عدد أولي}$$

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

(30) مبدأ العد: يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به

مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة

من أحرف اسمه والرموز الأربعة التالية مكوّنة من أرقام العدد

1986 والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي

يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟ **B**

A 72 **C** 288

B 144 **D** 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد المطلوب في كل ممّا يأتي: (الدرس 5-6)

(31) الحد الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

(32) الحد الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

(33) الحد الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

$-84x^6y^3$

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

(34) $1000 + 20 + 15 + 10 + 5$ (الدرس 2-6) **100500**

(35) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \dots$ (الدرس 4-6) **$\frac{3}{20}$**

100 الفصل 6 المتتابعات والمتسلسلات

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلبة أن العدد $n!$ يُعرف على أنه حاصل ضرب الأعداد الطبيعية جميعها الأصغر من أو تساوي n .

اطلب إليهم أن يبرهنوا. أن: $n! = (n-1)(n) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيمن من المعادلة هو $1! = 1$ والطرف الأيسر 1، إذن الجملة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $k! = (k-1)(k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لأي عدد طبيعي k .

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)(k)(k+1) = k!(k+1)$$

$$= [k(k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1](k+1)$$

$$= (k+1)k(k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (k+1)k!$$

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرس 2-6، 1-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d يُعطى بالصيغة:
 $a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرس 4-6، 3-6)

- الحد النوني a_n في متتابعة هندسية حدها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
 $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية يُعطى بالصيغة:
 $S = \frac{a_1}{1-r}$ حيث $|r| < 1$

نظرية ذات الحدين (الدرس 5-6)

• نظرية ذات الحدين:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$

الاستقراء الرياضي (الدرس 6-6)

- الاستقراء الرياضي هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات

منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

المتتابعة	ص 64	المجموع الجزئي	ص 72
الحد	ص 64	رمز المجموع	ص 73
المتتابعة المنتهية	ص 64	الأوساط الهندسية	ص 79
المتتابعة غير المنتهية	ص 64	المتسلسلة الهندسية	ص 80
المتتابعة الحسابية	ص 64	المتسلسلة الهندسية غير المنتهية	ص 85
أساس المتتابعة الحسابية	ص 64	المتسلسلة المتقاربة	ص 85
الفرق المشترك	ص 64	المتسلسلة المتباعدة	ص 85
المتتابعة الهندسية	ص 66	ما لا نهاية	ص 87
أساس المتتابعة الهندسية	ص 66	مثلث باسكال	ص 92
النسبة المشتركة	ص 66	نظرية ذات الحدين	ص 93
الأوساط الحسابية	ص 71	الاستقراء الرياضي	ص 97
المتسلسلة	ص 72	فرضية الاستقراء	ص 97
المتسلسلة الحسابية	ص 72		

اختبار المفردات

حدّد إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعُدّل المصطلح الذي تحته خط لتصبح صحيحة:

(1) تُسمى المتسلسلة غير المنتهية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة. **صحيحة**

(2) الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية. **صحيحة**

(3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية. **صحيحة**

(4) الحد هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة. **خطأ، المتتابعة**

(5) يُسمى مجموع أول n حدًا من متسلسلة، المجموع الجزئي. **صحيحة**

(6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حد فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. **خطأ، المتتابعة الحسابية**

(7) تُسمى المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة. **خطأ، متسلسلة متباعدة**

(8) 17، 11، هما وسطان هندسيان بين العددين 23، 5 في المتتابعة 5، 11، 17، 23. **خطأ، وسطان حسابيان**

(9) باستعمال نظرية ذات الحدين فإن:
 $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. **صحيحة**

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكّرهم بأن يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات

منظم أفكار

ويبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

6-1 المتتابعات بوصفها دوال ص 64-69

مثال 1

أوجد الحد الحادي عشر في المتابعة الحسابية التي فيها:

$$a_1 = -15, d = 6$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = 11, a_1 = -15, d = 6 \quad a_{11} = -15 + (11-1)6$$

$$\text{بالتبسيط} \quad a_{11} = 45$$

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الحسابية الآتية:

$$(10) \quad a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ? \quad 48$$

$$(11) \quad a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ? \quad 123$$

$$(12) \quad a_1 = 10, d = -4, a_9 = ? \quad -22$$

$$(13) \quad a_1 = -1, d = -5, a_{18} = ? \quad -86$$

مراجعة الدروس

بالحة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير فية لمراجعة المواضيع التي تناولتها أسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات التي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

طلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع لفصل 6 ص (27)، وناقشهم حول تغيير أجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 70-77

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابين بين العددين 3، 39.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = 4, a_1 = 3 \quad a_4 = 3 + (4-1)d$$

$$a_4 = 39 \quad 39 = 3 + 3d$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 12 = d$$

$$\text{الوسطان الحسابيان هما: } 3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$$

$$\text{صيغة المجموع} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56 \quad S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 296$$

مثال 4

$$\text{أوجد قيمة } \sum_{k=3}^{15} (5k+1)$$

$$\text{استعمل الصيغة } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{في المتسلسلة 13 حدًا، وحدها الأول } a_1 = 5(3) + 1 = 16$$

$$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$$

$$= 598$$

أوجد الأوساط الحسابية في كل من المتتابعات الآتية:

$$(14) \quad -12, _, _, _, 8 \quad -7, -2, 3$$

$$(15) \quad 15, _, _, 29 \quad \frac{59}{3}, \frac{73}{3}$$

$$(16) \quad 12, _, _, _, -8 \quad 8, 4, 0, -4$$

$$(17) \quad 72, _, _, _, 24 \quad 60, 48, 36$$

(18) **توفير** يوفر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفره في

نهاية السنتين؟ **1920 ريالًا**أوجد S_n كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

$$(19) \quad a_1 = 16, a_n = 48, n = 6 \quad 192$$

$$(20) \quad a_1 = 8, a_n = 96, n = 20 \quad 1040$$

$$(21) \quad 9 + 14 + 19 + \dots + 74 \quad 581$$

$$(22) \quad 16 + 7 + (-2) + \dots + (-65) \quad -245$$

(23) **مسرح** لكي يؤدي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النص مرتين في اليوم الأول، وأربع مرات في اليوم الثاني، وست مرات في اليوم الثالث وهكذا. ما

عدد المرات التي سيتدربها في اليوم السادس؟ **12**

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الحسابية الآتية:

$$(24) \quad \sum_{k=5}^{21} (3k-2) \quad 629$$

$$(25) \quad \sum_{k=0}^{10} (6k-1) \quad 319$$

$$(26) \quad \sum_{k=4}^{12} (-2k+5) \quad -99$$

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 78-83

مثال 5

أوجد الحد السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها:
 $a_1 = 9, r = 4$

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني} \quad a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ n=6, a_1=9, r=4 \quad a_6 &= 9 \cdot 4^{6-1} \\ a_6 &= 9216 \end{aligned}$$

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$$\begin{aligned} \text{الحد النوني} \quad a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ n=4, a_1=1 \quad a_4 &= 1 \cdot r^{4-1} \\ a_4=27 \quad 27 &= r^3 \\ \text{بالتبسيط} \quad 3 &= r \end{aligned}$$

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3, 3(3) = 9$.

مثال 7

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^6 2 \cdot (4)^{k-1}$

$$\begin{aligned} n=6, a_1=2, r=4 \quad S_6 &= \frac{2-2 \cdot 4^6}{1-4} \\ \text{بالتبسيط} \quad &= \frac{-8190}{-3} = 2730 \end{aligned}$$

أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

(27) $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$ 320

(28) $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$ 99

(29) $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$ 8

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كل من المتتابعات الآتية:

(30) 6, __, __, 162 18, 54

(31) 8, __, __, __, 648 $\pm 24, 72, \pm 216$

(32) -4, __, __, 108 12, -36

(33) توفير مع سعيد 1000 ريال، إذا بدأ بصرف يومياً نصف المبلغ الموجود. فكم سيكون المبلغ المتبقي بعد مرور 4 أيام؟ 62.5 ريالاً

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين:

(34) $\sum_{k=1}^7 3 \cdot (-2)^{k-1}$ 129

(35) $\sum_{k=1}^8 -1 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $-\frac{6305}{2187}$

6-4 المتسلسلات الهندسية غير المنتهية ص 85-90

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي فيها:

$$a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$$

$$\text{صيغة المجموع} \quad S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$a_1 = 15, r = \frac{1}{3} \quad = \frac{15}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$$

أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية فيما يأتي (إن وجد):

(36) $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$ 32

(37) $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \dots$ غير موجود

(38) $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ 6

(39) رياضة: أسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها 60 ft، فارتدت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمر ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟ 300 ft

6-5 نظرية ذات الحدين ص 92-95

مثال 9

أوجد مفكوك $(x - 3y)^4$.

$$(x - 3y)^4 = x^4 + {}_4C_1 x^3(-3y) + {}_4C_2 x^2(-3y)^2 + {}_4C_3 x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$

$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد الحد الرابع في مفكوك $(x + y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك

$$(x + y)^8 = \sum_{k=0}^8 \frac{8!}{k!(8-k)!} x^{8-k} y^k$$

بالنسبة للحد الرابع فإن $k = 3$ ، لذلك يكون الحد الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} x^{8-3} y^3 = 56x^5y^3$$

أوجد مفكوك كل مما يأتي: 44-41 انظر الهامش

(40) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^3$

(41) $(y - 3)^7$

(42) $(3 - 2z)^5$

(43) $(4a - 3b)^4$

(44) $(x - \frac{1}{4})^5$

أوجد الحد المطلوب في كل مما يأتي:

(45) الحد الثالث في مفكوك $(a + 2b)^8$ $112a^6b^2$

(46) الحد السادس في مفكوك $(3x + 4y)^7$ $193536x^2y^5$

(47) الحد الثاني في مفكوك $(4x - 5)^{10}$ $-13107200x^9$

6-6 البرهان بالاستقراء الرياضي ص 97-100

مثال 11

برهن أن $3 + 9^n$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n = 1$ ، فإن: $9^1 + 3 = 12$.

وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن $3 + 9^k$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $3 + 9^k = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 $9^k + 3 = 4r$

$$9^k = 4r - 3$$

$$9^{k+1} = 36r - 27$$

$$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$$

$$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$$

$$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$$

وبما أن r عدد كلي فإن $9r - 6$ عدد كلي، وهذا يعني أن:

$9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند

$$n = k + 1$$

إذن $3 + 9^n$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

برهن صحة كل جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

(48) انظر الهامش

$$2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (48)$$

$$5^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 4. \quad (49)$$

49 انظر ملحق الإجابات.

أعط مثالاً مضاداً يبين أن كلاً من الجمل الآتية خطأ، حيث n أي عدد طبيعي:

(50) $8^n + 3$ يقبل القسمة على 11. $n = 2$

(51) $6^{n+1} - 2$ يقبل القسمة على 17. $n = 2$

(52) $2^{n+1} + 4$ عدد أولي. $n = 2$

(53) $n + 19$ عدد أولي. $n = 1$

إجابات

(41) $y^7 - 21y^6 + 189y^5 - 945y^4 + \dots$

$2835y^3 - 5103y^2 + 5103y - 2187$

(42) $-32z^5 + 240z^4 - 720z^3 + \dots$

$1080z^2 - 810z + 243$

(43) $256a^4 - 768a^3b + 864a^2b^2 - \dots$

$432ab^3 + 81b^4$

(44) $x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{256}x - \frac{1}{1024}$

(48) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة يساوي 2 وكذلك الطرف الأيمن من المعادلة يساوي 2 أيضًا. إذن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن

$$2 + 6 + 12 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

صحيحة حيث k عدد صحيح موجب.

الخطوة 3:

$$2 + 6 + 12 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[k(k+2) + 3(k+2)]}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

والعبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثبات صحتها

عندما $n = k + 1$ ؛ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$ ؛ أي أن

$$2 + 6 + 12 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1} \quad \text{لا يوجد مجموع.}$$

$$(2) 8 \sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$$

(3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية

$$54, 45, 36, 27, 81, 72, 63, \dots$$

(4) أوجد الحد الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها

$$129 \quad a_1 = 9, d = 5$$

(5) اختيار من متعدد ما الحد الثامن في المتتابعة الحسابية

$$D \quad 18, 20.2, 22.4, 24.6, \dots$$

$$31.2 \quad C \quad 26.8 \quad A$$

$$33.4 \quad D \quad 29 \quad B$$

(6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $11, -9, -1, 3, 7, -5$

(7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها

$$231 \quad a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$$

(8) اختيار من متعدد ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية

أدناه؟ C

$$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32}, \dots$$

$$\frac{5}{128} \quad C \quad \frac{13}{32} \quad A$$

$$\frac{5}{8} \quad D \quad \frac{5}{32} \quad B$$

(9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536, 24, 96, 384$

(10) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها

$$\frac{1055}{27} \quad a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$$

أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

$$220 \quad \sum_{k=2}^{12} (3k-1) \quad (11)$$

$$136 \quad 45 + 37 + 29 + \dots + -11 \quad (12)$$

(13) اكتب الكسر الدوري $0.\overline{65}$ على صورة كسر اعتيادي. $\frac{65}{99}$

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كل من المتابعتين الآتيتين:

$$(14) \quad a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5 \quad -1, 2, 11, 38, 119$$

$$(15) \quad a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n \quad 4, 5, 7, 10, 14$$

(16) أوجد مفكوك $(2a-3b)^4$

$$16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$$

(17) أوجد معامل الحد الخامس في مفكوك

$$1215 \quad (m+3n)^6$$

(18) أوجد الحد الرابع في مفكوك $(c+d)^9$. $84c^6d^3$

برهن صحة كل من الجملتين الآتيتين، للأعداد الطبيعية جميعها:

(19, 20) انظر ملحق الإجابات.

$$(19) \quad 1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$$

$$(20) \quad 11^n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 10$$

(21) أوجد مثالاً مضاداً يُبين خطأ الجملة الآتية،

حيث n أي عدد طبيعي:

$$2^n + 4^n \text{ يقبل القسمة على } 4 \quad n = 1$$

(22) مدرسة إذا كان عدد طلبة الصف الأول الثانوي يساوي عدد

طلبة الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم

اختيار 8 طلبة عشوائياً من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة

للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلبة الثمانية من الصف

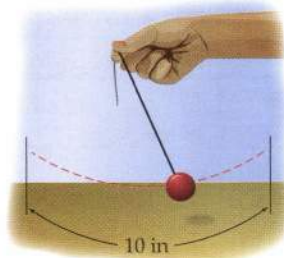
الأول الثانوي؟ **21.9% تقريباً**

(23) بندول يقوم سعد بأرجحة بندول، بحيث تتناقص المسافة التي

يقطعها البندول في كل أرجحة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة

قطعها البندول 10 in، فجد المسافة الكلية التي يكون البندول

قد قطعها عندما يتوقف عن الحركة. **حوالي 66.7 in**



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6		تدريبات إعادة التعليم،
	تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)		
	مشروع الفصل، ص (62)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com



البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حل المسألة استعمالاً. وتعَدُّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبرياً وتوسيع النمط أداة مهمة جداً في حل المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة توصل من خلالها من حدٍّ إلى الحد الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمِّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسباً.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط وحلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، و/أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة في حل المسألة:

□ □	□ □ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	انظر إلى متتابعة الأشكال المربعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاجها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟
شكل 1	شكل 2	شكل 3	74 C 55 A 82 D 65 B

1 التركيز

هدف استعمال استراتيجية البحث عن نمط؛ لحل مسائل الاختبار المعيارية.

2 التدريس

سئلة تعزيز

سأل:

ما الأسئلة التي تعتقد أن أفضل طريقة لحلها هي استعمال استراتيجية البحث عن نمط؟ إجابة ممكنة: أسئلة مثل "ما الحد التالي في المتتابعة؟" أو "ما التعبير الذي يُمذِّج هذا النمط؟" كيف نجد النمط؟ إجابة ممكنة: بالبحث عن العلاقة بين حدود النمط، وتحديد العمليات المشتركة التي تُعبّر عن النمط.

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

فتح سعيد حساباً مصرفياً في أحد البنوك، وأودع فيه مبلغ 2100 ريال، إذا أضاف إليه 0.3% من المبلغ الموجود في الحساب شهرياً. فكم سيصبح رصيده في نهاية السنة الأولى إلى أقرب ريال. **D**

- 2170 **A**
2177 **B**
2107 **C**
2994 **D**

3 التقويم

استعمل التمرينين 1, 2؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع. ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عدّ المربعات في كل شكل.



اكتب عبارة جبرية تُمثل نموذجاً لهذا النمط.

التعبير اللغوي
متغير
المعادلة

عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.
افترض أن n يُمثل رقم الشكل.
 $a_n = n^2 + 1$

استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعاً. الإجابة الصحيحة هي **D**.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطاً لحلّ المسألة.

(1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحد التالي في هذه المتتابعة؟ **B**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- 36 **A**
34 **B**
31 **C**
29 **D**

(2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟ **B**

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

- 18 **C**
21 **D**
17 **A**
20 **B**

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) أوجد الحد التالي في المتتابعة الحسابية: B

$$7, 13, 19, 25, 31, \dots$$

36 A

37 B

38 C

39 D

(2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$ C

119 A

826 B

945 C

1072 D

(3) صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية

الممثلة في الجدول المجاور هي: B

$$a_n = (5)^n \quad A$$

$$a_n = 5(2)^{n-1} \quad B$$

$$a_n = 2(5)^{n-1} \quad C$$

$$a_n = 5(2)^n \quad D$$

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

(6) إذا علمت أن $x - 5$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود

$$x^3 - 7x^2 + 7x + k \quad C$$

1 A

7 B

15 C

35 D

(4) تدعى شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرات متتالية، فما نسبة الشوائب التي سوف تزال؟ D

0.1% A

0.01% B

99.99% C

99.9% D

(5) أي المتسلسلات الهندسية الآتية غير متقاربة؟ B

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \quad A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \quad B$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad C$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad D$$

شخيص أخطاء الطلبة

صد إجابات الطلبة عن كل سؤال، فقد نبر هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة، أخطاء مفاهيمية مثل:

A لم يتم إضافة الأساس إلى العدد 31

في المتتابعة بصورة صحيحة

B إجابة صحيحة

C اعتبر أساس المتتابعة يساوي العدد 7

D لاحظ أن النمط هو: كل عدد ثالث

ينتهي بالرقم 9.

A تم إيجاد قيمة $8k - 1$ فقط للقيمة

$$k = 15$$

B تم إيجاد المجموع من $k = 1$ إلى 14

C إجابة صحيحة

D تم إيجاد المجموع من $k = 1$ إلى 16

A اعتبر $r = 5$

B إجابة صحيحة

C تبديل الثابت بالأساس.

D عوض في القانون n بدل $n - 1$

A تم إيجاد نسبة الشوائب الباقية بعد

المرور في المصفاة مرتين.

B تم إيجاد نسبة الشوائب الباقية بعد

المرور في المصفاة 3 مرات

C تم إيجاد نسبة الشوائب التي تمت

إزالتها بعد المرور في المصفاة 4

مرات.

D إجابة صحيحة

A القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة

أقل من 1

B إجابة صحيحة

C القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة

أقل من 1.

D القيمة المطلقة لأساس المتسلسلة

أقل من 1.

A معامل k

B معامل x

C إجابة صحيحة

D خمن

إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضِّحًا خطوات الحل :

(12) برهن صحّة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
 $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6. **انظر الهامش**

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 6
يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (108, 109)

اختبار تراكمي، ص (43)

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل السابع تعطي

الأسئلة الواردة في صفحة (11) واجبًا
منزليًا للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم
للمتطلبات السابقة للفصل 7.

109 الفصل 6 اختبار تراكمي

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟ 4×1

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(8) أوجد مفكوك $(c + d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدين.
 $c^6 + 6c^5d + 15c^4d^2 + 20c^3d^3 + 15c^2d^4 + 6cd^5 + d^6$

بسّط كلّ من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{15a^3b^2}{2c} - \frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c} \quad (9)$$

$$\frac{3}{2}x \cdot \frac{x^2 - x - 20}{2x + 8} \cdot \frac{3x}{x - 5} \quad (10)$$

(11) إذا كان $g(x) = x^2 + 5$ ، $f(x) = 2x + 4$ ، فما قيمة
 $86 \neq f[g(6)]$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5-5	6-6	4-1	5-1	5-1	6-5	2-3	3-7	6-4	6-3	6-3	6-2	6-2

إذا لم تستطع حل السؤال ...

فعد إلى الدرس ...

إجابة:

(12) الخطوة 1، عندما $n = 1$: $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$ ؛ إذن الجملة صحيحة
وبما أن 6 يقبل القسمة على 6؛ إذن الجملة صحيحة
عندما $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $7^k - 1$ يقبل القسمة على
6 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $7^k - 1 = 6r$
لعدد طبيعي r .

الخطوة 3: $7^k - 1 = 6r$

$$7^k = 6r + 1$$

$$7^{k+1} = 42r + 7$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 7 - 1$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$$

$$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1)$$

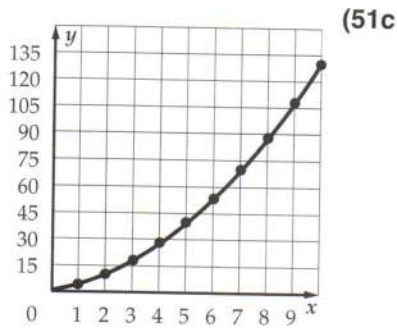
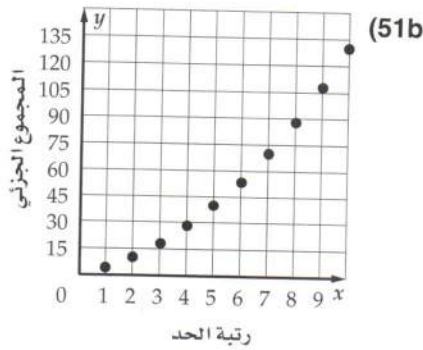
وبما أن r عدد طبيعي فإن $7r + 1$ عدد طبيعي. إذن
 $7^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة
عندما $n = k + 1$. لذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6
لكل عدد صحيح موجب n .

(38) إجابة ممكنة: عندما يصبح الأساس مثلي قيمته فإن قيمة a_2 الجديدة تصبح $2 \times a_2$ ، وقيمة a_3 تصبح $4a_3$ ، وقيمة a_4 تصبح $8a_4$ ، وقيمة a_5 تضرب في 2^4 أو 16، وهكذا تكون الحدود الجديدة هي $b_n = a_n \cdot 2^{n-1}$. وعندما تُضرب قيمة r في نصف قيمتها السابقة فإن:

$$b_n = a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

الدرس 6-2، ص 76، 77

n	S_n
1	4
2	10
3	18
4	28
5	40
6	54
7	70
8	88
9	108
10	130



(58) إجابة ممكنة:

افترض a_n هو الحد النوني في المتتابعة، التي أساسها d

تعريف الحد الثاني في المتتابعة الحسابية $a_2 = a_1 + d$

تعريف الحد الثالث في المتتابعة الحسابية $a_3 = a_2 + d$

بالتعويض $a_3 = (a_1 + d) + d$

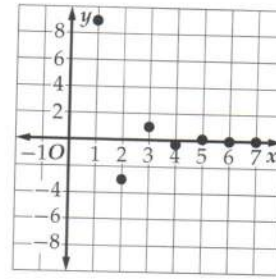
خاصية التجميع في الجمع $a_3 = a_1 + 2d$

$3 - 1 = 2$ $a_3 = a_1 + (3 - 1)d$

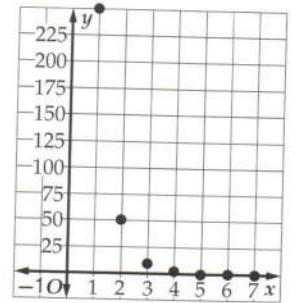
وهكذا

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

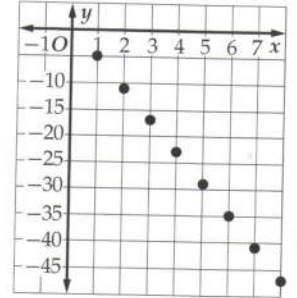
(9) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$



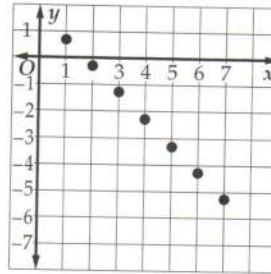
(8) $\frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}$



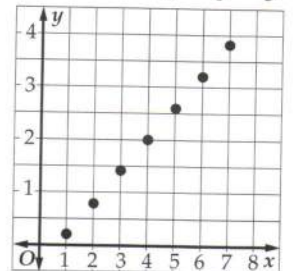
(15) $-29, -35, -41, -47$



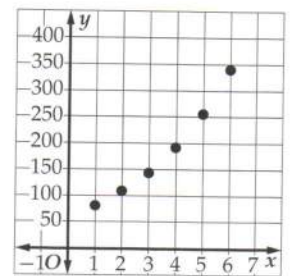
(17) $-\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$



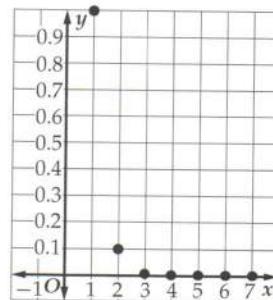
(16) $2, \frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \frac{19}{5}$



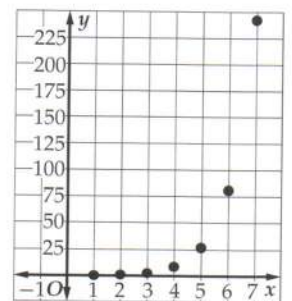
(23) $192, 256, \frac{1024}{3}$



(25) $0.0001, 0.00001, 0.000001$



(24) $27, 81, 243$



الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

$$7^k - 1 = 6r \quad \text{فرضية الاستقراء}$$

$$7^k = 6r + 1 \quad \text{يُضاف 1 إلى الطرفين}$$

$$7^{k+1} = 7(6r + 1) \quad \text{بضرب كلا الطرفين في 7}$$

$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6 \quad \text{بالتبسيط وطرح 1 من كلا الطرفين}$$

$$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1) \quad \text{بالتحليل}$$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $7r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. ولذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n .

الدرس 6-6، ص 100، 99

(2) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، والطرف

$$\text{الأيمن هو } 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{، إذن المعادلة صحيحة عند } n = 1.$$

$$\text{الخطوة 2: افترض أن } 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ صحيحة حيث } k \text{ عدد طبيعي.}$$

الخطوة 3: $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{بجمع } k+1 \text{ إلى كلا الطرفين}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \quad \text{بالجمع}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{بالتحليل}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوبة إثبات صحتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

وعليه فإن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة للأعداد الطبيعية n جميعها.

(3c) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، الطرف الأيسر من المعادلة

$$\text{هو } 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

الطرف الأيمن من المعادلة هو $1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}$ إذن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن:

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

صحيحة حيث k عدد طبيعي.

$$\text{الخطوة 3: } 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{3(k+1)(k+2)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوبة إثبات صحتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما

$n = k + 1$ ، وعليه، فإن المعادلة صحيحة؛ أي أن

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

للأعداد الطبيعية n جميعها.

الصيغة العامة للمجموع

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \quad (59)$$

صيغة الحد النوني

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

بطرح $(n-1)d$ من الطرفين

$$a_n - (n-1)d = a_1$$

بالتعويض

$$S_n = [a_n - (n-1)d + a_n] \left(\frac{n}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$S_n = [2a_n - (n-1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$

الدرس 6-3، ص 83

(38) إجابة ممكنة: يجب تغيير $k - 1$ إلى k والعدد 10 إلى العدد 9. وعندها تصبح حدود المتسلسلتين متطابقة (a_1 في المتسلسلة الأولى يتطابق مع a_0 في المتسلسلة الثانية، وهكذا)، وتصبح المتسلسلتان متطابقتين.

(39) إجابة ممكنة:

افترض a_n هو الحد النوني في المتتابعة، التي أساسها r .

$$\text{تعريف الحد الثاني في المتتابعة الهندسية} \quad a_2 = a_1 \cdot r$$

$$\text{تعريف الحد الثالث في المتتابعة الهندسية} \quad a_3 = a_2 \cdot r$$

$$\text{بالتعويض} \quad a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$$

$$\text{خاصية التجميع في الضرب} \quad a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$3 - 1 = 2 \quad a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$$

بصورة عامة

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

الدرس 6-6، ص 98، 97 (تحقق من فهمك)

(1) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^2 = 1$

والطرف الأيمن هو $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$

$$\text{بجمع } (k+1)^2 \text{ الطرفين} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\text{بالجمع} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$\text{بإخراج العامل المشترك} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$\text{بالتبسيط} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$\text{بالتحليل} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$.

وبهذا فإن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ صحيحة للأعداد الطبيعية n جميعها.

(2) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن $7^1 - 1 = 6$ وهو عدد يقبل القسمة على 6.

إذن الجملة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض $7^k - 1$ يقبل القسمة على 6 حيث k عدد طبيعي.

وهذا يعني أنه يوجد عدد كلي r بحيث $7^k - 1 = 6r$

(4) الخطوة 1: $10^1 - 1 = 9$ ، وهو عدد يقبل القسمة على 9. فالجملة

صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $10^k - 1$ يقبل القسمة على 9 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $10^k - 1 = 9r$ ، حيث r يمثل عدداً كلياً.

الخطوة 3: $10^k - 1 = 9r$ فرضية الاستقراء

بإضافة 1 إلى كلا الطرفين $10^k = 9r + 1$

بضرب كلا الطرفين بـ 10 $10^{k+1} = 90r + 10$

بطرح 1 $10^{k+1} - 1 = 90r + 9$

بالتحليل $10^{k+1} - 1 = 9(10r + 1)$

بما أن r عدد كلي، فإن $10r + 1$ عدد كلي. إذاً $10^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 9، أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. لذا، فإن $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 لكل عدد طبيعي n .

(5) الخطوة 1: $4^1 - 1 = 3$ وهذا العدد يقبل القسمة على 3. فالجملة

صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $4^k - 1$ يقبل القسمة على 3 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أن $4^k - 1 = 3r$ ، حيث r عدد كلي.

الخطوة 3: $4^k - 1 = 3r$ فرضية الاستقراء

بإضافة 1 $4^k = 3r + 1$

بالضرب في 4 $4^{k+1} = 12r + 4$

بطرح 3 $4^{k+1} - 1 = 12r + 3$

بالتحليل $4^{k+1} - 1 = 3(4r + 1)$

بما أن r عدد كلي، فإن $4r + 1$ أيضاً عدد كلي. إذن $4^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 3 أي أن الجملة صحيحة عند $n = k + 1$. لذا، فإن $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

(8) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $\frac{1}{2}$

والطرف الأيمن من المعادلة هو $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ ، لذا، فإن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$

بجمع $\frac{1}{2^{k+1}}$ $= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$

$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$

$= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثبات صحتها، عند $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$. لذا فإن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

(9) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 2.

والطرف الأيمن من المعادلة هو $\frac{1[3(1) + 1]}{2} = 2$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $[2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1]]$

$$= \frac{k(3k + 1)}{2} + [3(k + 1) - 1]$$

$$= \frac{k(3k + 1) + 2[3(k + 1) - 1]}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 6 - 2}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

لذا فإن $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$ صحيحة لكل عدد طبيعي n .

(10) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1.

والطرف الأيمن هو $2^1 - 1 = 1$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2^k - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1}$ صحيحة حيث k عدد طبيعي:

الخطوة 3: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^{k-1+1}$

$$= 2^k - 1 + 2^{k-1+1} \text{ بجمع } 2^{k-1} \text{ للطرفين}$$

$$= 2^k + 2^k - 1 \text{ بالتبسيط وإبدالية الجمع}$$

$$= 2(2^k) - 1$$

$$= 2^{k+1} - 1$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$. لذا، فإن:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

(11) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو

$4(1) - 1 = 3$ ، والطرف الأيمن $2(1)^2 + 1 = 3$ ، لذا، فإن المعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2k^2 + k = 3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $3 + 7 + 11 + \dots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1]$

$$= 2k^2 + k + [4(k + 1) - 1]$$

$$= 2k^2 + k + 4k + 3$$

$$= 2k^2 + 5k + 3$$

$$= 2k^2 + 4k + 2 + k + 1$$

$$= [2(k + 1)^2] + (k + 1)$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، عند $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عند $n = k + 1$. وبهذا فإن

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$$

طبيعي n .

(12) الخطوة 1: عندما $n = 3$ ، $180(3 - 2) = 180$. وبما أن هذا يتفق مع نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث، إذن فالجملة صحيحة عندما $n = 3$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند $n = k$ حيث $k \geq 3$ ، أي أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه k هو $180(k - 2)$

الخطوة 3: افترض أن المضلع المحدب له $k + 1$ رأساً. بما أن $k + 1 \geq 4$ ، وإذا أخذنا أحد الرؤوس x ، فيمكن إيجاد الرأس y بحيث يقع بين الرأسين رأس ثالث في أحد الاتجاهات و $(k - 2)$ رأس في الاتجاه الآخر، صل الرأسين x, y بقطر يقسم المضلع الجديد إلى مضلعين. مجموع زوايا المضلع الجديد يساوي مجموع زوايا المثلث الذي يُشكِّله الرأسان x, y والرأس الثالث بينهما والمضلع ذو الرؤوس $(k - 2)$ إضافة إلى الرأسين x, y . وتعلم أن مجموع زوايا المثلث 180° ، ومجموع زوايا المضلع الأصلي المحدب بالرؤوس $k - 2$ إضافة إلى الرأسين x, y يساوي $180(k - 2)$ وبالجمع ينتج أن مجموع زوايا المضلع الجديد ذي الرؤوس $k + 1$ يساوي $180(k - 2) + 180 = 180(k - 2 + 1)$ وهذا يبرهن صحة هذه القاعدة.

(13) الخطوة 1: $9^1 - 1 = 8$ وهو يقبل القسمة على 8؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $9^k - 1$ يقبل القسمة على 8 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد كلي r يحقق العلاقة $9^k - 1 = 8r$

الخطوة 3: $9^k - 1 = 8r$ فرضية الاستقراء

بجمع 1 للطرفين $9^k = 8r + 1$

بضرب الطرفين بـ 9 $9^{k+1} = 72r + 9$

ب طرح 1 من الطرفين $9^{k+1} - 1 = 72r + 8$

بالتحليل $9^{k+1} - 1 = 8(9r + 1)$

بما أن r عدد كلي فإن $9r + 1$ عدد كلي، وهذا يعني أن

$9^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 8؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8 لكل عدد طبيعي n .

(14) الخطوة 1: $12^1 + 10 = 22$ وهو يقبل القسمة على 11. إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $12^k + 10$ يقبل القسمة على 11 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r يحقق

المساواة $12^k + 10 = 11r$

الخطوة 3: $12^k + 10 = 11r$ فرضية الاستقراء

ب طرح 10 من الطرفين $12^k = 11r - 10$

بضرب كلا الطرفين بـ 12 $12^{k+1} = 132r - 120$

12

بجمع 10 للطرفين $12^{k+1} + 10 = 132r - 110$

بالتحليل $12^{k+1} + 10 = 11(12r - 10)$

بما أن r عدد طبيعي فإن $12r - 10$ عدد طبيعي أيضاً لذا فإن

$12^{k+1} + 10$ يقبل القسمة على 11 أي أن الجملة صحيحة عندما

$n = k + 1$. إذن $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11 لكل عدد طبيعي n .

(18) الخطوة 1: $7^1 + 5 = 12$ وهو يقبل القسمة على 6. إذن العبارة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $7^k + 5$ يقبل القسمة على 6 حيث k عدد طبيعي. هذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r يحقق المساواة $7^k + 5 = 6r$

الخطوة 3: $7^k + 5 = 6r$

$7^k = 6r - 5$

$7^{k+1} = 7(6r - 5)$

$7^{k+1} = 42r - 35$

$7^{k+1} + 5 = 42r - 30$

$7^{k+1} + 5 = 6(7r - 5)$

بما أن r عدد طبيعي فإن $7r - 5$ عدد طبيعي؛ أي أن $7^{k+1} + 5$ يقبل القسمة على 6؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n .

(19) الخطوة 1: $17^1 - 1 = 16$ وهو يقبل القسمة على 17. إذاً الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $17^k - 1$ يقبل القسمة على 17 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $17^k - 1 = 17r$ لعدد طبيعي r .

الخطوة 3: $17^k - 1 = 17r$

$17^k = 17r + 1$

$17^{k+1} = 18(17r + 1)$

$17^{k+1} = 306r + 18$

$17^{k+1} - 1 = 306r + 17$

$17^{k+1} - 1 = 17(18r + 1)$

بما أن r عدد طبيعي فإن $18r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $17^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 17؛ أي أن الجملة صحيحة عند $n = k + 1$. إذن $17^n - 1$ يقبل القسمة على 17 لكل عدد طبيعي n .

(22) الخطوة 1: عندما $n = 1$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو

$4 \cdot 5^{4-1} = 500$ والطرف الأيمن هو $625 \left(1 - \frac{1}{5^1}\right)$

إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2:

افترض أن $4 \cdot 5^{4-k} + 4 \cdot 5^{4-(k+1)} + \dots + 100 + 500 = 625 \left(1 - \frac{1}{5^k}\right)$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: $4 \cdot 5^{4-k} + 4 \cdot 5^{4-(k+1)} + \dots + 100 + 500$

$= 625 \left(1 - \frac{1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{4-(k+1)}$

$= 625 \left(\frac{5^k - 1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{3-k}$

$= 625 \left(\frac{5^{k+1} - 5}{5^{k+1}}\right) + 4 \cdot \frac{5^4}{5^{k+1}}$

$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5)}{5^{k+1}} + 4 \cdot \frac{5^4}{5^{k+1}}$

$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5 + 4)}{5^{k+1}}$

$= 625 \left(\frac{5^{k+1} - 1}{5^{k+1}}\right)$

$= 625 \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right)$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن:

$4 \cdot 5^{4-n} + 4 \cdot 5^{4-(n+1)} + \dots + 100 + 500 = 625 \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

لكل عدد طبيعي n .

(27) إجابة ممكنة: $6 + 10 + 14 + \dots + (4n + 2) = 2n(n + 2)$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 6 والطرف الأيمن هو $2(1)(1 + 2) = 6$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $6 + 10 + 14 + \dots + 4k + 2 = 2k(k + 2)$ حيث k عدد طبيعي.

$$\begin{aligned} \text{الخطوة 3: } & 6 + 10 + 14 + \dots + 4k + 2 + 4(k + 1) + 2 \\ &= 2k(k + 2) + 4(k + 1) + 2 \\ &= 2k^2 + 4k + 4k + 4 + 2 \\ &= 2k^2 + 8k + 6 \\ &= 2(k + 1)(k + 3) \\ &= 2(k + 1)[(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيسر من المعادلة المطلوب إثباتها، عندما $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $6 + 10 + 14 + \dots + (4n + 2) = 2n(n + 2)$ لكل عدد طبيعي n .

دليل الدراسة والمراجعة ص 104

(49) **الخطوة 1:** عندما $n = 1$: $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ وبما أن 4 يقبل

القسمة على 4، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $5^k - 1$ يقبل القسمة على 4 حيث k عدد طبيعي. وهذا يعني أن $5^k - 1 = 4r$ لعدد طبيعي r .

الخطوة 3:

$$5^k - 1 = 4r$$

$$5^k = 4r + 1$$

$$5^{k+1} = 20r + 5$$

$$5^{k+1} - 1 = 20r + 5 - 1$$

$$5^{k+1} - 1 = 20r + 4$$

$$5^{k+1} - 1 = 4(5r + 1)$$

وبما أن r عدد طبيعي فإن $5r + 1$ عدد طبيعي لذا فإن $5^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 4؛ أي أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n .

(23) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $2(1) = 2$ والطرف الأيمن هو $1(1 + 1) = 2$ إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1)$ حيث k عدد طبيعي.

$$\begin{aligned} \text{الخطوة 3: } & 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)[(k + 1) + 1] \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ لكل عدد طبيعي n .

(26) **الخطوة 1:** عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة هو $1^3 = 1$.

الطرف الأيمن هو $1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ، إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 8 + 27 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3:

$$\begin{aligned} 1 + 8 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{2^2} \\ &= \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها، حيث $n = k + 1$. لذا فإن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

إذن $1 + 8 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ لكل عدد طبيعي n .

(19) الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو 1، وكذلك الطرف الأيمن هو $1 = \frac{1}{5} \times 5 = \frac{1}{5} (6^1 - 1)$. إذن المعادلة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} = \frac{1}{5} (6^k - 1)$ حيث k عدد طبيعي.

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 6 + 36 + \dots + 6^{k-1} + 6^{k+1-1} &= \frac{1}{5} (6^k - 1) + 6^{k+1-1} \\ &= \frac{1}{5} (6^k - 1) + 6^k \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} + 6^k \\ &= \frac{6}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 6^{k+1} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot (6^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من الجملة المطلوب إثباتها. حيث $n = k + 1$. لذا فإن $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1} = \frac{1}{5} (6^n - 1)$ لكل عدد طبيعي n .

(20) الخطوة 1: $11^1 - 1 = 10$

10 يقبل القسمة على 10. فالجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $11^k - 1$ يقبل القسمة على 10 حيث k عدد صحيح موجب. وهذا يعني أن $11^k - 1 = 10r$ لعدد كلي r .

الخطوة 3: $11^k - 1 = 10r$

$$11^k = 10r + 1$$

$$11(11^k) = (10r + 1) 11$$

$$11^{k+1} = 110r + 11$$

$$11^{k+1} - 1 = 110r + 11 - 1$$

$$11^{k+1} - 1 = 110r + 10$$

$$11^{k+1} - 1 = 10(11r + 1)$$

بما أن r عدد كلي، فإن $11r + 1$ هو عدد كلي أيضًا، لذا، فإن $11^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 10، وهذا يعني أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذن $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 لكل عدد صحيح موجب n .

التقويم التشخيصي

التهيئة ص (107)

العنوان	الدرس 7-1 (3) حصص	الدرس 7-2 (4) حصص	الدرس 7-3 (4) حصص
تمثيل فضاء العينة	الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق	الاحتمال الهندسي	الاحتمال الهندسي
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> استعمال القوائم، والجداول، والرسوم الشجرية لتمثيل فضاء العينة. استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال التباديل في حساب الاحتمال. استعمال التوافيق في حساب الاحتمال. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد الاحتمالات باستعمال الطول. إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحة.
المضردات	<ul style="list-style-type: none"> فضاء العينة الرسم الشجري تجربة ذات مرحلتين تجربة متعددة المراحل مبدأ العدّ الأساسي 	<ul style="list-style-type: none"> التباديل المضروب التباديل الدائرية التوافيق 	الاحتمال الهندسي
التمثيلات المتعددة	ص (116)		
مصادر الدرس	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (16) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (17) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (18) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	آلة التصوير الرقمية، ص (114)		آلة التصوير الرقمية، ص (127)
تنوع التعليم	ص (113, 117)	ص (121, 124)	ص (126, 129)

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل ص (131)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة و التقويم	التدريس
22 حصة	4	18

حصص (3)

الدرس 5-7

احتمالات الحوادث المتنافية

- إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية.
- إيجاد احتمال متممة حادثة.

الحوادث المتنافية
الحادثة المتممة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

- تدريبات إعادة التعليم،
ص (26) **دون**
- تدريبات المهارات،
ص (28) **دون** **ضمن** **فوق**
- تدريبات حل المسألة،
ص (29) **دون** **ضمن** **فوق**
- التدريبات الإثرائية،
ص (30) **ضمن** **فوق**

كتاب التمارين

- ص (20) **دون** **ضمن** **فوق**

الاسبورة التفاعلية، ص (140)

ص (143, 145)

حصص (4)

الدرس 4-7

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

- إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة.
- إيجاد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.

الحادثة المركبة
الحوادث المستقلة
الحوادث غير المستقلة
الاحتمال المشروط
شجرة الاحتمال

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

- تدريبات إعادة التعليم،
ص (21) **دون**
- تدريبات المهارات،
ص (23) **دون** **ضمن** **فوق**
- تدريبات حل المسألة،
ص (24) **دون** **ضمن** **فوق**
- التدريبات الإثرائية،
ص (25) **ضمن** **فوق**

كتاب التمارين

- ص (19) **دون** **ضمن** **فوق**

الاسبورة التفاعلية، ص (134)

ص (133, 135, 137)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (146-148)
- اختبار الفصل ص (149)
- اختبار تراكمي ص (152, 153)

المعالجة

التشخيص

التقويم

التشخيصي

بداية الفصل 7

التهيئة للفصل 7، ص (111)

مخطط المعالجة، ص (111)

بداية كل درس

فيما سبق، والآن، لماذا؟

مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب

خلال كل درس وبعده

التقويم

التكويني

تحقق من فهمك، لكل مثال

تأكد

تدريبات المهارات، الفصل 7

تنوع التعليم

تنوع الواجبات المنزلية

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7

www.obeikaneducation.com

مسائل مهارات التفكير العليا

مراجعة تراكمية

أمثلة إضافية

تنبيه!

الخطوة 4، التقويم

الاختبارات القصيرة، ص (49, 50)

www.obeikaneducation.com

منتصف الفصل

اختبار منتصف الفصل، ص (131)

اختبار منتصف الفصل، ص (51)

تدريبات المهارات، الفصل 7

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7

www.obeikaneducation.com

www.obeikaneducation.com

نهاية الفصل

دليل الدراسة والمراجعة، ص (146-148)

اختبار الفصل، ص (149)

اختبار تراكمي، ص (152, 153)

تدريبات المهارات، الفصل 7

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7

www.obeikaneducation.com

www.obeikaneducation.com

بعد انتهاء الفصل 7

التقويم

الختامي

اختبار الفصل، النماذج 1A, 2A, 2B، ص (53-58)

اختبار الفصل، النموذج 3، ص (59 - 60)

اختبار المفردات، ص (52)

اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة، ص (61)

اختبار تراكمي، ص (62-64)

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7

www.obeikaneducation.com

www.obeikaneducation.com

البديل 1

جميع المستويات **دون** **ضمن** **دون**

المتعلمون المنطقيون اكتب السؤالين الآتيين على السبورة، ثم اطلب إلى بعض الطلبة الإجابة عنهما:

(1) عندما تشتري الأيسكريم، أي حجم تفضل: الصغير، أم الوسط، أم الكبير؟
 (2) بأي طعم تفضله: الفانيليا، أو الشوكولاتة و/أو الفراولة؟

ثم اطلب إلى الطلبة جميعاً أن يكونوا الرسم الشجري؛ لتوضيح جميع بدائل الأيسكريم الممكنة.

المتعلمون الاجتماعيون ارسم لوحة لعبة السهام على السبورة. واطلب إلى الطلبة أن يقيسوا قطر الدائرة الداخلية في اللوحة، ومقدار الزيادة في نصف قطر كل دائرة عن الأخرى، ثم استعمال هذه المعلومات لتحديد احتمال إصابة الدائرة الداخلية إذا نفذوا هذه اللعبة.

البديل 2

دون المتوسط **دون**

اكتب السؤال الآتي على السبورة: وضع في حقيبة أربعة مكعبات زرقاء، ومكعبان أحمران، ومكعب أصفر، وآخر أخضر. افترض أن مكعباً سُحب من الحقيبة ثم أُعيد، وسحب مكعب آخر ثم أُعيد، واستمر سحب المكعبات وإعادتها، فما احتمال سحب مكعب أحمر كل مرة إذا استمر السحب لعشر مرات؟ اطلب إلى الطلبة أن يحلوا هذه المسألة ويبينوا كيف توصلوا إلى الإجابة.

البديل 3

فوق المتوسط **فوق**

اطلب إلى الطلبة أن يعملوا في مجموعات ثنائية لتصميم محاكاة وتنفيذها باستعمال المكعب المرقم، أو النقود أو القرص ذي المؤشر الدوار، ثم يقرروا السؤال الذي يريدون الإجابة عنه، والخطوات التي سيتبعونها، ويسجلوا بياناتهم ويعرضوها على طلاب الفصل.

ملخص الدروس

7-1 تمثيل فضاء العينة

فضاء العينة لتجربة هو مجموعة جميع النواتج الممكنة. ويمكن تمثيل فضاء العينة باستعمال قائمة منظمة أو جدول رسم شجري. وعند كتابته تسجل نواتج المراحل أو الأحداث المتكررة. وعندما يكون هناك أكثر من مرحلة تسمى التجربة متعددة المراحل. وينص مبدأ العد الأساسي على أنه: "يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة".

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

يرمز إلى مضروب العدد الصحيح الموجب n ، بالرمز $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n . ويستعمل المضروب لعدّ ترتيب العناصر. أما التباديل فهو تنظيم لمجموعة من العناصر يُعدّ الترتيب فيها مهمًا. ويُعبّر عن عدد تباديل n من العناصر المتميزة مأخوذة r في كل مرة بالصيغة:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

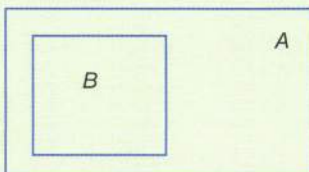
عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات، والآخر r_2 من المرات... وهكذا، هو $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$ وعدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n مرتبة في دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

التوافيق هي تنظيم لمجموعة من العناصر الترتيب فيها ليس مهمًا. وتُحسب توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة أو ${}_n C_r$ ، بقسمة عدد التباديل ${}_n P_r$ على عدد الترتيب التي تحتوي العناصر نفسها $r!$. ويُعبّر عن عدد التوافيق بالصيغة ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$

7-3 الاحتمال الهندسي

يسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسات هندسية مثل الطول أو المساحة احتمالًا هندسيًا. ويمكنك إيجاد احتمال وقوع نقطة في جزء من شكل بمقارنة طول الجزء بالطول الكلي للشكل أو مساحة الجزء بالمساحة الكلية للشكل. إذا اختيرت نقطة E في المنطقة A عشوائيًا، فإن احتمال وقوع النقطة E في المنطقة B ، التي تقع داخل المنطقة A هو:

$$\text{احتمال وقوع النقطة } E \text{ في المنطقة } B = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



التربط الرأسي

ما قبل الفصل 7

- استعمال الاحتمال النظري والمعاينة في التنبؤ بالحوادث.
- تمثيل العلاقات بالجدول وبيانيًا.

الفصل 7

- فهم فضاء العينة.
- حساب احتمالات الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة، والحوادث المتنافية والحوادث المشروطة.
- حساب الاحتمالات الهندسية.

ما بعد الفصل 7

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- استعمال التوزيعات الاحتمالية.
- المقارنة بين مجموعات من البيانات باستعمال مقياس النزعة المركزية والتشتت.

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية

بُحث في الدرس 7-5 موضوع وقوع حادثين في وقت واحد. وسيتم في هذا الدرس دراسة وقوع إحدى الحادثتين أو كليهما. ولإيجاد احتمال وقوع حادثة أو حادثة أخرى يجب أن نعلم العلاقة بينهما. فإذا استحال وقوع الحادثتين في آن معاً، فإنهما متنافيتان؛ أي أنه لا يوجد نواتج مشتركة بينهما. وإذا كان A و B متنافيتين، فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$$

أما إذا كانت الحادثتان A و B غير متنافيتين فإن مجموع احتمالي كل منهما أكبر من $P(A \text{ أو } B)$ ، وذلك لإضافة احتمال وقوع الحادثتين معاً مرتين. وعليه، فإنه إذا كان A و B حادثتين غير متنافيتين فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمالي كل منهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

عند تحديد الاحتمال الهندسي افترض أن النقطة تقع ضمن منطقة الهدف، وأن فرص وقوعها في أي منطقة متساوية.

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

تتكون الحادثة المركبة من حادثين بسيطتين. وتكون الحادثتين A و B مستقلتين إذا كان احتمال وقوع A لا يؤثر في احتمال وقوع B . واحتمال وقوع حادثين مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمالي كل حادثة على حدة.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$$

تكون الحادثتان A و B غير مستقلتين إذا كان احتمال وقوع A بطريقة ما يؤثر في احتمال وقوع B . واحتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية شرط وقوع الحادثة الأولى.

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

يقدم القانون السابق فكرة الاحتمال المشروط. ويمكن استعمال الاحتمال المشروط إذا عُلمت معلومات إضافية عن حادثة معينة. والاحتمال المشروط لوقوع B شرط وقوع A يساوي:

$$P(B|A) = \frac{P(B \text{ و } A)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

**هَيْمَا سَيْتِي:**

درست النواتج والحوادث،
واحتمالات الحوادث البسيطة في
التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثل فضاء العينة.
- أستعمل التبادل والتوافق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

ألعاب: يمكن استعمال
الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع
النواتج المختلفة لبعض الألعاب
التي نمارسها.

مشروع الفصل**ألعاب وتسلية**

يستعمل الطلبة ما تعلموه حول الرسم لشجري والاحتمال؛ لإيجاد فضاء العينة للنواتج التي يحصلون عليها خلال لعبهم في ألعاب التسلية في المهرجانات.

- ابحث عن جميع الألعاب المختلفة الشائعة في المهرجانات. وكيف تؤدي هذه الألعاب؟ وهل تعتقد أنها جميعاً عادلة؟ وما هي فرص الفوز بالجائزة في كل من هذه الألعاب حسب اعتقادك؟ وأي الألعاب تعتقد أن الفوز فيها صعب جداً؟ وأيها الفوز فيها أسهل؟
- صمّم لعبتك الخاصة التي تحتوي على جوائز متنوعة للربح. كوّن الرسم الشجري الذي يبين النواتج الممكنة عند القيام بهذه اللعبة. وما احتمال أن تربح في لعبتك؟ وما احتمال أن تربح مرتين متتاليتين؟ وثلاث مرات؟ وهل لعبتك عادلة؟ وما احتمال ربح الجائزة الكبرى؟

• اعرض لعبتك على طلاب الصف، وكوّن نموذجاً لها ليؤديها الآخرون، إن كان ذلك ممكناً.

المفردات قَدِّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوط الآتية:

التعريف: تتكون الحادثة المتممة A' من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحادثة A .

مثال: إذا تكونت الحادثة A من العددين 1, 5 عند رمي حجر نرد فإن متممة A تتكون من 2, 3, 4, 6

سؤال: ما احتمال وقوع A أو متممتها؟ 1

منظم أفكار**المطويات**

الاحتمالات اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول الاحتمالات مستعملاً ورقة A3.

4 اكتب العناوين كما في الشكل.



3 قص كل خطي أفقياً في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



2 اطو الورقة نصفين مرتين.



1 اطو الورقة طويلاً.



وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

■ نموذج بناء المفردات، ص (47).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

منظم أفكار**المطويات**

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم أثناء دراستهم الاحتمالات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

اختبار سريع

بسّط كلاً مما يأتي: للأسئلة 1-6 انظر الهامش

(1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ (2) $\frac{7}{9} + \frac{2}{6}$ (3) $\frac{2}{5} + \frac{7}{8}$
 (4) $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8}$ (5) $\frac{3}{7} \cdot \frac{21}{24}$ (6) $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$

(7) كرة قدم: لدى فريق كرة قدم 54 L من الماء البارد في قوارير سعة كل منها 500 ml. كم قارورة لديهم؟ 108

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2}$

بضرب البسط في البسط
 والمقام في المقام

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{9 \cdot 2}$$

$$= \frac{6}{18}$$
 بالتبسيط

$$= \frac{1}{3}$$

مثال 2

إذا ألقى مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

عدد نواتج الحادثة
 عدد جميع النواتج الممكنة

$$P(5) = \frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$ ، ويساوي 67% تقريباً

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5.

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		4
2		7
3		8
4		4
5		2
6		5

عدد مرات ظهور 5
 عدد جميع النواتج

$$P(5) = \frac{\text{عدد مرات ظهور 5}}{\text{عدد جميع النواتج}} = \frac{2}{30}$$
 الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريباً

إذا ألقى مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كل مما يأتي: للأسئلة 8-11 انظر الهامش

- (8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1
 (9) أن يكون العدد الظاهر فردياً
 (10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2
 (11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6)

(12) احتمالات: ألقى مجسم ذو 20 وجهًا متطابقًا، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 26 ما عدا الأعداد 4, 8, 12, 16, 20, 24. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًا؟ $\frac{9}{20}$ أو 45%

يبين الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4.

النتيجة	الإشارات	التكرار
1		3
2		7
3		6
4		4

- (13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟
 (14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟
 (15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،
فقم	بمراجعة العمليات على الكسور، وحساب الاحتمالات النظرية والتجريبية لبعض الحوادث.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

- (1) $\frac{7}{8}$
 (2) $1\frac{1}{9}$
 (3) $1\frac{11}{40}$
 (4) $\frac{1}{9}$
 (5) $\frac{3}{8}$
 (6) $\frac{1}{15}$
 (8) $\frac{5}{6}$ ويساوي 83% تقريباً
 (9) $\frac{1}{2}$ أو 50%
 (10) $\frac{1}{6}$ ويساوي 17% تقريباً
 (11) $\frac{1}{3}$ أو 33%

تمثيل فضاء العينة Representing Sample Spaces



لماذا؟
في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أي الفريقين سيختار المكان في الملعب أولاً. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العينة

لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

مثال	التعريف
في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.	التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقاً جميع نواتجه الممكنة.
النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.	النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.
إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.	الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.

فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو الرسم الشجري.

مثال 1 تمثيل فضاء العينة

ألقيت قطعة نقد مرتين، مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري. هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

الجدول

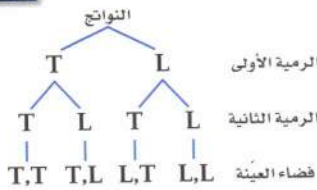
دَوِّنِ النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

القائمة المنظمة

اكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L, L
L, T
T, L
T, T

الرسم الشجري



تحقق من فهمك

1 ألقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري. **انظر ملحق الإجابات**

فيما سبق؟

درست حساب الاحتمال التجريبي.

والآن؟

- أستعمل القوائم، والجدول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة.
- أستعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العينة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

إيجاد النواتج والحوادث لتجربة ما.

الدرس 7-1

استعمال القوائم، والجدول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة.

استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال التباديل والتوافيق مع الاحتمال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا"؟

واسأل:

- ما الذي يجعل تجربة إلقاء قطعة النقد عادلة؟
- فرصة ظهور أي من وجهي قطعة النقد متساوية.
- ما الطرق الأخرى العادلة التي تحدد من يبدأ اللعب أولاً؟ رمي مكعب مرقم.

إرشادات للدراسة

المكعب المرقم
هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6



مصادر الدرس 7-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (113)	• تنوع التعليم، ص (113, 117)	• تنوع التعليم، ص (113, 117)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على تجربة ذات مرحلتين؛ لأنها تمت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى تجارب متعددة المراحل.

مثال 2 من واقع الحياة الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

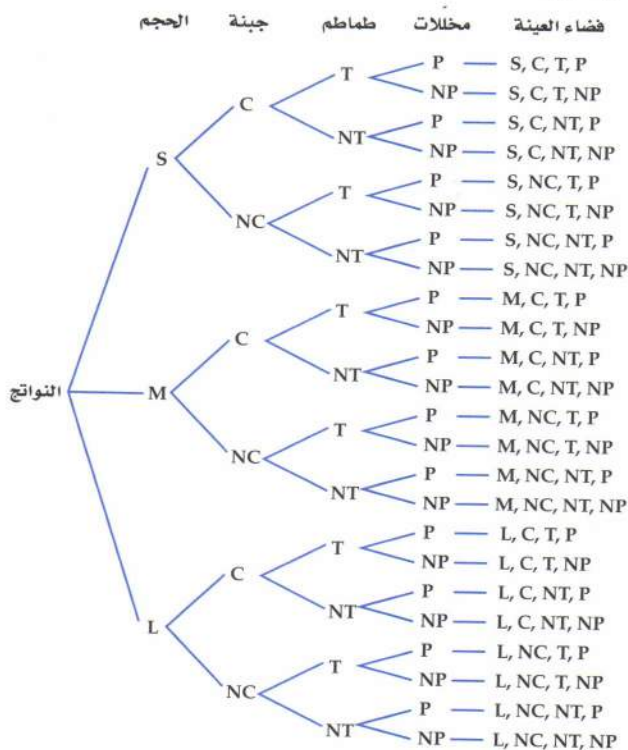


شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر اللحم بثلاثة أحجام (صغير - وسط - كبير)، بالجبن والطماطم والمخللات، أو بثنين منها، أو بأحدها، أو بدونها.

مثل فضاء العينة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
 - اختيار الجبن (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
 - اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
 - اختيار المخللات (مع مخللات P، بدون مخللات NP).
- أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تحقق من فهمك

2 هواتف: يرغب مصطفي في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/أو غطاء للجهاز (W). مثل فضاء العينة لهذا الموقف بالرسم الشجري. انظر ملحق الإجابات

الدرس 1-7 تمثيل فضاء العينة 113

تمثيل فضاء العينة

المثالان 1, 2 يبينان كيفية إيجاد مجموعة النواتج الممكنة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو رسم شجري.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

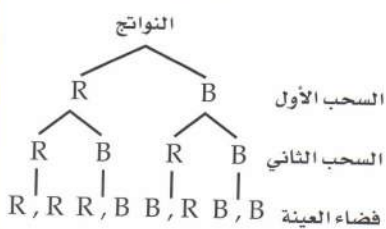
مثالان إضافيان

1 وضعت قطعة معدنية حمراء (R) وأخرى سوداء (B) في حقيبة. وسحبت قطعة واحدة وسجل لونها، ثم أعيدت إلى الحقيبة وسحبت قطعة مرة أخرى. مثل فضاء العينة لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة، وجدول، ورسم شجري. القائمة المنظمة هي BB, BR, RB, RR.

الجدول

النواتج	أحمر (R)	أسود (B)
أحمر (R)	RR	RB
أسود (B)	BR	BB

الرسم الشجري



2 طعام: يقدم أحد المطاعم الكيسه

بلحم الضأن أو لحم العجل أو الدجاج، ويضاف إليها حسب رغبة الزبون الصنوبر والزبيب والبيض أو اثنين منها، أو أحدها، أو بدونها. مثل بالرسم الشجري النواتج الممكنة لاختيار وجبة الكيسه. انظر إجابات الطلبة

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون وزع الطلبة في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزود كل مجموعة بأربع أو ست أدوات مختلفة. وحفز المجموعات لتكوين أكبر عدد ممكن من الطرق المختلفة التي يمكن تجميع الأدوات فيها. واطلب إليهم أن يرسموا هذه التجمعات ويسجلوا عددها وذلك باستعمال أداة واحدة كل مرة ثم اثنتين ثم ثلاث وهكذا. وحفز بعض المجموعات أن تجد العدد الكلي لجميع التجمعات الممكنة عندما يكون الترتيب مهمًا (أي أن ABC تختلف عن BCA)، وعندما لا يكون الترتيب مهمًا (أي أن ABC و BCA تمثل تجمعة واحدًا). ثم اطلب إلى المجموعات أن تعرض على طلاب الفصل الرسوم التي أعدتها وعدد التجمعات التي أوجدتها.

مبدأ العد الأساسي قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العينة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عملياً أو ضرورياً. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي مبدأ العد الأساسي

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k . افرض أن:

$n_1 =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

$n_2 =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

\vdots

$n_k =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب
يُسمى مبدأ العد الأساسي أحياناً قاعدة الضرب للعد.

تنبيه!

اختيارات ذكّر الطلبة في المثال 2، أن اختيار أحد البدائل يُعدّ ناتجاً واحداً، وأن عدم اختياره يكون أيضاً ناتجاً يجب أن يسجّل في فضاء العينة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال مبدأ العد الأساسي

عدد الخيارات	البدائل
5	القماش
6	اللون
3	الأكمام
3	القبة
2	الفتحة الأمامية
2	الأزرار

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوباً مناسباً؟



الربط مع الحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

مبدأ العد الأساسي

مثال 3 يبيّن كيفية إيجاد عدد النواتج الممكنة دون كتابتها.

مثال إضافي

3 سيارات: توجد في السيارات الجديدة إضافات عديدة موضحة في الجدول أدناه، فما عدد النواتج الممكنة لاختيار سيارة من بينها؟

عدد البدائل	الإضافات
11	اللون الخارجي
7	اللون الداخلي
2	مواد المقاعد
2	المحرك
4	الإطارات
3	الأبواب

3696

استعمل مبدأ العد الأساسي.

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 6 \times 5 = 1080$$

إذن لدى سعد 1080 خياراً ليختار ثوباً مناسباً.

تحقق من فهمك

(3) أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

(A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور. 65536

(B) رمي مكعب مرقم أربع مرات. 1296

(C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات:

39, 40, 41, 42, 43, 44, 45

أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي،

وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء. 168

نموذج الإجابة

- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (A) (B) (C) (D)
- (T) (F)
- (T) (F)
- (T) (F)
- (T) (F)

إرشادات للمعلم الجديد

مبدأ العد الأساسي يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي للتحقق من أنه قد تم إدراج جميع النواتج الممكنة في فضاء العينة لتجربة ما.

المحتوى الرياضي

التباديل هي توسيع لمبدأ العد الأساسي على أن يُعدّ كل ترتيب وحيد من النواتج حادثة وحيدة.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية اطلب إلى الطلبة تسمية مجموعات مختلفة من إعدادات التصوير المتوافرة (أبعاد الصورة، جودة الصورة، الإضاءة، ... إلخ). واستعمل هذه الإعدادات لإيجاد عدد البدائل المختلفة الممكنة لإعدادات آلة التصوير. ثم اطلب إلى الطلبة أن يلخصوا نتائجهم باستعمال جدول أو أساليب عرض أخرى.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-4 للتأكد من فهم الطلبة.
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة
لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب
مستوياتهم.



عدد البدائل	قائمة المأكولات
8	المقبلات
4	الحساء
6	السلطة
12	الطبق الرئيسي
9	الحلوى

(4) عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكل صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كل صنف ونوع، فما عدد التواتج الممكنة؟ 20736

مثال 1

للأسئلة 1-3 انظر ملحق الإجابات

مثال 2

مثال 3

تدرب وحل المسائل

مثال 1

للأسئلة 5-7 مثل فضاء العينة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:
(5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.
(6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تبادل ثقافي خلال كل من السنتين الأخيرتين في الكلية، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.
(7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلثات؛ أحدهما يشتمل على مثلث منفرج الزاوية (O) أو مثلث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلث متطابق الضلعين (E) أو مثلث مختلف الأضلاع (N).



(8) رسم: ينفذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2

مثل فضاء العينة مستعملًا الرسم الشجري في كل ممّا يأتي:
(9) سيارات: يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاح (N) و/ أو سقف متحرك (R).
(10) حقائب: يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقبة أسود أو بنيًا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح أو قفل أرقام.

حقائب سفر	
الحجم	اللون
كبير (H)	أسود (B1)
صغير (S)	بني (B2)
	أزرق (B3)
الحماية: مفتاح (K) أو قفل أرقام (N)	

الدرس 7-1 تمثيل فضاء العينة 115

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	17-29 ، 5-11
ضمن المتوسط	17-29 ، 13-15 ، 5-11
فوق المتوسط	12-29

(11) تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الأول و 4 طلاب للنشاط الثاني و 5 طلاب للنشاط الثالث و طالبان للنشاط الرابع، على أن لا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟ 120

(12) فن، أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثل فضاء العينة باستعمال الجدول والرسم الشجري. انظر ملحق الإجابات

(13) إفطار: الإعلان المجاور، يوضح قائمة وجبة

الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟ 18



(14) درجات، اشترى عصام قفلاً رقمياً لدرجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9.

(a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟ 10000

(b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

(15) تمثيلات متعددة: تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولاً دور المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقي مكعباً مرقماً، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدور المؤشر 2.



(a) هندسياً: استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة للتجربة. انظر ملحق الإجابات

(b) منطقيًا: ارسم شكل فن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة. انظر ملحق الإجابات

(c) تحليليًا: ما عدد النواتج الممكنة؟ 20

(d) تفضليًا: هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضح إجابتك.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلبة في

لسؤال 15 الرسم الشجري وأشكال فن، تمثيل فضاء العينة للتجربة.

إجابات:

(14b) 5040؛ إجابة ممكنة: يوجد 10

خيارات للرقم الأول في المجموعة. وبما أنه لا يمكن لعصام أن يستعمل

الرقم إلا مرة واحدة فإن هناك 9

خيارات للرقم الثاني و 8 للرقم

الثالث و 7 للرقم الرابع. ويكون

عدد الطرق الممكنة مساوياً لـ

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

(15d) إجابة ممكنة: لا؛ بما

أن المرحلة الثانية تعتمد على

ما يحدث في المرحلة الأولى

من التجربة فلا يمكن ضرب

عدد نواتج كل مرحلة، بل

يجب أن نجد عدد النواتج

الممكنة لكل مرحلة ثم

تجمعها.

عدم إرجاع العناصر
إذا اخترت عنصرًا من
مجموعة عناصر دون
إرجاعه إلى المجموعة،
فإن عدد عناصر
المجموعة يتغير
وكذلك عدد النواتج
الممكنة.

4 التقويم

تعلّم لاحق اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول العلاقة بين ما تعلّموه عن تمثيل فضاء العينة واستعمال مبدأ العد الأساسي مع التبادل والتوافيق.

إجابات:

(16) $2n - 3n^2 + n^3$ ؛ إجابة ممكنة:

يوجد n من العناصر في الصندوق عند سحب العنصر الأول. لذا يوجد $n - 1$ من النواتج الممكنة بعد سحب العنصر الأول، ويوجد $(n - 2)$ من النواتج الممكنة بعد سحب العنصر الثاني. إذن، عدد النواتج الممكنة يساوي حاصل ضرب أعداد النواتج الممكنة لكل تجربة، أو $n(n - 1)(n - 2)$

(17) إجابة ممكنة:

في تجربة اختيار واحد من صندوقين أحدهما أزرق والآخر أحمر. ثم سحب كرة من الصندوق الذي اخترته عشوائيًا دون النظر فيه، فإذا كان في الصندوق الأزرق كرة حمراء وكرة بيضاء وكرة خضراء، وفي الصندوق الأحمر كرة صفراء وكرة برتقالية. فإن النواتج تمثل على النحو الآتي:



(18) n^k ؛ إجابة ممكنة: المجموع الكلي لعدد النواتج الممكنة يساوي حاصل ضرب عدد النواتج لكل مرحلة من 1 إلى k . وبما أنه يوجد k من المراحل، فإنك توجد $n \times n \times \dots \times n$ من المرات وهذا يساوي n^k .

(19) إجابة ممكنة:

يكون الرسم الشجري ضروريًا إذا أردت عرض فضاء العينة لتجربة أو إذا أردت أن تعرف عدد مرات ظهور ناتج معين. أما في حال معرفة عدد النواتج الممكنة فيمكن استعمال مبدأ العد الأساسي.

- (16) **تحذّر:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برر إجابتك. **للأسئلة 20-16 انظر الهامش**
- (17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرر إجابتك.
- (18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p ، ووضح إجابتك.
- (19) **اكتب:** وضح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العد الأساسي.
- (20) **اكتب:** وضح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

(21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟ **B**

- A 4
B 6
C 8
D 9

(22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟ **C**

- A 12
B 35
C 60
D عدد لانهايي

مراجعة تراكمية

أوجد الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

(23) $3, 12, 48, 192, \dots$ (الدرس 6-3) 768

(24) $2, -2, -6, -10, \dots$ (الدرس 6-2) 6

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 5-6)

(25) $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{10}{7}$

(26) $1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$ 768

أوجد الناتج في كلِّ ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

(27) $\frac{9}{2} \cdot \frac{3^3}{3 \cdot 2}$

(28) $12 \cdot \frac{2^4 \cdot 6}{8}$

(29) $96 \cdot \frac{4^4 \cdot 3}{2 \cdot 4}$

الدرس 7-1 تمثيل فضاء العينة 117

تنويع التعليم

ضمّن هوق

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا تجربة متعددة المراحل تتعلق بالتسويق، مثل: اختيار وجبة طعام أو اختيار أنواع من المعجنات. ثم اطلب إليهم أن يكوّنوا جدولًا يشمل جميع البدائل الممكنة، ويستعملوا مبدأ العد الأساسي لتحديد عددها. ثم يمثلوا فضاء العينة بالرسم الشجري. ويُعدّوا أخيرًا نشرة تسويق إعلانية تلقي الضوء على عدد البدائل المتاحة من هذا المنتج.

(20) في الجدول يوجد أسطر وأعمدة فقط للمرحلتين الأولى والثانية، فإذا كانت التجربة أكثر من مرحلتين فلا يوجد مكان لوضع المرحلة الثالثة وما بعدها.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: التاريخ: **7-1** **تدريبات إعادة التعليم**
تمثيل هضاء العينة

تمثيل هضاء العينة: هضاء العينة تجربة ما هو مجموعة النتائج الممكنة جميعها ويمكن تليه باستعمال القائمة المنطقة أو الجدول أو الرسم الشجري.

يختار كوكب بلعة وقميصاً وربطة عنق مناسبة للعمل وفق قائمة الملابس الجاهزة. استعمل الرسم الشجري لتمثيل هضاء العينة لملابس العمل التي يلبسها كمال.

- لون البلعة (G, B, K)
- لون القميص (W, L)
- الزرطة (T, NT)

مثال بالرسم الشجري الذي يتكوّن من ثلاث مراحل:

تدوين: مثل هضاء العينة لكل تجربة مما يأتي مستعملاً القائمة المنطقة، والجدول، والرسم الشجري.

1) يمكن أن يلبس فريق كرة السلة قميصاً زرقاً أو يهياض مع بنطال زرقاً أو يهياض.

2) مشاركة طلاب مدرسة مباراة كرة قدم أو كرة سلة على ملاعب الجامعة أو ملاعب النادي الرياضي.

3) يمكن أن يشرب طفلاً عصير التفاح أو الخبز من قنينة أو قنجان.

4) يتكوّن الجزء الأول من اختبار من سؤالين من نوع الصواب أو الخطأ.

الصف: الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات: 6

تدريبات إعادة التعليم - تامة (7) دون

الاسم: التاريخ: **7-1** **تدريبات إعادة التعليم**
تمثيل هضاء العينة

مبدأ العد الأساسي: يمكن إيجاد عدد الترتيبات الممكنة لعدد الترتيبات الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

يتكوّن لبط لائحة سيارة من ثلاثة أحرف إنجليزية متتالية بثلاثة أرقام على ألا يكون الحرف 0 أحد الحروف المستعملة، ولا يكون الرقم 0 أحد الأرقام المستعملة في اللوحة. ويمكن استعمال أي حرف آخر، أو أي رقم آخر أكثر مرّة في اللوحة الواحدة.

ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بهذا النمط؟

استعمل مبدأ العد الأساسي.

عدد الترتيبات الممكنة	الرقم الثالث	الرقم الثاني	الرقم الأول	الحرف الثالث	الحرف الثاني	الحرف الأول
11390625	×9	×9	×9	×25	×25	×25

لذا يمكن جعل 11390625 لائحة من هذا النمط.

تدوين: أوجد عدد الترتيبات الممكنة في كل من الحالات الآتية:

1) زُيّنَت غرفة باختيار واحد من كل صليب. 2) يتكوّن طعام الغداء في مطعم من اختيار واحد من كل صليب.

عدد الخيارات	عدد الخيارات
لون الدعان	عدد الخيارات
8	عدد الخيارات
مجموعة الفراش	عدد الخيارات
6	عدد الخيارات
السجاد	عدد الخيارات
5	عدد الخيارات
الإضاءة	عدد الخيارات
3	عدد الخيارات
الستائر	عدد الخيارات
5	عدد الخيارات

3) يريد عادل أن يزين حديقة منزله، فوجد في كتيّب حول عتقات الحدائق والمساحات أربعة أنواع من البلاط وثلاثة أنواع من الأرصعة و5 أنواع من ألطيم القاع، وسوف يطلب نوعاً واحداً من كل صليب من الأرصاف المذكورة. 60

الصف: الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات: 7

تدريبات المهارات (8) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ: **7-1** **تدريبات المهارات**
تمثيل هضاء العينة

مثل هضاء العينة لكل تجربة مما يأتي مستعملاً القائمة المنطقة والجدول والرسم الشجري.

1) حصول سليم على وظيفة في الرياض أو حدة في فندق أو مطعم، وفردوم، فاج م.

2) التحاق سامي في فريق كرة السلة أو كرة القدم مستشاراً أو إدارياً.

3) يمكن أن يشتري عامر ساعة أو نظارة بـ 100 ريال أو 200 ريال، أو 100 ص، 100 ن، 200 ص، 200 ن.

أوجد عدد الترتيبات الممكنة في كل من الحالات الآتية:

4) تشتري عائلتي بيتاً، وعليها أن تختار بيتاً واحداً 5 يختار فريقاً مشتركاً لتفويتها، ويمنّى عليه أن يختار بجلاء واحداً من كل فئة.

عدد	الفئة
4	الوقوع
5	المساحة
3	الحديقة الأمامية
3	المساحة الخلفية والبركة

1152 يوجد في متجر لبيع الهدايا 4 أنواع مختلفة من المشي، و 8 أنواع من الحلوى، و 5 تصاميم مختلفة من البطاقات و 3 الألوان من الورود وتتكوّن الهدية من اختيار واحد من كل من هذه الأصناف الأربعة.

480 يلبس سميلاً يتكوّن من بنطال وقميص وحذاء وجوارب وحذاء. ويوجد لديه 6 بنطال و 8 قمصان و 3 أحذية و 4 أزواج من الجوارب و 3 أزواج من الأحذية. 1296

الصف: الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات: 8

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ: **7-1** **تدريبات حل المسألة**
تمثيل هضاء العينة

1) فؤاد مصرية، تتسوّق عند شراء عتقات مصرية إذا كان لديها بدل واحد من كل مما يأتي: 6 حافظات مصرية و 8 دفاتر ملاحظات، 3 حافظات أقلام، و 3 أنواع من أقلام الرصاص و 8 أنواع من أقلام الخيزر. و 4 أنواع من الآلات الحاسبة، فما عدد البدائل المختلفة المتاحة عنده؟

13824

2) حاسوب محمول، تريد سامية أن تشتري حاسوباً عمولاً، ولديها بدل واحد من كل مما يأتي: 3 أحجام لشكل القرص الصلب، و 3 سرعات لوحدة المعالجة المركزية، و 4 ألوان للوحة، و 4 مسان للشاشة.

ولديها من الكمال، و 4 عتبات، إذا رغبت سامية في شراء جهاز أزرق اللون مع أقلام مة كمال، فما عدد الخيارات المتاحة لها؟

72

3) القرص المدمج يُستعمل المؤشر في الشكل أدناه في القرص الدوّار. إذا أُشير المؤشر 4 مرات، فما عدد الترتيبات الممكنة؟



1296

الصف: الثاني الفصل: ٧ الاختصاصات: 9

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations



لماذا؟

وقف يوسف وعليّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليسار، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ترتيباً ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء. يمكن كتابة العبارة $4 \times 3 \times 2 \times 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4.

فيما سبق:

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن:

- استعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- استعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المضربيات:

التباديل
permutations

المضروب
factorial

التباديل الدائرية
circular permutation

التوافيق
combinations

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

استعمال مبدأ العد الأساسي.

الدرس 7-2

استعمال التباديل في حساب الاحتمال.

استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.

ما بعد الدرس 7-2

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال

والمساحات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

وأسأل:

• لماذا يكون الترتيب في الصورة

مهماً؟ إجابة ممكنة: أطوال الأشخاص،

تناسق ألوان الملابس، الأصدقاء.

• أيّ المواقف الأخرى قد يكون فيها ترتيب

الأشياء مهماً؟

إجابة ممكنة: عند إعداد بعض أنواع

الحلوى يكون الترتيب مهماً عند خلط

المكونات.

• أيّ المواقف قد لا يكون فيها ترتيب

الأشياء مهماً؟ إجابة ممكنة: وضع

التوابل والمقبلات على الطعام.

مفهوم أساسي المضروب

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ ، وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$

مثال 1 الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌ منهم قميصاً مرقماً من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العينة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (20 - 2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

عدد نواتج الحادثة ← $\frac{18!}{20!}$ (نواف 1 و ماجد 2)
عدد النواتج الممكنة ← $\frac{18!}{20 \cdot 19 \cdot 18!}$

بإيجاد مفكوك $20!$ والقسمة على العوامل المشتركة بالتبسيط

$$P(2) = \frac{18!}{20!} = \frac{18!}{20 \cdot 19 \cdot 18!} = \frac{1}{380}$$

تحقق من فهمك

(1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟ $\frac{1}{12}$

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (121)	• تنوع التعليم، ص (121, 124)	• تنوع التعليم، ص (121, 124)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)



ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائياً ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

الاحتمال باستعمال التباديل

الأمثلة 4-1 تبين كيفية استعمال التباديل لإيجاد عدد الطرق الممكنة لترتيب العناصر.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

قراءة الرياضيات

متمايز يعني مصطلح عناصر متمايزة أن العناصر مختلفة بطريقة ما.

أضف إلى

طويبتك

يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتميزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_n P_r$ حيث

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5 P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

مفهوم أساسي

التباديل

مثالان إضافيان

1 مسابقة مواهب: تقدم عبدالله

وفيصل من ضمن 30 طالباً إلى مسابقة في الشعر. وقد دُعي الطلاب عشوائياً لتقديم أشعارهم أمام لجنة التحكيم. ما احتمال أن يُدعى عبدالله أولاً وفيصل ثانياً؟ $\frac{1}{870}$

2

عُرض 12 رأساً من الخيل للبيع؛ أربعة منها لونها بني، وأربعة لونها أسود، وثلاثة منقطة، وواحدة بيضاء اللون. ما احتمال بيع جميع الخيول البنية أولاً؟ $\frac{1}{495}$

2 مثال الاحتمال والتباديل

يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيساً، ونائباً للرئيس، وأميناً للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائياً؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جداً. عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1؛ لأن هناك ترتيباً واحداً فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعنية.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيساً ومحمد نائباً ومهند أميناً للسر يساوي $\frac{1}{720}$

تحقق من فهمك

(2) تستعمل الأرقام 9-1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

(A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟ 362880

(B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائياً، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976، 67953124؟ $\frac{2}{362880}$



المحتوى الرياضي

التباديل عند كتابة التباديل على الصورة ${}_n P_r$ ، تدل r على عدد العوامل المتتالية المضروبة في بعضها، و n على العامل الأول. فمثلاً الرمز ${}_6 P_4$ يدل على أخذ 4 عوامل متتالية تبدأ بالعدد 6 وهي $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. وهذا هو الناتج نفسه من تطبيق قانون التباديل والاختصار. ويستعمل الرمز $P(n, r)$ أحياناً بدلاً من الرمز ${}_n P_r$.

تكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المتميزة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي التباديل مع التكرار

عدد التباديل المتميزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا... فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

مثال 3 الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرًا مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المتميزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

وذلك باستعمال الآلة الحاسبة

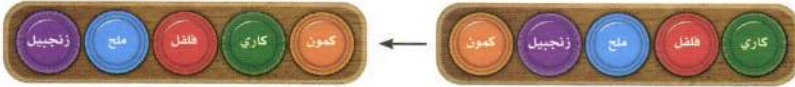
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$

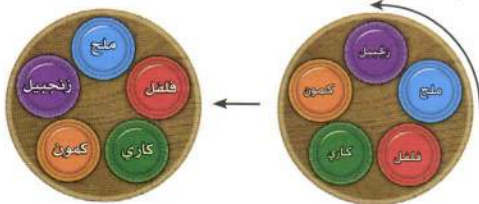
تحقق من فهمك

(3) أرقام هواتف: ما احتمال أن يكون رقم هاتف مكون من 8 أرقام هي 5, 1, 6, 5, 2, 1, 5, 3؟ $\frac{1}{3360}$

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلب الكُمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5!



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى الترتيب الممكنة **تباديل دائرية**، فإذا وضعت عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما توضع العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$



الربط مع الحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة "فأسقيناكموه" من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال إضافي

بلاط: يحتوي صندوق على 5 بلاطات زرقاء (bl)، وبلاطتين ذهبيتين (gd)، وبلاطتين خضراوين (gr) موضوعة عشوائيًا دون ترتيب. والنمط المطلوب هو . bl, gd, bl, gr, bl, gd, bl, gr, bl. إذا اخترت تبديلًا من هذه البلاطات عشوائيًا، فما احتمال اختيار البلاطات في التسلسل المطلوب؟ $\frac{1}{756}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكّر الطلبة بإعادة قراءة السؤال الذي سيجيبون عنه، وأن يتحققوا من معقولية إجاباتهم. فمثلًا في المثال 3 يمكن أن يحسب الطلبة عدد التباديل ويكتبوا الإجابة 1260، وإذا أعادوا قراءة المسألة سيلاحظون أن المطلوب هو احتمال تبديل معين والذي يساوي $\frac{1}{1260}$

التباديل الدائرية
عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسوماً على عددها.

قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجع ثابتة أم لا.

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا أُثبتت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجع ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدّد مسبقاً في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستعامل خطياً وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

(a) زينة، إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائياً، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن

احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.



(b) طعام، جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟ بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6. لذا فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

تحقق من فهمك

(4) كرة قدم: تجتمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعباً على شكل حلقة يتشارون قبل بداية المباراة.

(A) ما احتمال أن يقف قلب الهجوم عن يمين حارس المرمى مباشرة، إذا تجتمع الفريق بشكل عشوائي؟ وضح تبريرك. انظر الهامش

(B) إذا وقف حكم المباراة تماماً خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضح تبريرك.



الاحتمال باستعمال التوافيق هو اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظفين من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفين غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظفين.

(4B) بما أن تجمع اللاعبين كان حسب نقطة مرجع ثابتة فهذا تبديل خطي.

إذن هناك $11!$ طريقة لترتيب

اللاعبين في هذا التجمع. وعدد النواتج التي تتكون منها الحادثة المطلوب يساوي عدد تباديل

اللاعبين الآخرين العشرة على فرض أن الحكم يقف خلف حارس المرمى أي $10!$. ولذا،

فاحتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى هو

$$\frac{10!}{11!} \text{ ويساوي } \frac{1}{11}$$

اضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

التوافيق

يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرموز: ${}_n C_r$ ، حيث ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8 C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 56$$

مثال،

الدرس 7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق 121

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون قسّم الطلبة إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية، وزوّد كل مجموعة بكمية من أربعة أشياء مختلفة، مثل حبوب الفاصولياء، أقراص ملونة أو خرز بلاستيك، ثم اطلب إلى إحدى المجموعات أن تكون جميع التوافيق الممكنة المكونة من شيئين، وأن تنفذ مجموعة أخرى النشاط نفسه بإيجاد عدد التباديل. وأن تجد مجموعات أخرى عدد التوافيق والتباديل لمجموعات مكونة من ثلاثة أو أربعة أشياء. واطلب إلى كل مجموعة أن تسجل على الورق جميع الطرق المختلفة التي رتبوا بها الأشياء. وعرض ما توصلت إليه على باقي طلبة الصف. وجّه الطلبة إلى أن ينتبهوا بصورة خاصة إلى الفرق بين عدد التوافيق والتباديل التي كوّنت من العدد نفسه من الأشياء.

مثال إضافي

4

أوجد الاحتمال المشار إليه في كل مما يأتي، ووضح تبريرك:

(a) إذا جلس 8 طلاب عشوائياً على مقاعد موضوعة بشكل دائري كما في الشكل أدناه. فما احتمال أن يجلس الطلاب حسب الترتيب المبين؟



$\frac{1}{5040}$ ؛ بما أنه لا يوجد نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل دائري.

(b) إذا اشترت صندوقاً فيه 8 أقلام تلوين مرتبة عشوائياً. فما احتمال أن يكون قلم التلوين الذي في أقصى اليسار أحمر؟

$\frac{1}{8}$ ؛ بما أن الأقلام مرتبة في صف فإن هذا تبديل خطي.

إجابة (تحقق من فهمك):

(4A) $\frac{1}{10}$ ؛ بما أنه لا توجد نقطة مرجع

ثابتة فإن هذا تبديل دائري. يوجد

$(11-1)!$ أو $10!$ من التباديل

المتمايزة للاعبين. عدد النواتج التي

يتكون منها الحدث المطلوب يساوي

عدد تباديل اللاعبين التسعة الآخرين

في التجمع أو $9!$. لذا، فإن احتمال أن

يقف قلب الهجوم عن يمين حارس

المرمى يساوي $\frac{9!}{10!}$ ، أو $\frac{1}{10}$.

المرمى يساوي $\frac{9!}{10!}$ ، أو $\frac{1}{10}$.

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة أي ${}_{10}C_6$

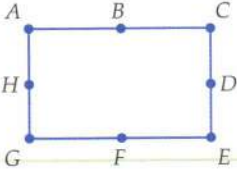
$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_{6}C_6 = 1$ وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$

تحقق من فهمك

5 هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟ $\frac{1}{14}$



إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

مثال إضافي

مثال 5 يبين كيفية إيجاد عدد طرق تنظيم مجموعة من الأشياء عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

وضعت في وعاء أحرف ممغنطة تمثل الحروف الهجائية العربية جميعها. إذا سُحبت 5 حروف من الوعاء عشوائيًا، فما احتمال أن تكون ب، هـ، ع، ل، م؟ $\frac{1}{98280}$

تأكد

1 هندسة: إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟



$$\frac{1}{20} = 0.05$$

2 معرض علمي: تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 15 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟ $\frac{1}{2730}$

3 أعداد: يتكون عدد من الأرقام 1, 3, 3, 3, 6, 6, 5. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133؟ $\frac{1}{420}$

4 كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتبت عشوائيًا على منضدة دائرية.

(a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟ $\frac{1}{120}$

(b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟ $\frac{1}{6}$



5 مسابقات: اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبد العزيز وخالد وفوزي؟ $\frac{1}{1365}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-5 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	19-33 ، 16 ، 6-12
ضمن المتوسط	19-33 ، 17 ، 7-15 فردي
فوق المتوسط	13-33

مثال 1 (6) محاضرات: ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌ منهما مقعداً في الصف المبين أدناه عشوائياً، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟ $\frac{1}{132}$



(7) حفلات: وُزعت بطاقات مرقمة من 1 إلى 50 على 50 شخصاً في حفلة، وكان حسين وزيد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزيد البطاقة رقم 23؟ $\frac{1}{2450}$

مثال 2 (8) مجموعات: تم اختيار شخصين عشوائياً من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أو لآ ثم سليم ثانيًا؟ $\frac{1}{90}$ أو 1% تقريباً



مثال 3 (9) أحرف مغلطة: اشترى عدنان أحرفاً مغلطة يمكن ترتيبها على باب ثلاجه، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلاً من الأحرف المبيّنة في الشكل المجاور عشوائياً، فما احتمال أن تشكل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟ $\frac{1}{1260}$

(10) رموز بريديّة: ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 39372375 إذا تم تكوينه عشوائياً من الأرقام 3, 7, 3, 9, 5, 7, 2, 3؟ $\frac{1}{3360}$

مثال 4 (11) مجموعات: يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟ $\frac{1}{7}$

(12) مدينة ألعاب: ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟ $\frac{1}{8}$

(13) ألعاب: رُبت 8 كرات مرقمة بالأرقام 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 عشوائياً في صف:

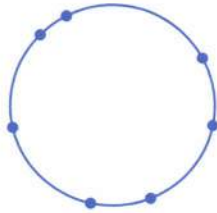
(a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار؟ $\frac{1}{56}$
 (b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائياً. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبين في الشكل أدناه؟ $\frac{1}{40320}$



(c) إذا أعيد ترتيب الكرات عشوائياً بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟ $\frac{2}{7}$

(14) إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟ $\frac{1}{140}$

مثال 5 (15) ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضح إجابتك. انظر الهامش



(16) اختيرت 7 نقاط تقع على دائرة عشوائياً كما في الشكل المجاور.

(a) إذا استعملت الأحرف من A إلى G، فما عدد الطرق التي يمكن أن تسمي بها النقاط على الدائرة؟ 5040
 (b) إذا أعطيت إحدى النقاط حرفاً معيناً، فما عدد الترتيبات الممكنة؟ 720

إجابة:

(15) 45؛ إجابة ممكنة: عدد المستقيمات

هو توافق 10 نقاط مأخوذة 2 في كل

$$\frac{10!}{8!2!} = 45 \text{ وهي مرة، وهي}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(17) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم أنها غير صحيحة أبداً؟ برر إجابتك.

$${}_n P_r = {}_n C_r \text{ انظر ملحق الإجابات}$$

(18) **تحذير:** يدعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: $r! \cdot {}_n C_r = {}_n P_r$. بين صحة هذه العلاقة جبرياً، ثم وضح لماذا يختلف ${}_n C_r$ و ${}_n P_r$ بعامل مقداره $r!$. **انظر الهامش**

(19) **مسألة مفتوحة:** صف وضعاً يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{7} C_3$. **انظر ملحق الإجابات**

(20) **برهان:** برهن أن ${}_n C_{n-r} = {}_n C_r$. **انظر الهامش**

(21) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

(24) **احتمال:** ألقى مكعب مرقم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقى المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟ **C**

- 1 A
9/10 B
1/6 C
1/10 D

(22) **احتمال:** يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطقوا بشكل عشوائي؟ **C**

- 1/24 A
1/12 B
1/2 D
1/6 C

(23) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلاً للأحرف المبيّنة أدناه عشوائياً، فما احتمال أن تكون كلمة "فسيفساء"؟ $\frac{1}{1260}$

ف ء س ف ي س ا

4 التقويم

فهم الرياضيات أعط الطلبة مسألة احتمال، واطلب إليهم أن يذكروا القانون الذي سيستخدمونه لإيجاد الاحتمال، وبيّنوا السبب الذي يجعل القانون الذي اختاروه هو الأنسب للمسألة المعطاة.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 7-1، 7-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

(18) إجابة ممكنة:

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\begin{aligned} r! \cdot {}_n C_r &= r! \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!r!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= {}_n P_r \end{aligned}$$

لذا فإن ${}_n C_r$ ، ${}_n P_r$ يختلفان في العامل $r!$ ؛ لأنه يوجد دائماً $r!$ من الطرق لترتيب المجموعات التي يتم اختيارها. لذا فإنه يوجد $r!$ تباديل لكل توفيق.

مراجعة تراكمية

(25) **تسوق:** لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفاً مختلفاً يمكن اختياره؟ (الدرس 7-1) 16

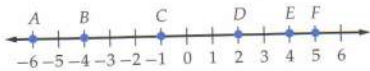
مثل فضاء العينة في كل تجربة مما يأتي بالرسم الشجري:

(26) إلقاء ثلاث قطع نقد متميزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 7-1) 16 **انظر الهامش**

(27) سحب كرتين معاً من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و3 كرات سوداء. (الدرس 7-1) **انظر ملحق الإجابات**

أوجد قياس كل مما يأتي مستعملاً خط الأعداد: (مهارة سابقة)

- 3 DF (28)
10 AE (29)
6 BD (31)
6 CF (33)
1 EF (30)
5 AC (32)

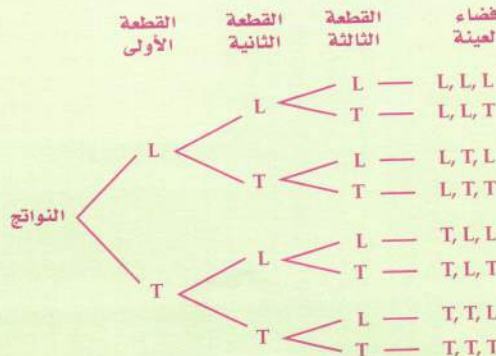


124 الفصل 7 الاحتمالات

تنوع التعليم

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا حول التأثير الممكن لفهم مبادئ الاحتمال وتطبيقها على اتخاذ قراراتهم في بعض المواقف. وشجعهم على استعمال أمثلة محددة ومفضّلة لمواقف تؤيد طرق تفكيرهم.

(26)



$${}_n C_{n-r} \stackrel{?}{=} {}_n C_r \quad (20)$$

$$\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \checkmark$$

(21) **إجابة ممكنة:** تستعمل كل من التباديل والتوافيق لإيجاد عدد الترتيب الممكنة لمجموعة من العناصر. ترتيب العناصر مهم في التباديل، ولكنه غير مهم في التوافيق.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 7

دون ضمن المتوسط

فوق ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11)

دون

7-2 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

الاحتمال باستعمال التباديل، التباديل لتقسيم مجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهم وإيجاد عدد تباديل عناصر مجموعة استعمال المصروب. يكتب المصروب باستعمال العدد والزما، وفيما يلي قوانين التباديل:

عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة في كل مرة.	$n!$
عدد تباديل n من العناصر فيها عنصر متكرر r_1 من المرات، وآخر متكرر r_2 من المرات وهكذا.	$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$
عدد تباديل n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة.	$\frac{n!}{n} = (n-1)!$

تتكون لجنة من 12 عضواً، ويُرَاد اختيار رئيس ونائب رئيس لها عشوائياً. ما احتمال اختيار ساسي وعامر من بين اللذين؟

أوجد عدد التوافيق الفرعية (التي تتكون منها الخاتمة) لعدد التوافيق الفرعية

$$2^{12} = 2^{12} = 4096$$

احتمال اختيار ساسي وعامر يساوي "عدد التوافيق الفرعية" $\frac{2}{4096} = \frac{1}{2048}$

تدريبات: 1) لديك كتاب مقرر لكل من المواضيع الآتية: الفقه، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الكيمياء، الرياضيات، التاريخ. إذا اخترت 4 كتب منها عشوائياً ورتبتها على رف. فما احتمال أن يكون كتاب الرياضيات الأول من اليمين وكتاب الكيمياء الثاني من اليمين؟

2) فود، اختار نادي القسيمة الإجمالية أربعة من أعضائه عشوائياً لعضوية كل واحد منهم اجتماعاً من الاجتماعات الأربعة في الرياض ومكة وجدة والمدينة. إذا كان عدد أعضاء النادي 20 عضواً، فما احتمال اختيار فهد، وفضل، وعبدالله، وزيد هذه الاجتماعات؟

3) رقم هواتف، ما احتمال تكوين رقم الهاتف 2223357 من الأرقام 2, 3, 2, 5, 2, 7, 3

4) هداه، تتكون مجموعة من 4 طلاب من الصف الأول الثانوي و6 طلاب من الصف الثاني الثانوي، فإذا جلسوا حول مائدة مستديرة عشوائياً، فما احتمال أن يكون الترتيب التالي: ثاني ثانوي - ثاني ثانوي - ثاني ثانوي - أول ثانوي - أول ثانوي - ثاني ثانوي - وهكذا؟

الصفحة: الثاني الثانوي 11 الفصل: ٧، الاحتمالات

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (12)

دون

7-2 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

الاحتمال باستعمال التوافيق، حيث ترتيب من العناصر، حيث يكون الترتيب فيه غير مهم. عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة في كل مرة يرمز له بالرمز C_n^r ، ويمكن إيجادها باستعمال القانون:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

حصل باسر على 15 ميدالية في سباقات كرة القدم التي لعبها، ولديه مكان يتسع لعرض 9 ميداليات منها فقط، فإذا اختار الميداليات التسع عشوائياً، فما احتمال اختيار أول 9 ميداليات حصل عليها؟

الخطوة 1: بما أن الترتيب غير مهم، فإن عدد التوافيق الممكنة يساوي:

$$C_{15}^9 = \frac{15!}{(15-9)!9!} = 5005$$

الخطوة 2: يوجد ناتج واحد مرغوب وهو (اختيار أول 9 ميداليات)

الخطوة 3: احتمال اختيار الميداليات التسع يساوي: "عدد التوافيق المرغوبة" $\frac{1}{5005}$

تدريبات: 1) امس كريمة، يمكن أن تختار ليل من بين 20 كبة مختلفة من الأيس كريم عند شرائها على آيس كريم تسع ليلاً ملامن. فإذا اخترت الكبات عشوائياً، فما احتمال أن تكون الكبات الثلاث التي اختارها هي: الفانيلا، الشوكولاتة، والفراولة؟

2) اتمام، 9 أطفال في حفلة: إذا اختارت الزينة 4 أطفال للعب على الأرجح عشوائياً، فما احتمال اختيار ساسي وعامر وحسن؟

3) بديقات مسورة، لدى خالد 20 بطاقة مسورة من 20 دولة مختلفة. ويريد أن يقدم 10 منها هدية لضيافته. إذا اختار البطاقات عشوائياً، فما احتمال أن يختار البطاقات التي تحمل صورياً من فرنسا وألمانيا والأرجنتين والكويت والإمارات ومصر والمملكة واليابان وإسبانيا وتركيا؟

4) الطائرات السريعة، يتكلم الكنتش على 12 لغةً جديدةً من قبل طيب أمانة المنطقة. 4 منها في غرب المدينة و4 في شرق المدينة و4 في وسط المدينة. ويختار الطيب 4 معاقم كل أسبوع للكشف عليها عشوائياً، فما احتمال اختيار المعاقم الأربعة في غرب المدينة في أحد الأسابيع؟

الفصل: الثاني الثانوي 12 الفصل: ٧، الاحتمالات

تدريبات المهارات (13)

دون ضمن المتوسط

7-2 تدريبات المهارات الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

1) معرض، تعرض إحدى المدارس أهالي الطلاب في المداخل الرئيس للندوة، في صلب يتوزع على 12 لوحة فنية مرتبة عشوائياً، ما احتمال أن تكون لوحة جميل ولوحة سارة في المكانين السادس والسابع؟

$$\frac{1}{132}$$

2) تنظيم، إذا أسقطت 18 طابلاً في صلب وأحد في تجربة طوارئ الحريق عشوائياً، فما احتمال أن يكون الله هو الأول ويشار الأخير في الصلب؟

$$\frac{1}{306}$$

3) اختيار، ترشح 10 طلاب للفرز بثلاث منج دراسية، ما احتمال أن يحصل ساسي وطارق وعمر على هذه المنج؟

$$\frac{1}{120}$$

4) حياطة، تخوي مملكات حروف للسيارات على أعداد مكونة من 5 أرقام بخاتمة عشوائية من الأرقام 1 إلى 9 دون تكرار، ما احتمال أن يكون أحد هذه الأعداد العشوائية 154321؟

$$\frac{1}{15120}$$

5) اجتماع، ركب والي 15 مقعداً في طائرة استعداده لأول لقاء تجاري في التندي. إذا اختار الأشخاص مقاعدهم عشوائياً، فما احتمال أن يجلس والي على المقعد الأقرب إلى الباب؟

$$\frac{1}{15}$$

6) لعبة دوامة العجل، يوجد في مدينة الألعاب لعبة دوامة العجل، وتخوي على 12 حصاناً في الحلقة الخارجية، إذا اختار 12 شخصاً اجتماعهم عشوائياً، فما احتمال أن يجلسوا وفق الترتيب التالي؟

$$\frac{1}{39916800}$$

7) ترويح، يروج هاشم لفترته في الألعاب البولندية، وقد حصل بـ 10 مسابح للبيرك. إذا واقتت 4 مسابح منها على مقابلة، فما احتمال أن تكون هذه المسابح هي أكبر 4 مسابح في اللعبة؟

$$\frac{1}{210}$$

8) عرض فود، إذا اختار أحد فود لعة الإشارة 10 من بين 15 عضواً لعرض مواهبهم في احتفال عام، فما احتمال أن يكون هؤلاء العشرة اللذين تم اختيارهم هم العشرة الأكبر سناً في النادي؟

$$\frac{1}{3003}$$

الصفحة: الثاني الثانوي 13 الفصل: ٧، الاحتمالات

تدريبات حل المسألة (14)

فوق ضمن المتوسط

7-2 تدريبات حل المسألة الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

1) الأعداد العشوائية، بركة الأعداد العشوائية برتباع جاسوي يتبع أعداداً عشوائية، ما احتمال أن يتبع عدداً أقل من 1000 عند إنتاج أعداد مكونة من 5 أرقام؟ (إرشاد: $10! = 3628800$)

$$\frac{1}{100}$$

2) برنامج، يمكن أن يختار أحد طلاب السنة الأولى 4 مسابقات في كل فصل من بين 17 مسابقاً، ولا يمكن أن يهبط الطالب دراسة المساق في السنة نفسها، ما احتمال أن يختار الطالب التسعة التسعة (الإنجليزية، والتاريخ، والجبر واللغة الإنجليزية II في الفصل الأول، والإنجليزية II والتاريخ II واللغة الإنجليزية III، والفلسفة وعلوم الأحياء في الفصل الثاني)؟

$$\frac{1}{1701700}$$

3) الأسماء المتعددة، يتكون مجلس الأمن الدولي من 5 أعضاء دائمين و10 أعضاء غير دائمين، والمسلكة العربية السعيدة من الأعضاء البالغ عددهم 192 عضواً في هيئة الأمن المتحدة، وهي ليست عضواً دائماً في مجلس الأمن، ما احتمال أن تكون المسلكة العربية السعيدة عضواً في مجلس الأمن؟

$$\frac{10}{187}$$

4) ما احتمال اختيار \overline{AB} من بين جميع المستقيمت المتكونة عشوائياً؟

$$\frac{1}{10}$$

5) هندسة، تقع النقاط: A, B, C, D, E في المستوى نفسه، ولا تقع أي ثلاث منها على المستقيم نفسه، ما عدد كل المستقيمت التي يمكن تشكيلها من هذه النقاط؟

$$10$$

6) ما احتمال اختيار \overline{AB} من بين جميع المستقيمت المتكونة عشوائياً؟

$$\frac{1}{10}$$

الصفحة: الثاني الثانوي 14 الفصل: ٧، الاحتمالات

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-3

إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

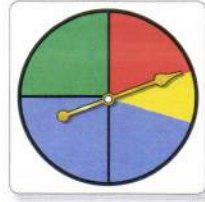
الدرس 7-3

إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحات.

ما بعد الدرس 7-3

إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة.



لماذا؟

في القرص ذي المؤشر الدوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

الاحتمال الهندسي احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًا**.

فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال الطول.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحة.

المضردات:

الاحتمال الهندسي
geometric probability

www.obeikaneducation.com

مفهوم أساسي الاحتمال والطول

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال، إذا اختيرت النقطة E على AD عشوائيًا، فإن

$$P(\text{تقع E على BC}) = \frac{BC}{AD}$$

أضف إلى مطوبتك

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- أي لون هو الأكثر احتمالاً ليستقر فوقه المؤشر؟ **الأزرق**
- أي لون هو الأقل احتمالاً ليستقر فوقه المؤشر؟ **الأصفر**

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على JM، فأوجد احتمال أن تقع X على KL.



$$\begin{aligned} \text{احتمال الطول } P(\text{تقع X على KL}) &= \frac{KL}{JM} \\ KL = 7, JM = 3 + 7 + 4 = 14 &= \frac{7}{14} \\ \text{بالتبسيط} &= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

- إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على JM، فأوجد قيمة كل مما يأتي:
- (1A) (تقع X على LM) $P(LM)$ **1A** $\frac{2}{7}$ (1A) أو 0.29 تقريبًا أو 29% تقريبًا
- (1B) (تقع X على KM) $P(KM)$ أو 0.79 تقريبًا، $\frac{11}{14}$ أو 79% تقريبًا

مصادر الدرس 7-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (126)	• تنوع التعليم، ص (126, 129)	• تنوع التعليم، ص (126, 129)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16)	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات المهارات، ص (18)
	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)
	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير متناهٍ من النواتج.



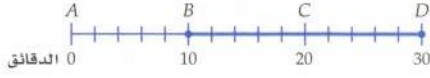
الربط مع الحياة

تمتاز الحافلات بانخفاض تكاليف تشغيلها، واتساعها لعدد أكبر من الركاب، وهي أكثر وسائل النقل أمانًا.

مثال 2 من واقع الحياة نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره حافلة كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

$$P(\text{انتظار 10 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك

(2) **شاي:** يحضر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

(A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L؟ $\frac{1}{4}$ أو 25%

(B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2L و 3L، أو $\frac{1}{8}$ أو 12.5%

الاحتمال والمساحة تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

الاحتمال والمساحة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال، إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A ، فإن

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدف ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة.
- أن احتمال وقوع الهدف في أي مكان من المنطقة متساوٍ.

الاحتمال والطول

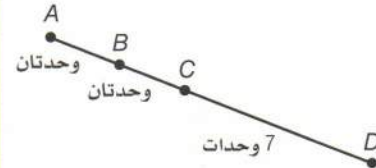
مثالان 1 و 2 يبيّنان كيفية إيجاد احتمال لحوادث التي تتضمن أطوالًا.

التقويم التكويني

ستعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

إذا اختيرت النقطة Z عشوائيًا على \overline{AD} ، أو جد احتمال أن تقع Z على \overline{AB} .



$\frac{2}{11}$ ، أو 0.18 تقريبًا أو 18% تقريبًا

مدارات: يدور مذنب هالي حول الأرض كل 76 سنة. ما احتمال أن يكمل المذنب مداره خلال العقد القادم؟

$\frac{5}{38}$ ، أو 0.13 تقريبًا أو 13% تقريبًا

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلبة نمذجة فضاء العينة باستعمال الاحتمالات الهندسية. إذ يمكن تمثيل كل حادثة بقطعة مستقيمة طولها يتناسب مع احتمالها. فمثلاً، يمكن تمثيل إلقاء قطعة نقد بقطعتين مستقيمتين متطابقتين، فيكون احتمال أن تقع نقطة على أي منهما يساوي 50%.



الربط مع الحياة

يهبط المظليون المحترفون المشاركون في بطولات الهبوط الحر بالمظلة على بعد أقل من بوصتين عن مركز مكان الهبوط.



الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟ نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1 = 3 m.

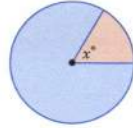
$$\begin{aligned} \text{احتمال المساحة} \quad P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) &= \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}} \\ A = \pi r^2 &= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2} \\ \text{بالتبسيط} &= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$ ، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

- 3 الهبوط بالمظلات: أوجد كلاً مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.
- (A) أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء) P ، أو 56% تقريبًا
 (B) أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء) P ، أو 33% تقريبًا

يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي. إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية (x°) إلى 360° . ستبرهن هذا في السؤال 21.



4 مثال استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي: (علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)



- (a) استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P
 قياس زاوية القطاع الأصفر 45°
 $P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\%$
- (b) استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P
 قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°
 $P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\%$
- (c) عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) P
 مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$
 $P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$

تحقق من فهمك 75% أو $\frac{3}{4}$ أو 19% تقريبًا

(4A) عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P (4B) استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P

ارشادات للدراسة

استعمال التقدير في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلاً من $\frac{1}{3}$ ، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% معقولاً.

الاحتمال والمساحة

المثالان 3، 4 يبيّنان كيفية إيجاد احتمال الحوادث التي تتضمن مساحات.

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقمية استعمال

أشياء مختلفة الألوان لتمثل مساحات مناطق مختلفة داخل شكل. واطلب إلى الطلبة نمذجة عدة مسائل تتضمن المساحات والاحتمال الهندسي وتوثيق ذلك باستعمال آلة التصوير.

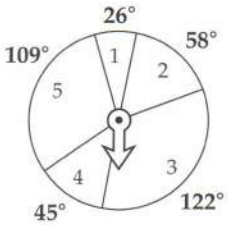
مثالان إضافيان

3 لعبة السهام: يتكون الهدف في

لعبة السهام من 3 دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية يساوي 4 in ويزداد نصف قطر كل دائرة عن الدائرة التي تسبقها بمقدار 3 in، إذا استقر سهم لاعب في الهدف فما احتمال أن يكون في الدائرة الداخلية؟

$\frac{1}{16}$ أو 6% تقريبًا

4 استعمال القرص ذي المؤشر الدوار أدناه، لإيجاد كل مما يأتي:



(a) استقرار المؤشر على القطاع 3) P

$\frac{122}{360}$ أو 34% تقريبًا

(b) استقرار المؤشر على القطاع 1) P

$\frac{13}{180}$ أو 7% تقريبًا

المحتوى الرياضي

المساحة تذكّر عند مقارنة مساحات الأشكال المتشابهة أن النسبة بين المساحات تساوي مربع النسبة بين أطوال الأضلاع.

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-5 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

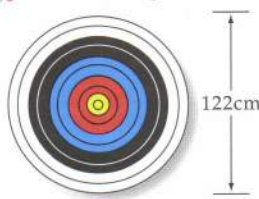
مثال 1

إذا اخترت النقطة X عشوائياً على \overline{AD} فأوجد كلاً مما يأتي:(1) (أن تقع X على \overline{BD} $P(\overline{BD})$ ، أو 0.5، أو $\frac{1}{2}$) (2) (أن تقع X على \overline{BC} $P(\overline{BC})$ ، أو 0.3، أو $\frac{3}{10}$)

مثال 2

(3) **مواصلات:** ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟ $\frac{1}{4}$

المثالان 3, 4

(4) **لعبة السهام:** يُسدد هداف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الأهداف نقطة داخل الدائرة الصغرى. 1%، أو 0.01، أو $\frac{1}{100}$ (5) **ملاحظة:** صُلِّ أحد طلبية الكشافة طريقه في غابة، فوجه بوصلته عشوائياً. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).12.5%، أو 0.125، أو $\frac{1}{8}$ (6) $\frac{4}{9}$ ، أو 0.44 تقريباً، أو 44% تقريباً(7) $\frac{13}{18}$ ، أو 0.72 تقريباً، أو 72% تقريباً(8) $\frac{5}{9}$ ، أو 0.56 تقريباً، أو 56% تقريباً

تدرب وحل المسائل

مثال 1

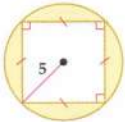
إذا اخترت النقطة X على \overline{FK} عشوائياً، فأوجد كلاً مما يأتي:(6) (أن تقع X على \overline{FH} $P(\overline{FH})$) (7) (أن تقع X على \overline{GJ} $P(\overline{GJ})$)(8) (أن تقع X على \overline{HK} $P(\overline{HK})$)(9) **طيور:** تقف أربعة طيور على سلك هاتف. فإذا هبط طائر خامس عشوائياً على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟ 33% تقريباً، أو 0.33 تقريباً، أو $\frac{1}{3}$

مثال 2

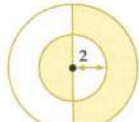
(10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجاً تلفزيونياً مدته 30 دقيقة. إذا كان يبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامج المفضل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟ $\frac{1}{6}$ ، أو 0.17 تقريباً، أو 17% تقريباً

مثال 3

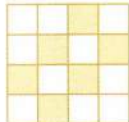
اخترت نقطة عشوائياً في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظللة.



(13)



(12)



(11)

0.363 تقريباً، أو 36.3% تقريباً

 $\frac{1}{2}$ ، أو 0.5، أو 50% $\frac{3}{8}$ ، أو 0.375، أو 37.5%

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	27-38، 25، 6-20
ضمن المتوسط	27-38، 25، 7-23 فردي
فوق المتوسط	21-38



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلِّ مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):

(14) استقرار المؤشر على اللون الأصفر P تقريباً 12.2%

(15) استقرار المؤشر على اللون الأزرق P تقريباً 23.3%

(16) عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر P تقريباً 69.4%

(17) عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر P تقريباً 62.2%

صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلِّ من النماذج الآتية:

(18) (19)

(19) إجابة ممكنة: اختيار نقطة على الخط واقعة بين 10 و 20

(20) هندسة إحدائية: إذا اختيرت نقطة عشوائياً على

الشبكة المجاورة، فأوجد كلاً مما يأتي:

(a) النقطة داخل الدائرة P أو $\frac{\pi}{25}$ تقريباً، أو 13% تقريباً

(b) النقطة داخل شبه المنحرف P أو $\frac{9}{100}$ ، أو 0.09، أو 9%

(c) النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة P أو $\frac{3}{10}$ ، أو 0.30 أو 30%

(21) جبر: اختيرت نقطة عشوائياً في الدائرة.

أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$.

(إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة $\times \frac{x}{360}$)

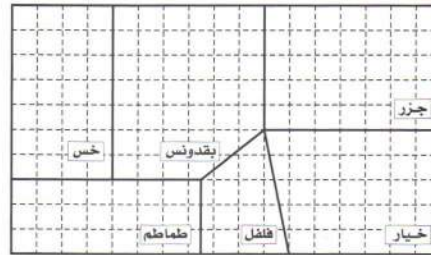
(22) هندسة إحدائية: إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائياً في منطقة حل نظام المتباينات

$1 \leq x \leq 6, y \leq x, y \geq 1$ ، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 16$ ؟ 0.50 أو، و 50% تقريباً

(23) زراعة: مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل أدناه،

(a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟ 67.5 وحدة مربعة

(b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائياً لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس. 0.23



مسائل مهارات التفكير العليا

انظر الهامش

(24) اكتشاف الخطأ: حسب كلِّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائياً داخل الدائرة O في المنطقة المظللة، أيهما حله صحيح؟ وضح تبريرك.

سالم

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{60}{360}$$

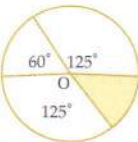
$$\approx 16.7\%$$

عمر

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{50}{360}$$

$$\approx 13.9\%$$



129 الدرس 7-3 الاحتمال الهندسي

4 التقييم

بطاقة مكافأة ارسم خمسة أشكال

هندسية مختلفة، وظلل منطقة في كل شكل.

وأعط كل طالب شكلاً ليجد احتمال وقوع

نقطة اختيرت عشوائياً في المنطقة المظللة.

واطلب إلى الطلبة أن يسلموا أوراقهم إليك

قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقييم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 7-3

بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يجب أن يلاحظ

الطلبة في السؤال 24، أن أنصاف

الأقطار المتقابلة ليست على استقامة

واحدة. وعليه، فإن زاوية القطاع

المظلل والزوايا التي قياسها 60° غير

متقابلتين بالرأس. لقد أخطأ سالم

عندما اعتبرهما متقابلتين بالرأس،

على حين كانت إجابة عمر صحيحة

حيث حسب زاوية القطاع المظلل

ب طرح مجموع الزوايا الثلاث المعلومة

من 360° .

إجابة:

(24) عمر. إجابة ممكنة: يجب أن تجمع

قياسات الزوايا المركزية الثلاث، ثم

تطرح المجموع من 360° لتجد قياس

الزاوية المركزية المظللة.

$50 = 360 - (60 + 125 + 125)$

لذا، فإن الاحتمال

يساوي $13.9\% \approx \frac{50}{360}$

تنوع التعليم

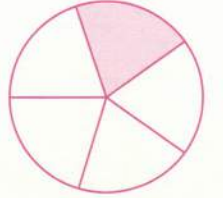
ضمن فون

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يكونوا لعبة تطبق فيها مفاهيم الاحتمال باستعمال المساحات. ويتعين عليهم أن يكتبوا تعليمات واضحة للعب والفوز. وتتضمن أيضاً احتمال التسجيل لجميع الأحداث الممكنة في اللعبة. واسمح لهم بأن يلعبوا ألعاباً صمّمها آخرون للتحقق من أن الاحتمالات الرياضية تقابل الاحتمالات التجريبية. واطلب إليهم أن يصمّموا ألعاباً عادلة، يكون الفوز في بعضها صعباً، وفي بعضها الآخر سهلاً.

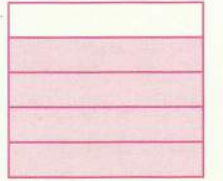
إجابة ممكنة: احتمال اختيار نقطة عشوائياً على \overline{AC} تقع بين A, B يساوي 20% .



احتمال اختيار نقطة عشوائياً في الدائرة تقع في المنطقة المظللة يساوي 20% .



احتمال أن تقع نقطة عشوائياً داخل الشبكة في المنطقة غير المظللة يساوي 20% .



إجابة ممكنة: يحسب احتمال أن تقع نقطة عشوائياً في المنطقة المظللة في الشكل الأول بإيجاد نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة سطح المربع الكبير، ويتم حسابه بطرح مساحة سطح المربع غير المظلل من مساحة سطح المربع الأكبر، ثم إيجاد نسبة الفرق بين المساحتين إلى مساحة سطح المربع الأكبر.

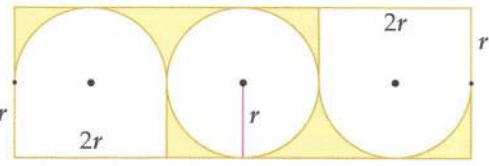
ويكون الاحتمال $\frac{12 - 0.75^2}{12}$ أو 43.75% .

احتمال اختيار نقطة عشوائياً تقع في المنطقة المظللة في الشكل الثاني يساوي نسبة مساحة سطح المربع المظلل إلى مساحة سطح المربع الأكبر. والتي تساوي $\frac{0.4375}{1}$ أو 43.75% .

لذا فإن احتمال أن تقع نقطة عشوائياً في المنطقة المظللة في كلا المربعين هو نفسه.

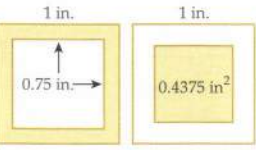
26. $\frac{1}{7}$ ؛ إجابة ممكنة: باستعمال نظرية متباينة المثلث نجد أن هناك 7 مثلثات متطابقة الضلعين أطوال أضلاعها أعداد صحيحة ومحيطها 32cm. ومن بين هذه المثلثات يوجد مثلث واحد فقط أطوال أضلاعه 10cm, 10cm, 12cm ومساحته 48cm^2 بالضبط. لذا، فإن الاحتمال يساوي $\frac{1}{7}$.

25. **تحذير:** أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائياً داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر. 14.3% تقريباً



26. **تبرير:** محيط مثلث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث أعداداً صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته 48cm^2 بالضبط؟ وضح تبريرك.

27. **مسألة مفتوحة:** مثل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة. انظر الهامش



28. **اكتب:** إذا اختبرت نقطة عشوائياً في كلٍّ من المربعين الآتين، فوضح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظللة في أيٍّ منهما.

انظر الهامش

تدريب على اختبار

31. **إجابة قصيرة:** قسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



(a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد $\frac{1}{8}$ ؟
(b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فردياً؟ $\frac{1}{2}$

29. **احتمال:** رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختبرت نقطة عشوائياً داخل المربع.

- ما احتمال أن تقع أيضاً داخل الدائرة؟ **B**
- $\frac{1}{3}$ C
 - $\frac{1}{9}$ A
 - $\frac{9}{\pi}$ D
 - $\frac{\pi}{9}$ B

30. **احتمال:** يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاويتين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائياً. فما احتمال أن تكون حمراء؟ **C**

- $\frac{1}{3}$ C
- $\frac{1}{9}$ A
- $\frac{7}{18}$ D
- $\frac{1}{6}$ B

مراجعة تراكمية

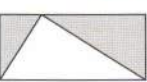
32. **حفلة:** يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-7) $\frac{1}{5}$

مثل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 7-1)

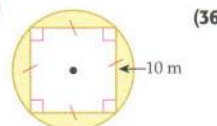
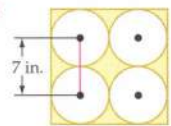
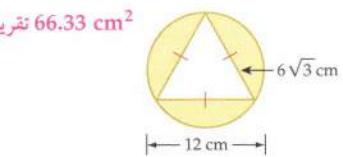
33. في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S). انظر ملحق الإجابات

34. يمكن أن تشتري أمانة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، ويلون أسود (K) أو بني (B). انظر ملحق الإجابات

35. **هندسة:** في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة) $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%



أوجد مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 7

دون دون المتوسط

ضمن المتوسط

فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16)

دون

7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال الهندسي

الاحتمالات والأطوال، الاحتمالات التي تتضمن قياسات هندسية تُسمى الاحتمالات الهندسية. أحد أنواع القياس هو الطول. انظر إلى القطعة المستقيمة RS إذا اخترت نقطة M على القطعة المستقيمة عشوائياً، فإن $P(\text{ وقوع } M \text{ على } \overline{KL}) = \frac{KL}{RS}$



اختبرت النقطة X على القطعة AD عشوائياً، أوجد احتمال وقوع X على \overline{AB} .
 نسبة الاحتمالات $P(\text{ وقوع } X \text{ على } \overline{AB}) = \frac{AB}{AD}$
 $AD = 8 + 2 + 6 = 16, AB = 8$
 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$



تساويين،
 إذا اخترت النقطة M على \overline{ZP} عشوائياً، فأوجد كلاً ما يأتي:

- 1) $P(\text{ وقوع } M \text{ على } \overline{ZQ})$
 $\frac{1}{5}, 0.2, 20\%$
- 2) $P(\text{ وقوع } M \text{ على } \overline{QR})$
 $\frac{3}{10}, 0.3, 30\%$
- 3) $P(\text{ وقوع } M \text{ على } \overline{RP})$
 $\frac{1}{2}, 0.5, 50\%$
- 4) $P(\text{ وقوع } M \text{ على } \overline{QP})$
 $\frac{4}{5}, 0.8, 80\%$
- 5) $P(\text{ احتمالات الضربية})$ يستغرق في اللون الأحمر 30 ثانية في إشارة ضوئية دورية ذبذباته واللون الأصفر 3 ثوانٍ واللون الأحمر دقيقتين و 27 ثانية، ما احتمال أن يكون لون الإشارة أحمر عند وصولك إليها؟
 $\frac{1}{4}, 0.25, 25\%$

الفصل ١٧، الاحتمالات 16

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (17)

دون

7-3 تدريبات إعادة التعليم الاحتمال الهندسي

الاحتمالات والمساحة، يمكن أن تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحات. عند تحديد الاحتمالات الهندسية المتعلقة بالأهداف في لعبة رمي السهام، افترض أن الجسم يصل إلى نقطة داخل منطقة الهدف، وأن الاحتمالات وصوله إلى النقط الواقعة داخل منطقة الهدف متساوية.

أثبتت قطعة نقود في مركزها قاعدة مبرهنة بولايو ملانوي على هيئة ثلاث دوائر متحدة في المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية (الخارجية) 4 أقدام ويزداد قطر كل دائرة تليها 4 أقدام، فما احتمال وقوع قطعة النقود في الدائرة المركزية؟
 $P(\text{ وقوع قطعة النقود في الدائرة المركزية}) = \frac{\text{مساحة الدائرة المركزية}}{\text{مساحة قاعدة البركة}} = \frac{4\pi}{36\pi} = \frac{1}{9} \approx 0.11, 11\%$ حوالي



- 1) **الهيروسة**، يوجد معطى أن بيعة في مركز هدف دائري مصمم داخل مستطيل الشكل، بعرضه 120 ياردة وارتفاعه 30 ياردة، إذا كان نصف قطر الهدف الدائري 10 ياردة، فما احتمال جبروت القطر داخل الهدف؟
 $\frac{\pi}{36} \approx 0.09$ أو 9% تقريبا
 - 2) **اصصاعات**، يراقب رجل عربة الترانزي في ساحة المدينة في أثناء تحركه بمحاذاة الأرقام، ما احتمال أن يكون عربة الترانزي في أي وقت معطى بين العددين 2 و3 اللذين يدلان على الساعات؟
 $\frac{1}{12} \approx 0.083, 8\%$ تقريبا
- اختبرت نقطة في كل من الأشكال الآتية عشوائياً، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلمة.
- 3) $\frac{2}{6}, 0.6, 67\%$
 - 4) $\frac{2}{3} \approx 0.67, 67\%$
 - 5) $\frac{2}{3} \approx 0.67, 67\%$
 - 6) $\frac{1}{9} \approx 0.11, 11\%$ تقريبا، $\frac{1}{9}$
 - 7) $\frac{1}{12} \approx 0.083, 8\%$ تقريبا، $\frac{1}{12}$
- استعمل القرص ذا المؤشر الدوراني لإيجاد كل ما يأتي:
 (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين قطاعين فإيه جءه بتدويره)
- الفصل ١٧، الاحتمالات 17

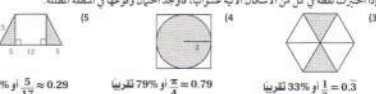
تدريبات المهارات (18)

دون

7-3 تدريبات المهارات الاحتمال الهندسي

إذا اخترت النقطة X على \overline{TP} عشوائياً، فأوجد احتمال كل من المحدثين الآتيين.
 $P(\overline{TX}) = \frac{5}{12} = 0.416 \approx 42\%$
 $P(MO \text{ على } X) = \frac{3}{4} = 0.75, 75\%$

- 1) $\frac{5}{12} = 0.416 \approx 42\%$
- 2) $\frac{3}{4} = 0.75, 75\%$
- 3) إذا اخترت نقطة في كل من الأشكال الآتية عشوائياً، فأوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلمة.
 - 4) $\frac{1}{3} = 0.33, 33\%$ تقريبا
 - 5) $\frac{2}{3} \approx 0.67, 67\%$ تقريبا
 - 6) $\frac{1}{3} = 0.33, 33\%$ تقريبا
- 6) **أعمال مكتبية**، بين الشكل المماثل مسطح مكتب طالب في البيت إذا زعم سبب على سطح المكتب، فما احتمال أن يسقط على تقري (الكتاب)؟
 $0.054 = 5.4\%$ تقريبا



7) **صفحة**، تلف ثلاثة صفحات على جاع شجرة طوله 15 قدماً، المبدأ بين الصفحتين الأولى والثاني 5 أقدام، ويبدأ الصفحتين الثالث 10 أقدام عن الثاني، إذا قفز صفحتين رابع على الجذع، فما احتمال أن يكون موضع بين الصفحتين الأول والثاني؟
 $\frac{1}{3} = 0.33, 33\%$ تقريبا

استعمل القرص ذا المؤشر الدوراني لإيجاد كل ما يأتي:
 (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين قطاعين فإيه جءه بتدويره)

- 8) **استقرار المؤشر على اللون الأصفر** $P = 30.6\%$
- 9) **استقرار المؤشر على اللون البرتقالي** $P = 19.4\%$



الفصل ١٧، الاحتمالات 18

تدريبات حل المسألة (19)

فوق

7-3 تدريبات حل المسألة الاحتمال الهندسي

1) **رمي سهام**، كل قطاع في هذا القرص له الزاوية المركزية نفسها، واحتمالات استقرار السهم على نقط القرص متساوية، فإذا زعم سبب على القرص، فما احتمال أن يستقر السهم في قطاع مظلم؟



- 2) **القرص الدوراني**، تطلب سيرة ومريم وكل طيقاً عترياً على 4 شقات من معطى في نهاية كل أسبوع عمل، لذا فإن إحصائهم مستعمل على شريطة إضافية، ربما أن سيرة تعمل طوال ساعات العمل الأسبوعية، وتعمل كل من مريم وأبلي نصف ساعات العمل الأسبوعية، فقد قررت الفتيات استعمال القرص الدوراني لتحديد من تحصل على الشريطة الإضافية، على أن تكون فرصة حصول سيرة عليها 50% وفرصة حصول كل من مريم وأبلي عليها 25%. صمم هذا القرص الدوراني.



إجابة مسئلة

الفصل ١٧، الاحتمالات 19

تدريبات حل المسألة (19)

فوق

7-3 تدريبات حل المسألة الاحتمال الهندسي

1) **رمي سهام**، كل قطاع في هذا القرص له الزاوية المركزية نفسها، واحتمالات استقرار السهم على نقط القرص متساوية، فإذا زعم سبب على القرص، فما احتمال أن يستقر السهم في قطاع مظلم؟



- 2) **القرص الدوراني**، تطلب سيرة ومريم وكل طيقاً عترياً على 4 شقات من معطى في نهاية كل أسبوع عمل، لذا فإن إحصائهم مستعمل على شريطة إضافية، ربما أن سيرة تعمل طوال ساعات العمل الأسبوعية، وتعمل كل من مريم وأبلي نصف ساعات العمل الأسبوعية، فقد قررت الفتيات استعمال القرص الدوراني لتحديد من تحصل على الشريطة الإضافية، على أن تكون فرصة حصول سيرة عليها 50% وفرصة حصول كل من مريم وأبلي عليها 25%. صمم هذا القرص الدوراني.



إجابة مسئلة

الفصل ١٧، الاحتمالات 19

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51).

المطويات

متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 7-1 إلى 7-3 من خلال مطوياتهم.

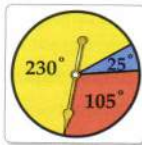
(8) سيرك: مُدَّ جبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الجبل عند أي نقطة من نقاطه متساوية.

- (a) أوجد احتمال أن ينقطع الجبل في أول 50 m منه. **16% تقريباً**
 (b) أوجد احتمال أن ينقطع الجبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين. **13% تقريباً**

اختيرت نقطة A عشوائياً على \overline{BE} . أوجد كلاً مما يأتي:



- (9) (أن تقع A على \overline{CD}) $P(\overline{CD}) = \frac{6}{13}$ (10) (أن تقع A على \overline{BD}) $P(\overline{BD}) = \frac{17}{26}$
 (11) (أن تقع A على \overline{CE}) $P(\overline{CE}) = \frac{21}{26}$ (12) (أن تقع A على \overline{DE}) $P(\overline{DE}) = \frac{9}{26}$

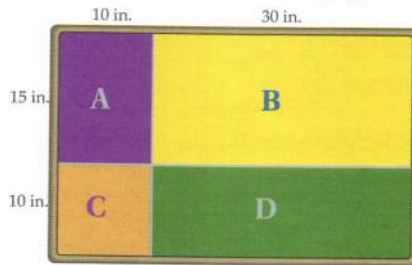


استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلِّ مما يأتي: (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى).

64% تقريباً

- (13) (استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء) P
 (14) (استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء) P **7% تقريباً**
 (15) (استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء) P **29% تقريباً**

(16) ألعاب: الهدف من لعبة رمي السهام أن يسحب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا وقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



- (a) المنطقة A؟ **15%**
 (b) المنطقة B؟ **45%**
 (c) المنطقة C؟ **10%**
 (d) المنطقة D؟ **30%**

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل 131

(1) طعام: يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

مشروبات	الحلوى	حساء	شطائر
شاي	كعك	دجاج	دجاج
قهوة	كنافة	خضراوات	لحم
عصير برتقال	عصير	عدس	لبنة
عصير تفاح	حليب		جبنة

(a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالِح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟ **120**

(b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟ **320**

(2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9, 8, ..., 4, 3, 2, دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟ **6720**

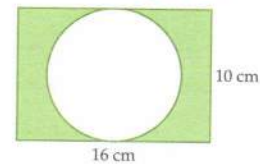
(3) ملايس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثل فضاء العينة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

(4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتِبَ على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر، ف، س، ع، و، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذه الحروف عشوائياً لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟ **$\frac{1}{720}$**

(5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟ **81**

(6) نقود: إذا ألقيتُ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟ **2⁹**

(7) إذا اختيرت نقطة عشوائياً داخل المستطيل، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟ **51% تقريباً**



مخطط المعالجة

دون المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط	المستوى 1
أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا
أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصادر الآتية:	فاختر
تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).		مراجعة الدروس من 7-1 إلى 7-3.	
www.obeikaneducation.com		تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).	
		www.obeikaneducation.com	

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة Probabilities of Independent and Dependent Events

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائياً بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفه البالغ عددهم 18 طالباً، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود و فيصل لتقديم عرضيهما أولاً يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B .
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B .

افتراض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

- (a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضاً.
إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.
- (b) في فقرة "لماذا؟" أعلاه، اختبر اسم أحد الطلبة عشوائياً دون إرجاع، ثم اختبر اسم طالب آخر.
بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العينة قد نقص واحداً؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.
- (c) سحب كرة واحدة عشوائياً من كلا صندوقين مختلفين.
احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

1A, 1B انظر الهامش

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كل مما يأتي، ووضّح إجابتك:

- (1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سُحبت بطاقة ثانية.
(1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً.

فيما سبق؟

درست حساب الاحتمالات البسيطة.

والآن؟

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

الحادثة المشروطة
conditional event

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلاً عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، فإن الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة.

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 7-5

حساب الاحتمالات البسيطة.

الدرس 7-5

ييجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

ييجاد احتمال وقوع حادثة علماً بأن حادثة أخرى قد وقعت.

ما بعد الدرس 7-5

ييجاد احتمالات الحوادث المتنافية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

- ما العوامل التي تؤثر في احتمال اختيار سعود أولاً و فيصل ثانياً؟ **إجابة ممكنة:** عدد طلاب الصف.
- إذا اختير سعود أولاً، فما احتمال أن يكون فيصل ثانياً؟ $\frac{1}{17}$
- كيف يؤثر اختيار الطالب الذي سيقدم عرضه أولاً في اختيار فيصل ثانياً؟
يتنقص عدد النواتج الممكنة للتجربة بمقدار واحد.

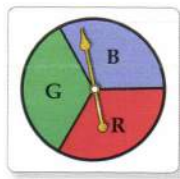
مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (133)	• تنوع التعليم، ص (133, 135)	• تنوع التعليم، ص (133, 135, 137)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

إجابات (تحقق من فهمك):

- (1A) الحادثتان مستقلتان؛ لأن البطاقة الأولى أُعيدت إلى الكيس فلن يؤثر اختيارها على اختيار البطاقة الثانية.
- (1B) الحادثتان مستقلتان؛ لأن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة رمي المكعب المرقم.

(∩) يدل هذا الرمز على وقوع الحادثتين معاً، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة: $P(A \cap B)$ احتمال وقوع L ووقوع معاً G .



إذا أُلقيت قطعة نقد وأدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\{(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)\}$. باستعمال فضاء العينة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$. لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(L) = \frac{1}{2} \quad P(G) = \frac{1}{3} \quad P(L \cap G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة

احتمالات الحوادث المستقلة



وسائل النقل، يرغب خالد وأصداؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في السيارة، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في الحافلة.

افتراض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصات التي سحبها أولاً. افترض أن B يمثل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap Y)$.

	السحب 1	السحب 2	
احتمال الحادثتين المستقلتين	$P(B \cap Y) = P(B) \cdot P(Y)$		
	$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$	$= \frac{9}{64}$	

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

تحقق من فهمك

(2A) أو 8% تقريبًا (2B) $\frac{1}{16}$ أو 6.25%

(2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6؟

(2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

مثال 1 يبين كيفية تحديد إذا كانت حادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين.

مثال 2 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين مستقلتين.

مثال 3 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين غير مستقلتين.

التقييم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

حدد إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة أو غير مستقلة. وبرر إجابتك:

(a) أُلقي مكعب مرقم ثم أُلقي مكعب آخر. الحادثان

مستقلتان؛ لأن ناتج رمي المكعب الأول لا يؤثر في احتمال ناتج رمي المكعب الثاني.

(b) سحب بطاقة من كيس يحتوي

بطاقات مرقمة من 1 إلى 20

دون إرجاع، ثم سحب بطاقة

ثانية. الحادثتان غير مستقلتين؛

لأن البطاقة الأولى لم تُعد إلى

الكيس ولا يمكن اختيارها مرة

أخرى مما يؤثر في احتمال

سحب البطاقة الثانية، إذ إن عدد

عناصر فضاء العينة نقص واحدًا.

مطاعم: ذهب سالم وجمال لتناول

الطعام في أحد المطاعم. وقد وضعوا

5 قصاصات ورقية خضراء و 6

حمراء في كيس، وقرروا أن يسحب

أحدهما قصاصة من الكيس، فإذا

كانت خضراء فإنهما سيطلبان

دجاجًا، وإذا كانت حمراء فإنهما

سيطلبان سمكًا. إذا سحب سالم

قصاصة ولم يعجبه لونها، فأعادها

وسحب قصاصة أخرى من الكيس،

فما احتمال أن يسحب قصاصة

خضراء في المرتين؟ $\frac{25}{121}$

2

دون ضمن فوق

تنويع التعليم

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يحسبوا احتمال حوادث بسيطة مستقلة؛ مثل رمي قطعة نقد باستعمال قانون الاحتمالات غير المستقلة، على أن يدركوا أن هذا القانون يعطي النتيجة نفسها التي يعطيها قانون احتمالات الحوادث المستقلة.

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات (احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معاً).

مفهوم أساسي

احتمال حادثين غير مستقلين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولاً، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات، وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل، ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قساصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قساصة، فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قساصة صفراء؟

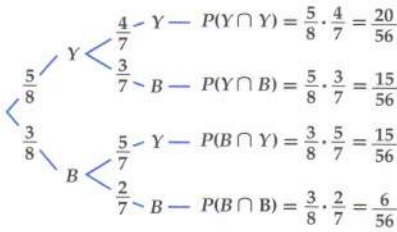
هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يرجع القساصة التي سحبها من الكيس.

$$P(Y \cap Z) = P(Y) \cdot P(Z|Y) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

بعد سحب قساصة صفراء، يبقى 7 قساصات، أربع منها صفراء

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قساصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$ ، أو 36% تقريباً.

تحقق تحقق من صحة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب على طول كل فرع من الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \quad \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و 6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟ **انظر الهامش**



مثال إضافي

مطاعم، ارجع إلى المثال الإضافي 2، افرض أن سالمًا سحب قساصة ورق من الكيس ولم يعدها، ثم سحب جمال قساصة أخرى. فما احتمال أن يسحب كل منهما قساصة خضراء؟ $\frac{2}{11}$

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط يجب ألا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

- لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \leq P(X) \leq 1$
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1.

المحتوى الرياضي

الحوادث غير المستقلة إن ترتيب

وقوع الحادثتين في الحوادث غير المستقلة أمر في غاية الأهمية. فعلى سبيل المثال، عند سحب بطاقات من كيس يحتوي بطاقات حمراء وخضراء وصفراء وببضاء، وبطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13، فإن احتمال سحب بطاقة حمراء تحمل الرقم 3 إذا كان قد سُحب قبلها بطاقة حمراء يختلف عن احتمال سحب بطاقة حمراء إذا كان قد سحب قبلها بطاقة تحمل الرقم 3، وبالرموز $P(A|B) \neq P(B|A)$.

التعليم باستعمال التقنيات

السيورة التفاعلية

اختر طالبين ليحلوا مثالاً على السيورة أمام طلبية الفصل. واطلب إلى أحدهما أن يشرح كيفية حساب احتمال حادثتين غير مستقلتين، وأن يشرح الآخر كيفية حساب احتمال حادثتين مستقلتين.

الاحتمال المشروط علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثين غير مستقلين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلاً إذا رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟



هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العينة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$ ، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$$P(5 | \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$$

الاحتمال المشروط

مثال 4 يبيّن كيفية حساب الاحتمال المشروط.

مثال إضافي

مثال على اختبار

4

قسّم مُعلم التربية الرياضية طلاب صفه وعددهم عشرون إلى فريقين. ثم طلب إلى كل طالب سحب بطاقة عشوائياً من مجموعة بطاقات مرقمة بالأعداد المتتالية من 1 إلى 20. وشكّل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعداداً فردية الفريق الأحمر، على حين شكّل الطلبة الذين سحبوا بطاقات تحمل أعداداً زوجية الفريق الأزرق.

إذا كان ماجد في الفريق الأزرق، فما احتمال أن يكون سحب البطاقة التي

تحمل العدد 10؟ B

$$\frac{9}{20} \quad C \quad \frac{1}{20} \quad A$$

$$\frac{1}{2} \quad D \quad \frac{1}{10} \quad B$$

3 التدريب

التقويم التكويني



استعمل الأسئلة 5-1 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية

لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب

مستوياتهم.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائياً حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسجن الأعداد الفردية الفريق الأول.
 - تشكل الطالبات اللواتي يسجن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.
- إذا كانت ليلي من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

$$\frac{1}{8} \quad A \quad \frac{1}{4} \quad B \quad \frac{3}{8} \quad C \quad \frac{1}{2} \quad D$$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلي من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار

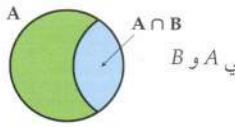
افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2. ارمس شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العينة، وواحد منها هو 2؛

لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B

تحقق من فهمك

4 عند رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟ D

$$\frac{1}{6} \quad A \quad \frac{1}{4} \quad B \quad \frac{1}{3} \quad C \quad \frac{1}{2} \quad D$$



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العينة، فإنه يمكن تبسيط شكل فن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين الناتج المشتركة في A و B

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

أضف إلى مطوبتك

الاحتمال المشروط

مفهوم أساسي

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$

الدرس 7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة 135

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط
 $P(5|A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A .

إرشادات للاختبار

أشكال فن استعمال أشكال فن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز \cap .

تنوع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلبة أن يناقشوا الفرق بين إيجاد احتمالات حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، وإيجاد الاحتمال المشروط. ويجب أن تتضمن هذه الفروق قوانين حساب احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة، حيث تستعمل لحساب احتمال وقوع حادثتين أو أكثر، على حين أن قانون الاحتمال المشروط يُستعمل فقط لحساب احتمال وقوع حادثة ما علمًا بأن حادثة أخرى قد وقعت.

إجابات:

1) سيلعب فريق المدرسة في مباراة البطولة إذا ربح مباراته في الدور قبل النهائي، وعليه فإن هاتين الحادثتين غير مستقلتين.

2) لا تؤثر نتيجة عبدالعزيز في الاختبار الأول على نتيجته في الاختبار الثاني. وعليه، فإن هاتين الحادثتين مستقلتان.

حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1، 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضّح إجابتك:

مثال 1

- (1) وصل فريق كرة السلة في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة. انظر إلى
(2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس. انظر الهامش

(3) بطاقات: يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الصندوق، ثم أُعيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟ $\frac{1}{16}$

مثال 2

$$(3) 7.4 \times 10^{-4} \approx \frac{1}{1352}$$

مثال 3

(4) وسائل نقل: يريد عبد السلام شراء سلعة ثمنها 20 ريالاً. فإذا كان في جيبه 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، فأوجد احتمال أن يسحب عشوائياً ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية. $\frac{1}{15} \approx 0.07$

مثال 4

(5) أصدقاء: يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، وتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 10 عشوائياً، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟ $\frac{1}{5} = 0.20$

تدرب وحل المسائل

حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (9-6) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

الأمثلة 1-3

- (6) رمي مكعب مرقم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي. مستقلتان، 30% أو $\frac{3}{10}$
(7) اختبار طالبين حصلوا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحداً تلو الآخر من صفّ فيه 25 طالباً، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة. غير مستقلتين، $\frac{1}{30}$ أو 0.033 تقريباً
(8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائياً دون إرجاع، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء. غير مستقلتين، $\frac{2}{7}$ أو 0.29 تقريباً
(9) ظهور العدد 5 على الوجهين العلويين لمكعبين مرقمين متمايزين ألقياً مرة واحدة. مستقلتان، $\frac{1}{36}$ أو 3% تقريباً



(10) ألعاب: إذا أدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وألقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟ 25% أو $\frac{1}{4}$

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

(11) شعارات: معتمداً على الجدول المجاور، إذا اخترت شعاران عشوائياً، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟ $\frac{20}{161}$ أو 12% تقريباً

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلبة أن يكتبوا على ورقة الفرق بين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. واطلب إليهم أن يسلموك أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 4-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14-6، 18، 32-20
ضمن المتوسط	18-7، 32-20
فوق المتوسط	30-15

(12) سُحبت كرة حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟ $\frac{4}{5}$ أو 80%

(13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعداداً صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربعاً؟ $\frac{1}{3}$

(14) رُقمت قطاعات مطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا علم أنه استقر عند عدد فردي؟ 17% تقريباً أو $\frac{1}{6}$

(15) تقنيات: يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازاً نقالاً، و 28% يمتلكون جهازاً نقالاً وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازاً نقالاً؟ 0.65 تقريباً

(16) برهان: استعمل قانون احتمال حادثين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$ انظر ملحق الإجابات

(17) تنس أرضي: إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40%، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%

(a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبين احتمالات النواتج. انظر ملحق الإجابات

(b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجاً؟ 18% أو 0.18



الربط مع الحياة

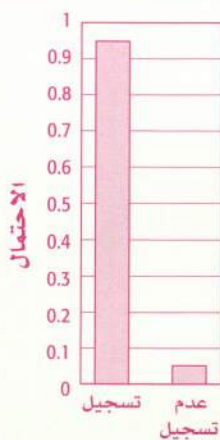
تعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأً مزدوجاً على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يخطأ خط الرمي أو يتجاوزها في محاولتين.

إجابات:

(25) إجابة ممكنة: استعمل قرصاً ذا مؤشر

دوّار مقسماً إلى قطاعين يشكّل أحدهما 10% من القرص أي زاويته المركزية 36° ، ويشكّل الآخر 90% من القرص أي زاويته المركزية 324° . ونفذ 20 محاولة وسجل النتائج في جدول تكراري.

التكرار	النواتج
19	تسجيل
1	عدم تسجيل
20	المجموع



المحاولات

احتمال أن يسجل أيمن في ضربته التالية يساوي 0.95، واحتمال ألا يسجل 0.05

مسائل مهارات التفكير العليا

للأسئلة 18-22 انظر ملحق الإجابات

(18) اكتشاف الخطأ: أراد كلٌّ من مهند جابر وإيجاد احتمال A شرط وقوع B ، حيث $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.3$ ، والحادثان A و B مستقلتان. أيهما إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

جابر
بها أننا لا نعرف $P(A \cap B)$ ،
فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A|B)$

مهند
بها أن A و B حادثتان مستقلتان،
فإن: $P(A|B) = P(A)$

(19) تحدّ: يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n ؟ وضّح إجابتك.

(20) تبرير: إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً؟ برر إجابتك.

(21) مسألة مفتوحة: صفّ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرر إجابتك.

(22) اكتب: وضّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

توسّع لقد أثار أحد برامج المسابقات التلفزيونية (جائزة خلف الباب) جدلاً واسعاً في دراسة الاحتمالات من خلال طرح السؤال الآتي: هل تبقى على اختيارك أم تُغيره؟ حيث يطلب من المتسابق في هذا البرنامج أن يختار واحداً من 3 أبواب. ثم يفتح له أحد البابين الآخرين (الذي ليس وراءه جائزة). ثم يطرح عليه السؤال: هل تريد أن تبقى على اختيارك الأصلي أم تنتقل إلى الباب الآخر المغلق؟ يمكن أن يستكشف الطلبة هذا السؤال بإجراء محاكاة أو باستعمال أداة تفاعلية عبر الإنترنت. لذا، يتعين عليهم أن يكونوا قادرين على تفسير سبب اقتراب قيمة الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري كثيراً عندما يتكرر إجراء التجربة عدداً كبيراً من المرات.

تدريب على اختبار

(24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ نور حبة حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشر. **9.8% تقريبًا**

(23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟ **A**

- $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{18}$ A
 $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{6}$ B

مراجعة تراكمية

(25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقم ألقى مرتين؟ **الدرس (7-4) انظر الهامش**

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خط بين لونين): **الدرس (7-3)**



(26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر) $P = 0.25$

(27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق) $P = 0.32$ تقريبًا

(28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر) $P = 0.07$ تقريبًا

(29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر) $P = 0.19$ تقريبًا

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: **الدرس (7-1)**

(30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى. **15**

(31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدتها. **12**

(32) رمي ثلاثة مكعبات مرقمة في آن واحد. **216**



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 7

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21)

دون

تدريبات إعادة التعليم - تمة (22)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الاحتمال الشرطي: يُستخدم الاحتمال الشرطي لإيجاد احتمالات الحوادث غير المستقلة، ويُستخدم إذا علمت معلومات إضافية عن الحادثة. والاحتمال الشرطي للحادثة B إذا عُلمَ A هو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

حيث $P(A) \neq 0$

يعمل عشرة طلاب في مطعم الجامعة، ويُسحب كل منهم بطاقة من 10 بطاقات مرقمة بالأعداد من 1 إلى 10 عشوائياً. ويقوم الطلاب الذين يسحبون البطاقات ذات الأعداد الفردية بتقديم الأطباق الرئيسية، والذين يسحبون البطاقات ذات الأعداد الزوجية يُقدِّمون الحلوى. إذا قُدِّم سائر طبق حلوى، فما احتمال أن يكون قد سحب العدد 2؟

ما إن سائرًا قد قُدِّم طبق الحلوى، فإنه يكون قد سحب عدداً زوجياً.

افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي
وأن B حادثة سحب العدد 10.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

الاحتمال الشرطي

$$P(B|A) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

الاحتمال أن يسحب سائر العدد 10 يساوي 0.2 أو 20%.

- تدريبات**
- سحبت كرة زرقاء من كيس يحتوي على 3 كرات خضراء و9 كرات زرقاء دون إرجاع عشوائياً، ما احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء؟
 - ألقي مكعب أرقام، إذا كان العدد الظاهر على الوجه العلوي أقل من 6، ما احتمال أن يكون هو العدد 2؟
 - حيد شكل رباعي، وأطراف أضلاعه أعداداً زوجية، ما احتمال أن يكون الشكل الرباعي مربعاً؟
 - فرس مُضْمَرٌ إلى 8 قطعاً متطابقة مرقمة من 1 إلى 8، وقد أُبْرِجَ الموزع. ما احتمال أن يسقط على القطع رقم 6، إذا علم أنه اسقط على قطع ذي رقم زوجي.
- الصفحة: الثاني الثاني الفصل: ١٧ - ١٢ الملاحظات: 22

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الحوادث المستقلة، وغير المستقلة: تتكون الحادثة المركبة من حادثين أو أكثر من الحوادث البسيطة، ويمكن أن تكون مستقلة أو غير مستقلة. وتكون الحوادث مستقلة إذا كان احتمال إحداهما لا يؤثر في احتمال الأخرى. وتكون الحوادث غير مستقلة إذا كانت إحداهما تؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الأخرى.

ولمَّا يأتي قانونا لعرض حساب الاحتمالات

احتمال حادثين مستقلين	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
احتمال حادثين غير مستقلين	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$

الاحتمال الشرطي: يُعرَّف احتمال وقوع الحادثة B شرط وقوع الحادثة A.

معارف

وضع معلم التربية البدنية 10 كرات خضراء و8 كرات زرقاء في كيس. إذا سحب طالب كرة خضراء، فإنه يلعب كرة سلة، وإذا سحب الطالب كرة زرقاء، فإنه يتدرب على الرطب الطويل.

افترض أن مهتمًا سحب كرة واحدة إلى الكيس، ثم سحب مرة أخرى، ما احتمال أنه سحب كرة زرقاء في المراتين؟

تكون B مثل كرة زرقاء فإن:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

احتمال الحادثين المستقلين

$$P(B|A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

لذا فإن احتمال أن يسحب معلم كرتين لونهما أزرق هو $\frac{16}{81}$ أو حوالي 20%.

- تدريبات**
- حدِّد ما إذا كانت الحوادثان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلِّ ما يأتي، ثم أوجد الاحتمال.
- سحبت بطاقة تحمل الرقم 10 من مجموعة بطاقات عددها 60 منها 15 حمراء و15 سوداء و15 زرقاء، وتُؤسَّط كل مجموعة من 1 إلى 15، ثم أُلقيت قطعة نقود وظهرت الكتابة على وجهها العلوي.
 - أبْرِجَ موزع فريش يتكون من أربعة قطعاً متطابقة مرقمة من 1 إلى 4، فاسقط على القطع 1، ثم أُلقي مكعب أرقام وظهر على وجهه العلوي 1.
 - سحبت كرة خضراء من كيس يحتوي على كرتين لونهما أزرق وخصي لونهما أحمر دون إرجاع، ثم سحبت كرة خضراء ثانية.
 - سحبت كرة خضراء من كيس يحتوي على كرتين لونهما أزرق وخصي لونهما أحمر ثم أُلقيت، ثم سحبت كرة خضراء مرة ثانية.
- الصفحة: الثاني الثاني الفصل: ١٧ - ١٢ الملاحظات: 21

تدريبات المهارات (23)

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (24)

فوق ضمن دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات حل المسألة

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

- قيادة: احتمال أن يحصل شخص ما على مخالفة سريعة هو 0.35، واحتمال أن يتوقد شخص سيارة خضراء هو 0.15. إذا أُخْبِرَ سائق عشوائي، فما احتمال أن يكون قد حصل على مخالفة سير ووقود سيارة ليست خضراء؟
- الغيب: أُبْرِجَ القرص المذْزَجُ المُقسَّم إلى 4 قطعاً متطابقة وقرعة من 1 إلى 4، وأُلقي مكعب أرقام،

ما احتمال أن يسقط مؤشر القرص على عدد زوجي، وأن يظهر عدد زوجي على وجه المكعب؟

1/4



ما احتمال أن يكون شخصين يوم الميلاد نفسه؟

تقريباً 0.000005

الصفحة: الثاني الثاني الفصل: ١٧ - ١٢ الملاحظات: 24

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-4 تدريبات المهارات

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

- ألقي مكعباً أرقاماً وظهر العدد 6 على وجه كلِّ منهما.
- يحتوي كيس على 13 بطاقة حمراء و13 سوداء و13 خضراء، وتُؤسَّط بطاقات كل لون بالأرقام من 1 إلى 13، وقد سحبت بطاقة تحمل الرقم 10 دون إرجاع، ثم سحبت بطاقة ثانية تحمل الرقم 10.
- يحتوي صندوق على 8 جوارب زرقاء و6 سوداء، سُحِبَ جورب أزرق دون إرجاع، ثم سُحِبَ جورب أزرق آخر.
- أوجد احتمال كلِّ ما يأتي:
- أُخْبِرَ كرة خضراء من كيس يحتوي على 4 كرات صفراء و3 خضراء و9 زرقاء عشوائياً دون إرجاع إذا سحبت كرة ثانية عشوائياً، فما احتمال أن تكون خضراء؟
- ألقي مكعب أرقام، إذا كان العدد الظاهر على وجه المكعب هو أحد الأعداد من 2 إلى 5، فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على وجه المكعب 4؟
- أبْرِجَ قرص يحتوي على الكون التظيف السبعة. أوجد احتمال أن يسقط المؤشر على اللون الأزرق، إذا عُلمَ أنه اسقط على أحد الألوان الثلاثة الأساسية.
- مُعْطَر، أرواح حليل أن يشتهي عصيراً من إحدى معلات العصائر. إذا كان في جيبه قطعان من فئة الريال، ولا قطع من فئة نصف الريال، فما احتمال أن يسحب أولاً قطعة من فئة نصف الريال، ثم يسحب قطعة من فئة الريال ثانية؟
- مُعْطَر، يسحب طلاب صفٍّ معلمي في حصة اللغة الإنجليزية بطاقات من بين بطاقات تُجَب عليها أسماء الطلاب لقرءة مقالاتهم عشوائياً، سحب راشد أولاً، ثم سحب صديقه حسن ثانياً، إذا كان في الصفِّ 20 طالباً، فما احتمال أن يسحب كلُّ منهما اسم الآخر؟

1/380

الصفحة: الثاني الثاني الفصل: ١٧ - ١٢ الملاحظات: 23

لماذا؟

يمكن لأي طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.



فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

والآن؟

■ أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
■ أجد احتمال متممة حادثة.

المصطلحات:

الحادثان المتنافيان
mutually exclusive events

الحادثة المتممة
complement event

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

الدرس 7-6

إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية.

إيجاد احتمال متممة حادثة.

ما بعد الدرس 7-6

تطبيق الاحتمالات في مجالات مختلفة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- لماذا سيكون سلمان سعيدًا إذا فاز محمد من الأول الثانوي؟ لأنه من الصف الأول الثانوي ويبدأ اسمه بحرف م.
- هل يمكن أن يفوز طالب يفضل كل من صالح وسلمان؟ نعم، إذا كان اسمه يد بحرف م، وهو من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي.

إجابات (تحقق من فهمك):

1A غير متنافيتين؛ إجابة ممكنة: العدد الذي يقبل القسمة على 10 يقبل القسمة على 5 أيضًا.

1B متنافيتين، إجابة ممكنة: لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة؛ إذ لا يمكن إيجاد عددين مجموعهما 6 و 7 في آن واحد.

الحوادث المتنافية لقد اختبرت في الدرس 7-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثين أو أكثر.

$$P(A \cap B)$$

يدل على تقاطع مجموعتين

$$P(A \cup B)$$

يدل على اتحاد مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثين. فإذا لم يكن وقوع الحادثين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيان**؛ أي أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

مثال 1 من واقع الحياة

تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

انتخابات: أرجع إلى المعلومات الواردة في أعلى الصفحة.

a المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.

هاتان الحادثان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.

هاتان الحادثان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

تحقق من فهمك

حدد إذا كانت الحادثان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك: **انظر الهامش**

1A اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10. **انظر الهامش**

1B الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة.

مصادر الدرس 7-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص. (143)	• تنويع التعليم، ص (143, 145)	• تنويع التعليم، ص (143, 145)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العينة لهما.

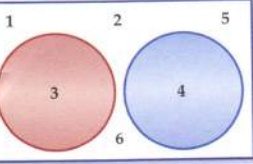
فمثلاً لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقم، سترى من أشكال
فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

بوضوح هذا المثال القانون الأول من قانوني الجمع في الاحتمالات.



الحوادث المتنافية

المثال 1 يبين كيفية تحديد إذا كانت حادثتين متنافيتين أم غير متنافيتين.

المثال 2 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين متنافيتين.

المثال 3 يبين كيفية حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

قراءة الرياضيات

(U) يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B.

مفهوم أساسي

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتين، فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة الاحتمال المتنافية

كتب، اختار موسى كتاباً من الكتب الموجودة في مكتبته المبنية في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً؟ هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً في آن واحد.

افترض أن الحادثة A1 تمثل اختيار كتاب ديني وافترض أن الحادثة A2 تمثل اختيار كتاب فيزيائي مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$

$$P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35} = \frac{10}{35} + \frac{12}{35} = \frac{22}{35}$$

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريباً.

تحقق من فهمك

2A إذا رُمي مكعبان مرقمان تمايزان مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9؟ $\frac{5}{18}$ ، أو 28% تقريباً

2B ألعاب: إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائياً من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و25 قلماً و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟ $\frac{41}{80}$ ، أو 51% تقريباً

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية مثل على

السبورة رسماً شجرياً لتوضح للطلبة

كيفية حساب احتمالات الحوادث

المتنافية. واحفظه، ثم أرسله إلى

الطلبة؛ ليكون مرجعاً لهم.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير يبين للطلبة أن الدوائر في شكل فن التي تمثل حادثتين متنافيتين ليست متداخلة، وأن الشكل الذي يمثل حادثتين غير متنافيتين سيحتوي على دوائر متداخلة.

مثالان إضافيان

بطاقات: كيس به بطاقات: 13 منها

حمراء و13 زرقاء و13 خضراء و13 بيضاء، و بطاقات كل لون مرقمة من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة واحدة من الكيس عشوائياً، فحدد ما إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين، وبرر إجابتك.

(a) بطاقة تحمل الرقم 1 أو 9

متنافيتان. لا يوجد نواتج مشتركة؛ إذ لا يمكن أن تكون البطاقة الواحدة تحمل الرقم 1 والرقم 9 في وقت واحد.

(b) بطاقة تحمل الرقم 10 أو حمراء.

غير متنافيتين، هناك ناتج مشترك بينهما هو البطاقة الحمراء التي تحمل الرقم 10.

نقود: تحتوي حصاله على

30 قطعة نقدية من فئة الريال، وعلى

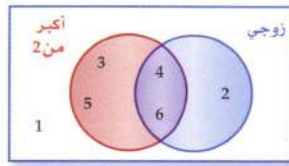
25 من فئة النصف ريال، وعلى

40 من فئة الربع ريال. فإذا سحب

سعد قطعة قطعة عشوائياً، فما

احتمال أن تكون من فئة الريال أو

النصف ريال؟ $\frac{11}{19}$ أو 0.58 تقريباً



عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال فن وجود أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5, 6. لذا فإن

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6} \quad P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 4، 6 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) \\ = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مثال إضافي

3

فن: استعمل الجدول الوارد في المثال 3 لإيجاد احتمال أن يختار إبراهيم لوحة مرسومة بالألوان المائية أو شكلاً هندسياً.

$$\frac{2}{3}، \text{ أو } 67\% \text{ تقريباً}$$

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

احتمال حادتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

بالرموز: إذا كانت الحادتان A, B غير متنافيتين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 3 من واقع الحياة

الأحداث غير المتنافية

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائياً للمشاركة في مسابقة فنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًا؟

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) \\ \text{بالتعويض} = \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30} \\ \text{بالتبسيط} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريباً.

تحقق من فهمك

3 مجموعة بطاقات عددها 52، مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأزرق، الأصفر، ورُقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 7، أو بطاقة حمراء من هذه المجموعة؟ $\frac{4}{13}$ ، أو 31% تقريباً



الربط مع الحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقديم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

احتمال الحادثة المتممة عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحادثة A . فمثلاً تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$ ، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$ ؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $P(\text{عدم الحصول على العدد 4}) = \frac{5}{6}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

مفهوم أساسي **احتمال الحادثة المتممة**

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأي حادثة A ، $P(A^c) = 1 - P(A)$

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز (A^c) .

احتمال الحادثة المتممة

مثال 4 يبين كيفية حساب احتمال حادثة متممة.

مثال 5 يبين كيفية تحديد القانون المناسب استعماله لحساب الاحتمال.

مثال 4 **الحادثة المتممة**

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائياً من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A

احتمال المتممة $P(A^c) = 1 - P(A)$

بالتعويض $= 1 - \frac{20}{300}$

بالطرح وبالتبسيط $= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$ ، أو 93% تقريباً.

تحقق من فهمك

(4) إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟ 30%

مثال إضافي

كرات: يوجد في وعاء 200 كرة صغيرة، منها 15 كرة فقط حمراء. إذا سحب خليل كرة عشوائياً من الوعاء، فما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟

$\frac{37}{40}$ ، أو 93% تقريباً

ملخص المفاهيم **قوانين الاحتمال**

نوع الحوادث	التعريف	القانون
الحدثان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A, B حادثتين مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحدثان غير المستقلين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما.	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحدثان المتنافيتان	حدثان لا توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحدثان غير المتنافيتين	حدثان توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحدثان المتتامتان	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العينة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A ، $P(A^c) = 1 - P(A)$

المحتوى الرياضي

الحادثة المتممة هناك دائماً فرصتان لأي حادثة A هما: وقوع الحادثة A ، أو عدم وقوعها A^c . ومجموع احتمالات جميع نواتج تجربة عشوائية يساوي 1 دائماً. وهذا ما يمكن ملاحظته إذا أعيدت كتابة قانون احتمال متممة حادثة على الصورة الآتية: $P(A) + P(A^c) = 1$

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط مع الحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430 هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

من المثال 5 لاحظ أن
 $P(A \cup B) = P[(A \cap B)^c]$
وبالمثل
 $P(A \cap B) = P[(A \cup B)^c]$

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81% من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تم اختيار سائقيين واحداً تلو الآخر عشوائياً من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحداً أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد $P(A \cup B)$



خطم الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تم اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)^c]$

هاتان الحادتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

$$\text{احتمال الحادتين غير المستقلتين} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \text{حل}$$

$$P(A) = \frac{81}{100} = \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99} = \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

$$\text{احتمال الحادثة المتممة} \quad P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$$

$$\text{بالتعويض} \quad = 1 - \frac{36}{55}$$

$$\text{بالطرح} \quad = \frac{19}{55}$$

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريباً.

تحقق استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي $(100 - 81)\%$ ، أو 19%

واحتمال اختيار سائقيين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن $35\% > 19\%$ ، فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

5) هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحداً تلو الآخر عشوائياً من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقال أثناء القيادة؟ **0.42 تقريباً**

مثال إضافي

5

نشاطات: تبين من مسح شمل

طالبات مدرسة ثانوية للبنات أن 36% منهن مشتركات في مسابقة حفظ القرآن الكريم. فإذا اختيرت طالبتان عشوائياً من بين 100 طالبة من هذه المدرسة، فما احتمال أن تكون واحدة منهن على الأقل غير مشتركة في المسابقة؟

$\frac{48}{55}$ ، أو 87% تقريباً

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة أن يتأملوا ملخص المفاهيم في الصفحة (144)، ثم يعبروا بكلماتهم الخاصة عن حالات استعمال كل واحد من هذه القوانين، ويكتبوا مثلاً لكل واحدة منها.

حدد إذا كانت الحادثنان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك:

مثال 1

- 1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة. غير متنافيتين؛ لأن 5 عدد فردي وأكبر من 3
- 2) اختيار سيارة أو حصان. متنافيتان؛ لأن السيارة لا تكون حصاناً ولا يكون الحصان سيارة.
- 3) حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائياً واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتاباً، أو ساعة؟ $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريباً

مثال 2

- 4) بناءً على الجدول المجاور، اختبر طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟ $\frac{11}{25}$ أو 44%

مثال 3

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضة	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

- 5) إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$ ، فما احتمال أن تخطي إصابة الهدف؟
- 6) عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحداً تلو الآخر عشوائياً من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟ 17.3%

مثال 4

مثال 5

5) احتمال أن يخطئ السهم الهدف يساوي $\frac{3}{10}$ ، أو 30%

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3

حدد إذا كانت الحادثنان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كل من الأسئلة 7-9)، ثم أوجد الاحتمال، وقرب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضرورياً:

- 7) رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين. غير متنافيتين، $\frac{10}{36}$ ، أو 27.8% تقريباً
- 8) اختيار عدد عشوائياً من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3.
- 9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة. متنافيتان. 100%

غير متنافيتين، $\frac{13}{20}$ أو 65%

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	كرة الطائرة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

- 10) رياضة: يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادي رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 14-16. ما احتمال أن يلعب مشارك كرة السلة أو أن يكون عمره 14؟ 56%

مثال 4

- 11) هدايا: أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصاً، و 6 اختاروا هاتفاً نقالاً، و 4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائياً فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟ $\frac{7}{16}$ أو 43.8% تقريباً

- أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:
- 12) عدم ظهور العدد 3 على أي من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة.

مثال 4

- 13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة. $\frac{1}{2}$ أو 50%

- 14) سحب خليل عشوائياً كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألا يسحب الكرة الحمراء؟ $\frac{24}{25}$ أو 96%

مثال 5

- 15) من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعياً تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحداً تلو الآخر عشوائياً من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعياً؟ 92%

التقويم التكويني

تعمل الأسئلة 1-6 للتأكد من فهم الطلبة.

مستوى تفهمهم. استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة معين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
19-27 ، 7-16	دون المتوسط
19-27 ، 7-17	ضمن المتوسط
17-27	فوق المتوسط

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلبة أن يذكروا الفرق بين الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية وقانون إيجاد احتمال كل منها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

18) 0.74؛ إجابة ممكنة: يوجد ثلاث

حالات يظهر فيها على مكعبين عدد أقل من أو يساوي 4، ويوجد حالة رابعة يظهر فيها على كل المكعبات الثلاثة عدد أقل من أو يساوي 4، وعليك إيجاد احتمال كل حالة من الحالات الأربع ثم جمعها.

19) غير متنافيتين، إجابة ممكنة: إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فهو متطابق الزوايا، لذا فلا يمكن أن تكون هاتان الحادثتان متنافيتين.

20) غير متنافيتين، إجابة ممكنة: العدد الحقيقي هو عدد مركب في الوقت ذاته.

21) إجابة ممكنة: إذا سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات ملونة بأحد اللونين الأحمر، والأسود. ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 10، فإن حادثة أن تحمل البطاقة المسحوبة الرقم 3 وحادثة أن تحمل الرقم 5، هما حادثتان متنافيتان. أما حادثة أن تحمل البطاقة الرقم 3 وحادثة أن تكون حمراء، فهما حادثتان غير متنافيتين.

- 16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من مجموعة عددها 100، فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟
- 17) أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 لمعرفة أي الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، وتُملت النتائج بأشكال فن. إذا اختير طالب عشوائيًا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كل مما يأتي:
- (a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة. 71.3%
- (b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولا يرغبون المشاركة في كرة السلة. 36.2%
- (c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث. 3.8%



مسائل مهارات التفكير العليا

- 18) **تحدي:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقمة متميزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟ **للأسئلة 18-22 انظر الهامش**
- تبرير:** حدد إذا كانت الحادثتان في كل مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:
- 19) اختيار مثلث متطابق الأضلاع ومثلث متطابق الزوايا.
- 20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.
- 21) **مسألة مفتوحة:** صف حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.
- 22) **اكتب:** وضح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟ **B**

- A $\frac{1}{6}$
B $\frac{2}{3}$
C $\frac{5}{6}$
D 1

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزيائته في يوم الافتتاح الهدايا المبيّنة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يريح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟ **D**

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 B 0.35 C 0.5 D 0.65

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يأتي، ثم أوجد الاحتمال: **الدرس (4-7)**

- 25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعب مرقم، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية. مستقلين، 3% تقريبًا أو $\frac{1}{36}$
- 26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة. $\frac{1}{22}$ أو 0.045 تقريبًا
- 27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقم وثلاث قطع نقد. **الدرس (1-7) 48**

الدرس 5-7 احتمالات الحوادث المتنافية 145

تنويع التعليم

توسّع اطلب إلى الطلبة أن يفكروا في مواقف عملية تمثل أنواع الاحتمالات التي درسوها، ويمثلوا الحوادث في كل منها بأشكال فن.

22) إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان متنافيتين فلا يمكن وقوعهما معًا، ولكن هذا لا يعني أنه يجب أن تقع إحداهما بالضرورة. إن مجموع احتمالات نواتج فضاء العينة كافة يساوي 1. فعلى سبيل المثال، إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتين فإن فضاء العينة يشمل: احتمال وقوع A، واحتمال وقوع B، واحتمال عدم وقوع أي

منهما، ومجموع هذه الاحتمالات الثلاثة يجب أن يساوي 1. وقد يكون مجموع احتمال وقوع A واحتمال وقوع B يساوي 1 ولكن ليس دائمًا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 7

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-5 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الجوادث المتنافية

الحوادث المتنافية: إذا لم يكن وقوع حدثين ممكنًا في الوقت نفسه، وليس لها تداخل مشترك، فإنها تسمى حدثين متنافيين. وفيما يأتي قانون الجمع في الاحتمالات:

احتمال حدثين متنافيين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
احتمال حدثين غير متنافيين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال: يوجد في خزانة مكتبة 15 رواية و20 ديوان شاعر و14 كتاب تاريخ و12 كتاب علوم. إذا أُخبر أحد الكتب من الخزانة عشوائيًا، فما احتمال اختيار كتاب في التاريخ أو العلوم؟

أفرض أن H تمثل اختيار كتاب تاريخ، وأن S تمثل اختيار كتاب علوم

$$P(H \cup S) = P(H) + P(S)$$

$$= \frac{14}{61} + \frac{12}{61}$$

$$= \frac{26}{61}$$

أو حوالي 43%.

تدوين:

حلّد ما إذا كانت الحوادث متنافيين أو غير متنافيين في كل ما يأتي، ثم أوجد الاحتمال إلى أقرب جزء من مئة:

5 حذيفة ظهور، اختيار بقاء أو بقاء من حذيفة ظهور عشوي على 15 بقاء و25 بقاء و9 سقوط و3 تعامات بطريقة عشوائية.

6 العاصي، ظهور 6 على الوجه العلوي أو ظهور عدد زوجي عند رمي مكعب أرقام.

7 جوفتر، كدّم مدرسة مديّة طالب في كل شهر، حيث يجتازها عشوائيًا من بين 9 بطاقات دعوى إلى مطاعم المظقة، أو من 8 أو أصم مديج (CD) أو من 6 أقراص مدمجة (DVD) أو من 5 بطاقات مشروبات من المركز التجاري، ما احتمال أن يجتاز الطالب CD أو DVD؟

8 جون طلابية، يتأهل على الجدول التالي، ما احتمال أن يكون أحد الطلاب في المكان الطلابية من الصف الثاني الثانوي أو في لجنة الخدمات؟

الصف	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
الخدمات	4	5	6
إعلام	3	2	2
رياضة	4	8	6
علاقات دولية	1	1	4

غير متنافية، 0.57

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، الاحتمالات: 26

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-5 تدريبات إعادة التعليم

احتمالات الجوادث المتنافية

احتمال الجوادث المتنافيين، تتضمن مشكلة الحادثة A جمع التوزيع العشري غير المتكتملة في الحادثة A، احتمال مشكلة حادّ ما $P(A) = 1 - P(A)$

مثال: توجد 100 صورة فوتوغرافية في معرض مدرسة، 3 صور منها لياسر. سيتمّ اختيار صورة واحدة عشوائيًا لعرضها في مكتب مدير المنطقة التعليمية، فما احتمال ألا يتمّ اختيار في واحد من صور ياسر؟

أفرض أن A تمثل اختيار صورة واحدة من صور ياسر. بعد ذلك أوجد احتمال مشكلة A.

$$P(A) = 1 - P(\text{ليس } A)$$

احتمال عدم اختيار صورة لياسر = $1 - \frac{3}{100}$

النسبة = $\frac{97}{100}$

أو 97%.

احتمال ألا يتمّ اختيار إحدى صور ياسر يساوي 97%.

تدوين:

أوجد احتمال كل حادّ ما يأتي:

1 إذا كان احتمال أن تعلب إيثك والذئب أن تلتقط غرغزك اليوم بعد عودتك من المدرسة يساوي $\frac{1}{3}$ ، فما احتمال ألا تعلب إيثك ذلك؟

0.2

2 يوجد في صندوق 100 بطاقة، 20 بطاقة منها حراء، و70 سوداء، و10 خضراء، إذا سُحبت بطاقة واحدة من الصندوق عشوائيًا، فما احتمال ألا يكون خضراء؟

0.90

3 عند إلقاء قطعة نقود، ما احتمال عدم ظهور كتابة على وجهها العلوي؟

0.5

4 ما احتمال عدم ظهور الرقم 6 عند إلقاء مكعبين مرقمين من 1 إلى 16؟

0.69 تقريبًا

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، الاحتمالات: 27

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-5 تدريبات المهارات

احتمالات الجوادث المتنافية

حلّد ما إذا كانت الاحتمالات متنافيين أو غير متنافيين في كل ما يأتي، ثم أوجد الاحتمال في صورة نسبة مئوية إلى أقرب قيمة. إذا كان ذلك ضروريًا.

11 رمي مكعبين مرقمين وظهر عددين متماثلين على وجهي المكعبين أو مجموع العددين 6.

غير متنافية، $\frac{5}{18}$ أو 27.8% تقريبًا

12 سحب بطاقة تحمل الرقم 2 أو لونها أسود من كيسي فيه 13 بطاقة حمراء و13 سوداء و13 زرقاء و13 خضراء وطاقات من كل لون مرقمة من 1 إلى 13.

غير متنافية، $\frac{4}{13}$ أو 30.8% تقريبًا

13 رمي مكعبي الأرقام وظهر عددين على الوجهين مجموعهما 8 أو 12.

متنافية، $\frac{1}{6}$ أو 16.7% تقريبًا

أوجد احتمال كل حادّ ما يأتي:

14 إذا كانت فرصة اختيار طالب رئيسًا للجنة طلابية سنويًا 1 من 200، فما احتمال عدم اختياره؟

$\frac{199}{200} = 0.995$

15 إذا كانت فرصة تسجيل هدف من رمية جزاء 40%، فما احتمال ألا تسجل هدفًا من الرمية الجزاء؟

0.6 أو 60%

16 إذا أُفرد مؤثر فرس مزارق فتمّ شقّ إلى 6 مناطق متطابقة ومرقمة من 1 إلى 6، فما احتمال ألا يستقر المؤثر على الرقم 5؟

$\frac{5}{6}$ أو 83.3% تقريبًا

17 في وعاء 250 قطعة نقود عشرة منها من فئة ربع الريال، والباقي من فئة 10 مئلات، إذا سُحبت قطعة نقود واحدة، فما احتمال ألا تكون من فئة ربع الريال؟

$\frac{240}{250} = 0.96$

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، الاحتمالات: 28

تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-5 تدريبات حل المسألة

احتمالات الجوادث المتنافية

1 تطعم: يتبن الجدول الأتي أعداد الطلبة المطّوعين للعمل، وصنّفهم في مدرسة ما.

الصف	العمل داخل المدرسة	العمل خارج المدرسة
الأول الثانوي	25	20
الثاني الثانوي	30	20

2 تفويذ: تفويذ الصيفية، يتبن الجدول الأتي أنواع النشاطات والهوايات، وعدد المشاركين الذين تتراوح أعمارهم بين 7-9 سنوات.

نوع	المرم	الفتاة	الذكور
7	7	40	35
8	8	30	21
9	8	20	44

3 جامعات: يوجد 100 طالب في الصف الثالث الثانوي في مدرسة، 89% منهم يخططون للدراسة في جامعات ريفية. إذا أُخبر طالبان من طلاب الصف عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يخطط للدراسة في جامعة ريفية؟

0.21

4 تصميم: صمّمت سوسن تصميمًا لها لعبة في الرياضيات لطلاب الصف الثالث، للتدريب على الحقائق الأساسية. ففازت أن يُستعمل في اللعبة مكعبًا أرقام، وعلى اللاعبين أن يجدا مجموع العددين الظاهرين على وجهي المكعبين. وقد كُرّمت سوسن تصميمها بالجدول الأتي للمساعدة على إعداد الاحتمالات.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

يُفني كل لاعب المكعبين عندما يأتي دور.

6 ما احتمال الحصول على رقمين متساويين أو رقمين مجموعهما 17؟

0.333

6 ما احتمال الحصول على رقمين مجموعهما عدد زوجي أو عدم ظهور الرقم 5؟

0.7

الصف: الثاني الثانوي الفصل: ٧، الاحتمالات: 29

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات كمرجع يتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

عزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات لمقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. يمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت و على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العينة (الدرس 1-7)

- فضاء العينة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العينة باستعمال قائمة منظمة أو جدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-7)

- الترتيب مهم في التباديل.

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-7)

- إذا احتوت المنطقة A والمنطقة B واختبرت نقطة E عشوائياً من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 4-7 و 5-7)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن $P(A') = 1 - P(A)$
- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B ، فإن الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكناً في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

المطويات

منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطويتك.

المفردات

فضاء العينة ص 112	الحادثة المركبة ص 132
الرسم الشجري ص 112	الحوادث المستقلة ص 132
تجربة ذات مرحلتين ص 113	الحوادث غير المستقلة ص 132
تجربة متعددة المراحل ص 113	الاحتمال المشروط ص 134
مبدأ العد الأساسي ص 114	شجرة الاحتمال ص 134
التباديل ص 118	الحادثة المشروطة ص 135
المضروب ص 118	الحوادث المتنافية ص 139
التباديل الدائرية ص 120	الحادثة المتممة ص 142
التوافيق ص 121	
الاحتمال الهندسي ص 125	

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

- 1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة. **صحيحة**
- 2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم. **خاطئة، التوافيق**
- 3) تحديد ترتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية. **صحيحة**
- 4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضاً مثال على الحوادث غير المستقلة. **خاطئة، المستقلة**
- 5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياساً هندسياً مثل الطول أو المساحة. **صحيحة**
- 6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب. **صحيحة**
- 7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العينة. **صحيحة**
- 8) ألقى يوسف قطعة نقد 200 مرة لتكوين شجرة احتمال للتجربة. **خاطئة، محاكاة**
- 9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية. **خاطئة، غير المستقلة**

منظم أفكار

المطويات

وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

معالجة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ص (46)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

7-1 تمثيل فضاء العينة ص 117-112

مثال 1

ألقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة. أفرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

- (10) **فشار:** يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أو حجم وسط (M) أو حجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثل فضاء العينة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري. **انظر الهامش**
- (11) **أحذية:** يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟ **18**

7-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 124-118

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟ بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

قانون التباديل الدائرية $(n - 1)!$

$n = 4$ $(4 - 1)!$

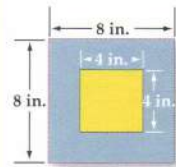
بالتبسيط $= 3! = 6$

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

- (12) **مطعم:** ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أي طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد الترتيبات الممكنة؟ **4**
- (13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟ **$\frac{1}{120}$**
- (14) **مسابقات:** بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟ **35960**

7-3 الاحتمال الهندسي ص 130-125

مثال 3



لعبة رمي الكرة:

(a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $4 \cdot 4 = 16$

$\frac{16}{64} = 25\%$ (أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء) P

(b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48$

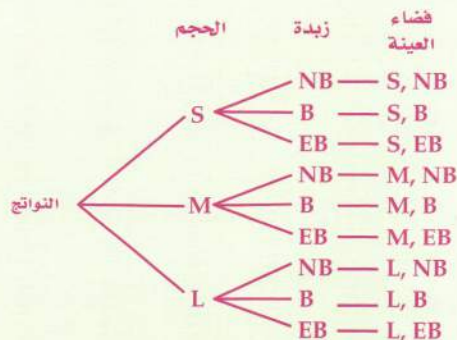
$\frac{48}{64} = 75\%$ (ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء) P



- (15) **زراعة:** الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كل مما يأتي:
- (a) ما المساحة التقريبية لحقل فول الصويا والذرة معًا؟ **55**
- (b) إذا اختر أحد المربعات عشوائيًا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة. **16% تقريبًا أو 0.16 تقريبًا**
- (16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بُعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر. **$\frac{2}{9}$ أو 22% تقريبًا**

إجابة:

(10) $S, NB; S, B; S, EB; M, NB; M, B; M, EB; L, NB; L, LB; L, EB$



الحجم	دون زبدة	مع زبدة	زبدة إضافية
صغير S	S, NB	S, B	S, EB
متوسط M	M, NB	M, B	M, EB
كبير L	L, NB	L, B	L, EB

7-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 132-138

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} P(\text{زرقاء/حمراء}) &= P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{حمراء وزرقاء}) \\ &= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{6}{55} \approx 16.46\% \end{aligned}$$

(17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟ $\frac{2}{7}$

(18) أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟ **0.52 تقريبًا**

7-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 139-145

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5.

$$\begin{aligned} P(\text{متساويان}) &= P(\text{المجموع 5}) + P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) \\ &= \frac{4}{36} + \frac{6}{36} \\ &= \frac{5}{18} \approx 27.8\% \end{aligned}$$

(19) رُمي مكعبان مرقمان متميزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟ $\frac{2}{9}$

(20) سُحبت بطاقة من مجموعة البطاقات الواردة في السؤال 20، ما احتمال أن تحمل الرقم 10 أو أن يكون لونها أحمر؟ $\frac{4}{13}$

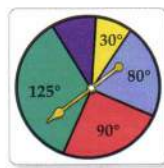
(21) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا. $\frac{11}{20}$

(a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟
(b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟ $\frac{19}{40}$

(9) أعداد: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية $7, 7, 7, 2, 2, 2, 6$ هو $\frac{1}{140}$ ؟ 6222777؟

(10) مسابقات: اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟ $\frac{1}{455}$

(11) حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و5 برتقالية مع الإرجاع. مستقلتين، $\frac{1}{9}$



استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خط تُعاد التجربة).

9.7%

(12) استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

(13) استقرار المؤشر على اللون الأحمر) P 25%

(14) استقرار المؤشر على لون غير الأصفر) P 91.7%

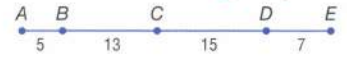
حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل مما يأتي، وبرر إجابتك: للأسئلة 13-15 انظر الهامش

(15) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

(16) رمي مكعبين مرقمين متميزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

(17) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على \overline{AE} . فأوجد كلاً مما يأتي: للسؤالين 1, 2 انظر الهامش



(1) (أن تقع X على \overline{AC}) P (2) (أن تقع X على \overline{CD}) P

(3) سباحة: يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟ 362880

(4) سفر: يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟ 24

مثل فضاء العينة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

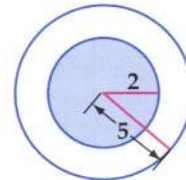
(5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع. انظر ملحق الإجابات

(6) أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

انظر ملحق الإجابات

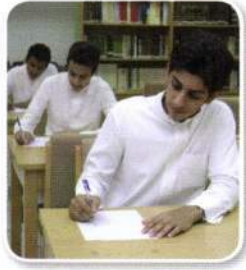
(7) كتابة: بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟ 60

(8) تصويب: يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظلمة؟ 16%



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،	إذا
أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:	فاختر
الدروس: 7-6, 7-5, 7-4, 7-3, 7-2, 7-1,		تدريبات إعادة التعليم،	
تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26)	
ص (8, 13, 18, 23, 28)			
مشروع الفصل، ص (110)			
www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com	



تنظيم البيانات

تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار معياري. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال فن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق و طرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظّم البيانات.

- كَوّن جدولاً، أو قائمة، أو تمثيلاً بيانياً، أو أشكال فن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكناً.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحديد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافياً فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالباً يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معاً. إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

$$\frac{7}{12} \text{ D}$$

$$\frac{5}{18} \text{ C}$$

$$\frac{2}{5} \text{ B}$$

$$\frac{9}{16} \text{ A}$$

1 التركيز

الهدف تنظيم البيانات للمساعدة على تحليلها وحل المسائل.

2 التدريس

سئلة التعزيز

سأل:

- ما هي بعض الطرائق التي تُعطى بها البيانات التي تستوجب التنظيم؟
- إجابة ممكنة: نتائج إحصائية معينة.
- هل تعتقد أن هناك طرائق أخرى مختلفة لتنظيم البيانات؟ نعم
- كيف يمكن أن تساعدك عملية تنظيم البيانات على حل المسألة في رأيك؟
- إجابة ممكنة: عملية تنظيم البيانات تسهّل قراءتها وتحليلها وتحديد المطلوب.

مثال إضافي

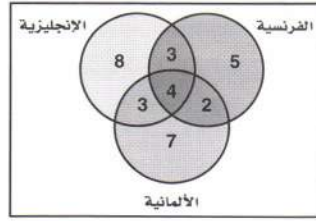
مثال على اختبار معياري:

يوجد من بين طلاب صف عبد الله الذين يملكون طيورًا في منازلهم 13 طالبًا لديهم كناري و 9 لديهم ببغاوات و 7 لديهم بلابل. كما أن هناك 6 لديهم طيور كناري وببغاء معًا و 5 لديهم كناري وبلابل و 3 لديهم ببغاوات وبلابل، وطالبان اثنان لديهما الأنواع الثلاثة من هذه الطيور. إذا اختير أحد هؤلاء الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون لديه ببغاء أو بلبل وليس لديه كناري؟ B

- A $\frac{1}{17}$
B $\frac{4}{17}$
C $\frac{6}{17}$
D $\frac{11}{17}$

3 التقييم

استعمل التمارين 1-4؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.



اقرأ المسألة بتمعن تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال فن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذ تتمكن من حلها.

الخطوة 1 ارسم ثلاث دوائر تمثل كل منها لغة.

الخطوة 2 ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3 املا القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلاً تعلم أن 18 طالبًا

يتعلمون الإنجليزية، و 14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.

$$14 - 3 - 4 - 2 = 5$$

$$18 - 8 - 3 - 4 = 3$$

الخطوة 4 حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًا يتعلم

الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال

فن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم:

$$8 + 3 + 7 = 18$$

الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، ثم نظم البيانات لحل المسألة.

1 لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تديلاً عشوائيًا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟ B

- A $\frac{3}{50}$
B $\frac{1}{24}$
C $\frac{1}{12}$
D $\frac{1}{4}$

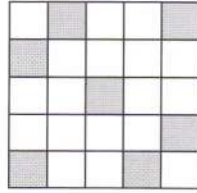
2 يبين الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟ D

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

- A $\frac{4}{21}$
B $\frac{2}{25}$
C $\frac{5}{17}$
D $\frac{13}{25}$

3 اختيرت نقطة واحدة عشوائيًا في

الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظللة. C



- A 0.22
B 0.25
C 0.28
D 0.32

4 تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من

الصف الأول الثانوي، و 8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و 9 من

الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا

في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و 6 النشاط

الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي

و 5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي

النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير

طالب واحد عشوائيًا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف

الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟ C

- A $\frac{1}{5}$
B $\frac{4}{18}$
C $\frac{5}{9}$
D $\frac{2}{3}$

اختيار من متعدد

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

A (1) اعتبر مساحة المنطقة المظللة 4.
B أوجد مساحة منطقة مظللة واحدة فقط.
C أوجد مساحة منطقتين مظللتين فقط.
D الإجابة الصحيحة.

A (2) كتب عدد الأرقام المعطاة.
B الإجابة الصحيحة.
C أوجد عدد الأعداد المختلفة المكوّنة من رقمين أو من 3 أرقام.
D كرر استعمال الرقم الواحد أكثر من مرة.

A (3) أوجد $P(A \text{ و } B)$ بدلا من $P(A \text{ أو } B)$.
B أوجد $P(A \text{ أو } B)$ ، وأخطأ في جمع الكسور.
C الإجابة صحيحة.
D اعتبرهما حادثتين مستقلتين، وأوجد $P(A \text{ و } B)$.

A (4) الإجابة الصحيحة.
B ضرب عدد الحدود في الحد الأول.
C جمع الحدّين الأول والأخير.
D أوجد قيمة الحد الأول فقط.

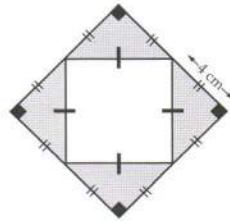
A (5) أخطأ في الإشارة.
B الإجابة الصحيحة.
C أخطأ في تحليل المقدار $4x^2 - 14x + 6$ وفي الإشارة.
D أخطأ في تحليل المقدار $4x^2 - 14x + 6$.

A (6) اعتبر احتمال وقوع الحادثة مساوياً لاحتمال وقوع متممها.
B الإجابة الصحيحة.
C اعتبر احتمال الحادثة المتممة مساوياً لحاصل ضرب احتمال الحادثة في احتمال متممها.

D استعمل القانون $P(A^c) = 1 - P(A)$ بشكل معكوس.

A (7) أخطأ في تبسيط الكسر.
B اعتبر أن عدد عناصر الحادثة 2 وعدد عناصر فضاء العينة 18 وأوجد ناتج قسمتهما.
C الإجابة الصحيحة.
D أوجد احتمال سحب عينة واحدة وتكون من فصيلة الدم AB.

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:



(1) اخترت نقطة عشوائياً في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة؟ D

- A 0.0625
B 0.125
C 0.25
D 0.5

(2) كم عدداً مكوناً من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 1, 2, 6 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟ B

- A 3
B 6
C 12
D 27

(3) إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ ، فما قيمة $P(A \text{ أو } B)$ ؟ C

- A 0
B $\frac{2}{5}$
C $\frac{5}{6}$
D $\frac{1}{6}$

(4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي: B

- A -11
B 11
C -1
D 1

(5) يكتب المقدار: $\frac{x-1}{4x^2-14x+6} - \frac{5}{6x-18}$ B

في أبسط صورة على النحو:

- A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$
B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$
C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$
D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

(6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان

$P(A) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة؟ A

- A 0.8
B 0.2
C 0.16
D -0.2

(7) سحبت عينتان عشوائياً واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق

يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A، و3 عينات من فصيلة الدم B، و6 عينات من فصيلة الدم AB، و5 عينات من فصيلة الدم O، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟ C

- A $\frac{1}{51}$
B $\frac{1}{9}$
C $\frac{5}{51}$
D $\frac{1}{3}$

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

(12a) مستقلتان؛ لا تؤثر نتيجة السحب الأول على السحب الثاني؛ لأن البطاقة المسحوبة تعاد إلى الحقيبة بعد كل عملية سحب.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل الثامن تعطي الأسئلة الواردة في صفحة (155) واجباً منزلياً للطلبة؛ لتقويم مدى امتلاكهم للمتطلبات السابقة للفصل 8.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء و 6 بطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بيّنة و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائياً وُسجّل اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

انظر الهامش

- (a) هل الحادثان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضح إجابتك.
(b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟ 0.09
(c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بيّنة؟ 0.05

إجابة قصيرة

أجب عن كلّ ممّا يأتي:

(8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحباً يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالاً؟

دلال: نعم، رزقني الله طفلين.

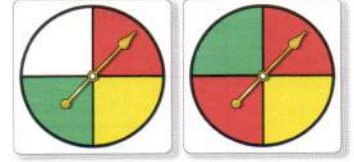
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟

دلال: نعم.

اعتماداً على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟ $\frac{1}{3}$

(9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟
 $64a^6 + 4a^2 + 2$

(10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علماً بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما. $\frac{1}{8}$



(11) حدّد كلّاً من مجال الدالة $f(x) = [x] - 5$ ومداهما؟

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

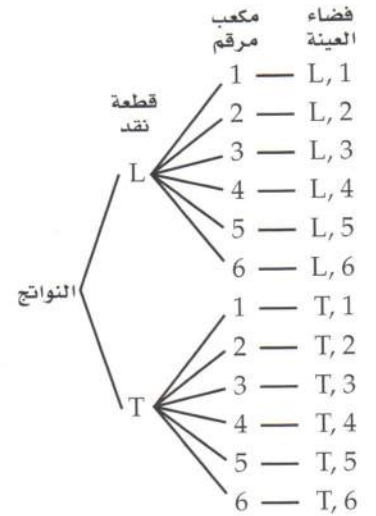
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

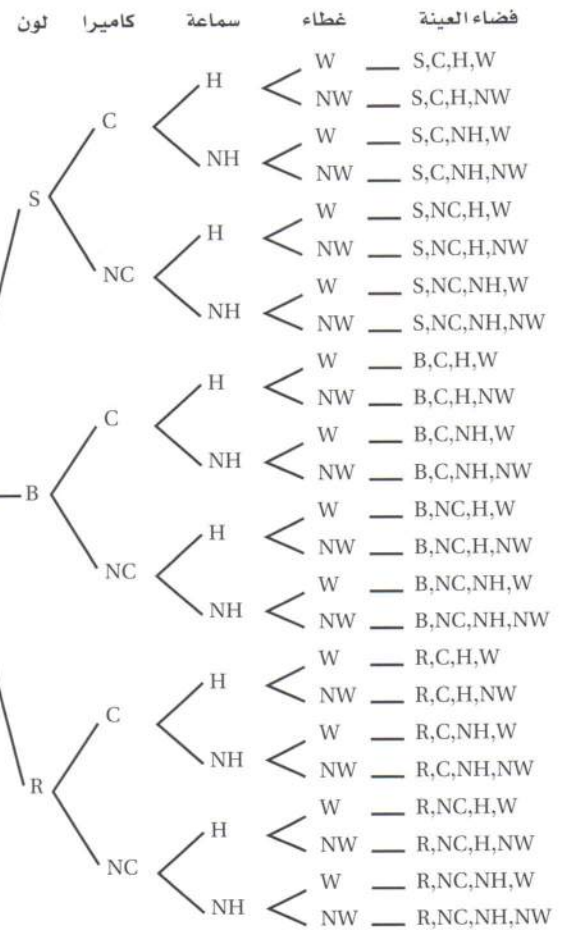
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...
7-4	1-3	7-4	3-5	7-4	7-4	7-5	5-2	6-2	7-5	7-1	7-3	فعد إلى الدرس ...

L, 1; L, 2; L, 3; L, 4; L, 5; L, 6; (1)
T, 1; T, 2; T, 3; T, 4; T, 5; T, 6

النواتج	1	2	3	4	5	6
شعار (L)	L, 1	L, 2	L, 3	L, 4	L, 5	L, 6
كتابة (T)	T, 1	T, 2	T, 3	T, 4	T, 5	T, 6

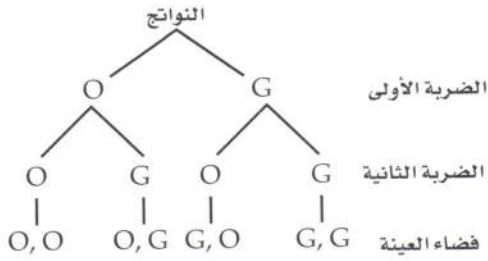


(2)



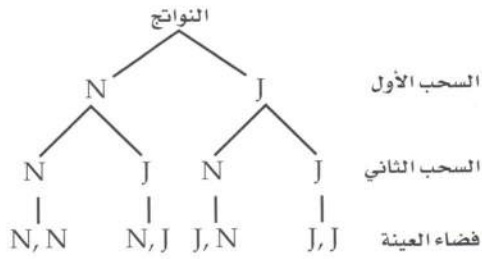
G, G O, G (1)
G, O O, O

النواتج	تسجيل (G)	عدم تسجيل (O)
تسجيل (G)	G, G	G, O
عدم تسجيل (O)	O, G	O, O

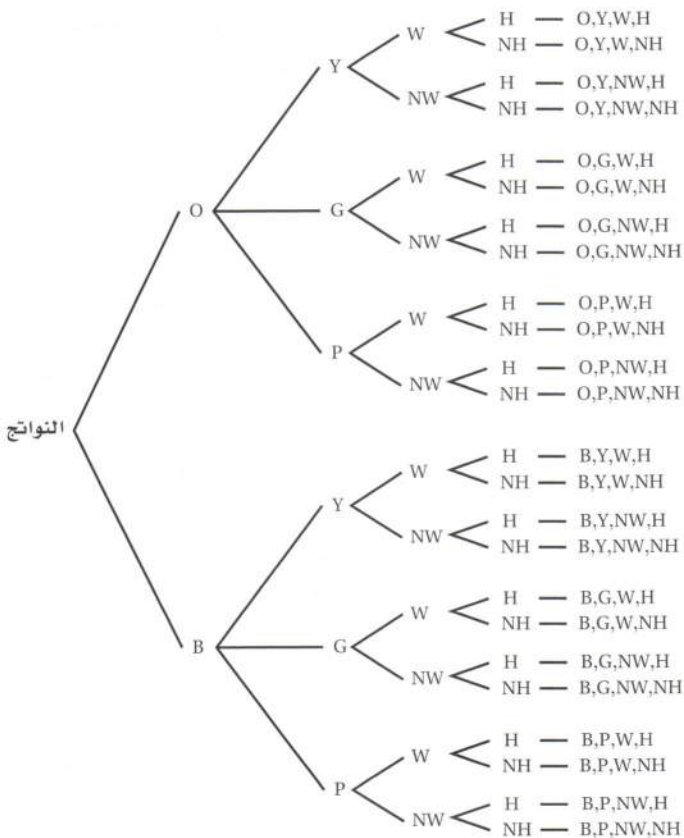


J, J N, N (2)
J, N N, J

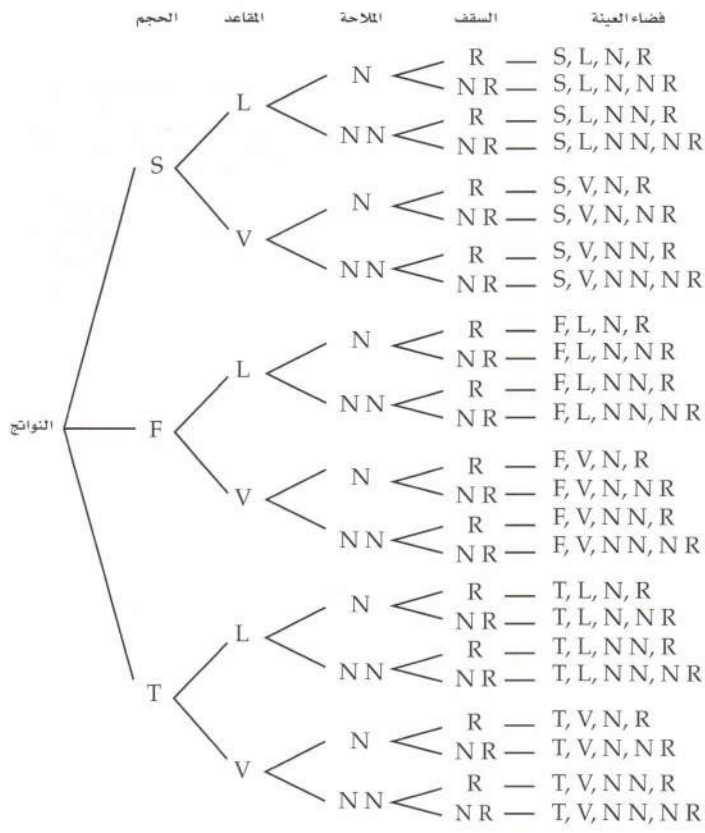
النواتج	عصير (J)	دفتر (N)
عصير (J)	J, J	J, N
دفتر (N)	N, J	N, N



(3) فضاء العينة عقد ساعة بلوزة تنورة

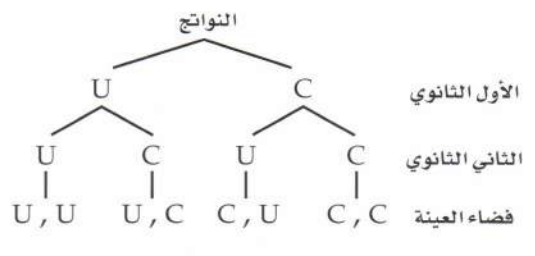


(9)



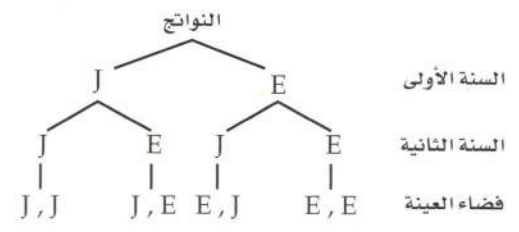
C, C C, U (5)
U, U U, C

الجامعة (U)	المركز (C)	النواتج
C, U	C, C	المركز (C)
U, U	U, C	الجامعة (U)



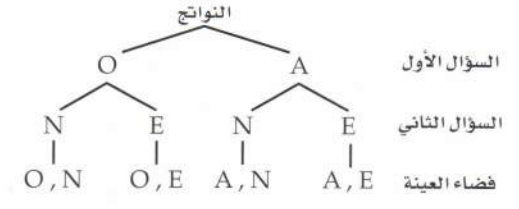
E, J E, E (6)
J, E J, J

الأردن (J)	مصر (E)	النواتج
E, J	E, E	مصر (E)
J, J	J, E	الأردن (J)



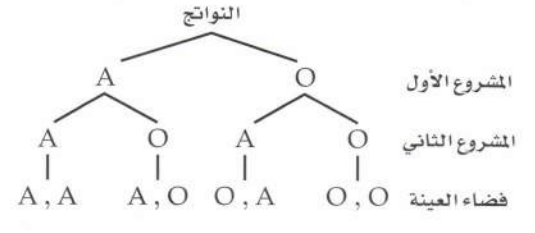
E, A E, O (7)
N, A N, O

مختلف الأضلاع (N)	متطابق الضلعين (E)	النواتج
A, N	A, E	حاد الزوايا (A)
O, N	O, E	منفرج الزاوية (O)

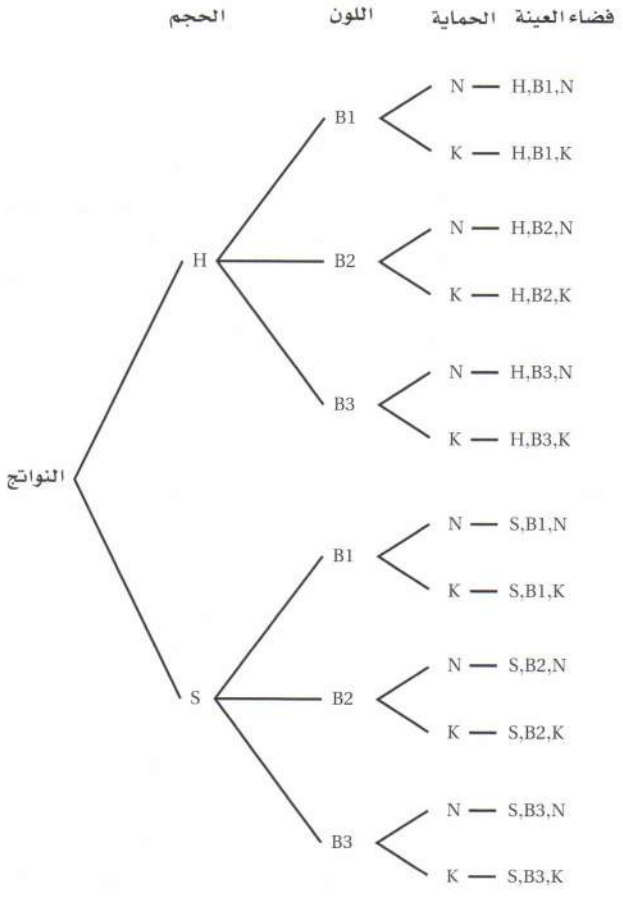


O, O A, A (8)
A, O O, A

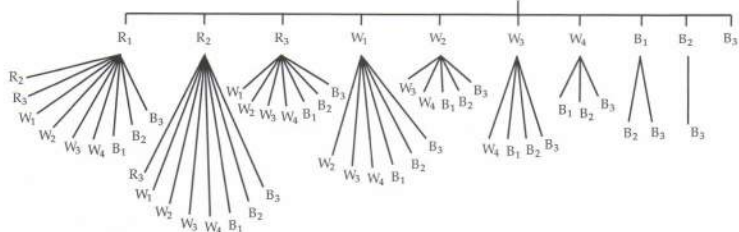
مائية (A)	زيتية (O)	النواتج
O, A	O, O	زيتية (O)
A, A	A, O	مائية (A)



(10)



النواتج (عددها 45)



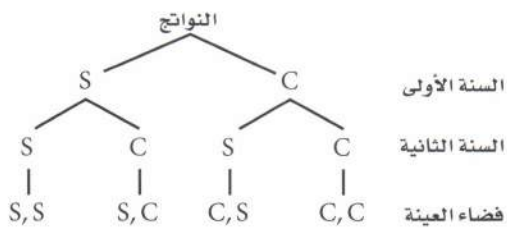
النواتج	معين (H)	مربع (S)
متوازي أضلاع (P)	P, H	P, S
مستطيل (R)	R, H	R, S
مربع (S)	S, H	S, S
شبه منحرف (T)	T, H	T, S
معين (H)	H, H	H, S

الدرس 7-3 ، ص 130

C, C S, S (33)

S, C C, S

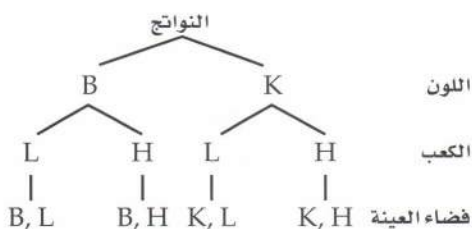
النواتج	نشاط ثقافي (C)	نشاط علمي (S)
نشاط ثقافي (C)	C, C	S, C
نشاط علمي (S)	C, S	S, S



K, H B, H (34)

K, L B, L

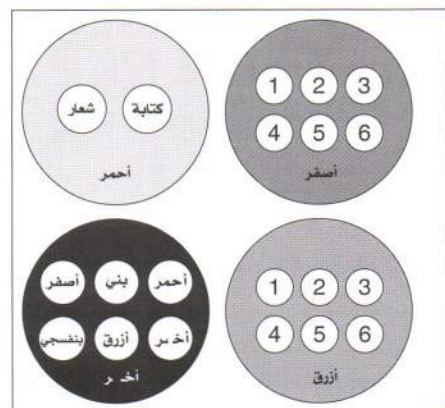
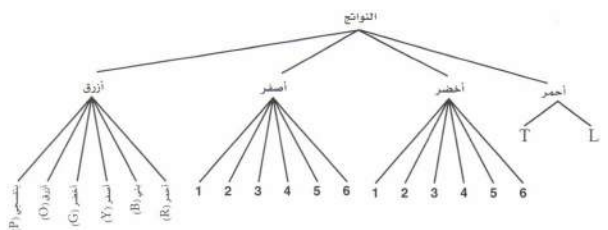
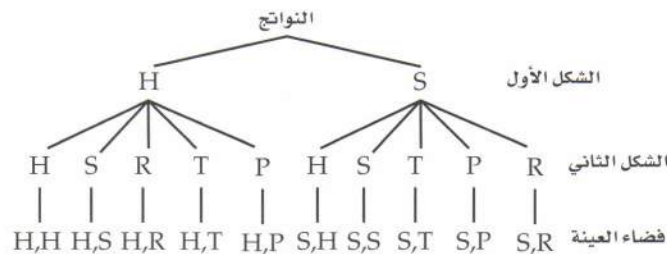
النواتج	كعب مرتفع (H)	كعب منخفض (L)
أسود (K)	K, H	K, L
بني (B)	B, H	B, L



الدرس 7-2 ، ص 124

(17) صحيحة أحياناً؛ إجابة ممكنة: فمثلاً العبارة صحيحة عندما $r = 1$.

(19) إجابة ممكنة: يحتوي صندوق سبع كرات متماثلة، ألوانها: حمراء، برتقالية، صفراء، خضراء، زرقاء، سوداء، بيضاء. إذا سحبنا ثلاث كرات معاً عشوائياً، فاحتمال ظهور الكرات الحمراء والبيضاء والسوداء يمكن حسابه باستعمال التوافق.



(19) 7؛ إجابة ممكنة: احتمال سحب العنصر A يساوي $\frac{1}{n}$ ، واحتمال

سحب العنصر B إذا لم يعد العنصر A يساوي $\frac{1}{n-1}$.

وبما أن احتمال الحادثتين معاً يساوي 2.4%، فإن

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{5}{100}$$

والتحقق نجد أن $n = 5$.

(20) صحيحة دائماً؛ إجابة ممكنة: كل من $P(A \text{ و } B)$ ، يساوي

نتاج ضرب $P(A)$ ، $P(B)$ ؛ لأنهما حادثتان مستقلتان، فاحتمال الحادثة الثانية لا يتغير تبعاً لنتائج الحادثة الأولى.

(21) إجابة ممكنة: رمي قطعة نقد مرتين تمثل حادثتين مستقلتين. لأن

احتمال ظهور شعار أو كتابة في الرمية الثانية لا يتغير تبعاً لنتيجة الرمية الأولى، على حين أن سحب كرتين من وعاء يحتوي كرات ملونة دون إرجاع الكرة الأولى يمثل حادثتين غير مستقلتين، إذ يتغير احتمال أن تكون الكرة الثانية من لون معين تبعاً للون الكرة الأولى.

(22) تبين شجرة الاحتمال جميع النواتج الممكنة للحادثة المركبة التي تظهر

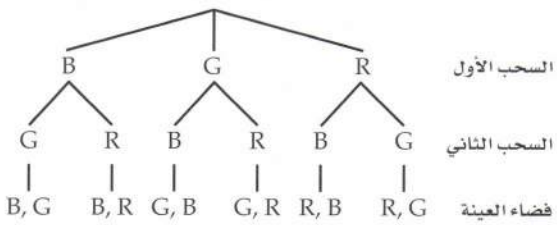
في فضاء العينة. واحتمال كل ناتج هو نسبة هذا الناتج من فضاء العينة. وبما أن مجموع احتمالات هذه النواتج يساوي مجموع نسب هذه النواتج من فضاء العينة فهي تساوي عدد عناصر فضاء العينة منسوباً إلى عدد عناصر فضاء العينة نفسه وهذا يساوي 1.

اختبار الفصل ، ص 151

(5) B,G ; B,R ; G,B ; G,R ; R,B ; R,G

(B)	(G)	(R)	النواتج
R, B	R, G		(R)
G, B		G, R	(G)
	B, G	B, R	(B)

النواتج



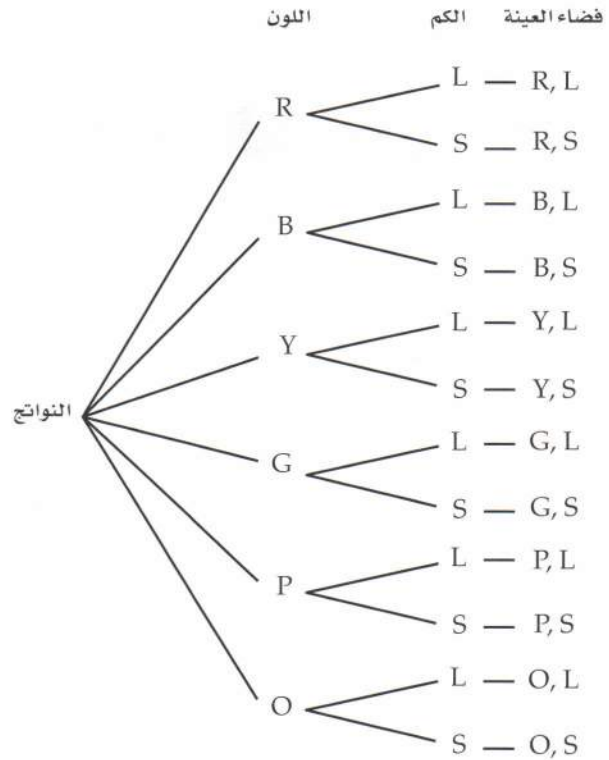
(6) M, M ; M, C ; C, M ; C, C

(C)	لحم (M)	النواتج
M, C	M, M	لحم (M)
C, C	C, M	جبن (C)

(3) O, L ; G, L ; G, S ; P, L ; P, S ; Y, L ; Y, S ; B, L ; B, S ; R, L ; R, S

O, S

النواتج	أحمر (R)	أزرق (B)	أصفر (Y)	أخضر (G)	زهري (P)	برتقالي (O)
كم طويل (L)	R, L	B, L	Y, L	G, L	P, L	O, L
كم قصير (S)	R, S	B, S	Y, S	G, S	P, S	O, S

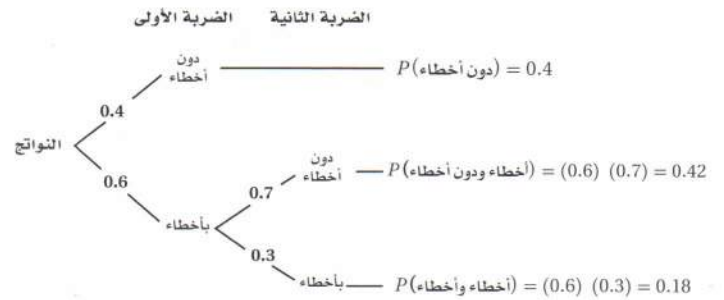


الدرس 4-7 ، ص 137, 138

قانون إيجاد $P(A \text{ و } B)$ $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (16)

بقسمة الطرفين على $P(A)$ $\frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)} = P(B|A)$

(17a)

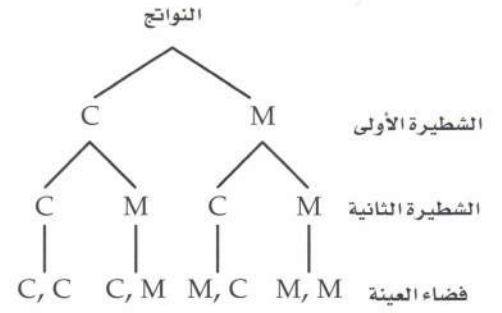


(18) مهند؛ بما أن الحادثتين مستقلتان فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$.

وبالتعويض عن $P(A \text{ و } B)$ في قانون الاحتمال المشروط:

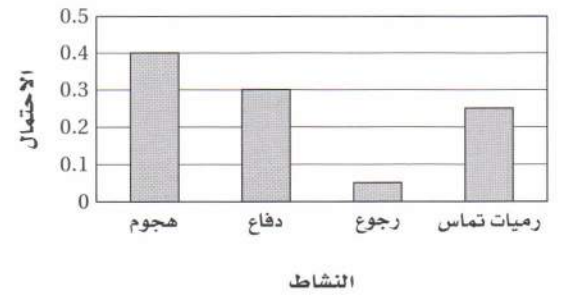
$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ فإن}$$



(15) إجابة ممكنة: استعمل مولّد الأعداد العشوائية لتوليد الأعداد من 1 إلى 20. حيث تمثل الأعداد 1-8 الهجوم، والأعداد 9-14 الدفاع، والعدد 15 رجوع اللاعبين، والأعداد 16-20 رميات التماس. ونفذ 20 محاولة، وسجل النتائج في جدول تكراري، واستعمل النتائج لإيجاد احتمال كل واحد من هذه النشاطات.

التكرار	الناتج
8	هجوم
6	دفاع
1	رجوع
5	رميات تماس
20	المجموع



احتمال أن يهاجم الفريق يساوي 40%، وأن يدافع 30%، وأن يرجع 5%، وأن ينفذ رمية تماس 25%.

ملاحظات

العنوان	استكشاف 8-1 حصة	الدرس 8-1 (3) حصص	الدرس 8-2 حصتان	الدرس 8-3 (3) حصص	الدرس 8-4 (3) حصص
قانون الجيوب	معمل الجداول الإلكترونية؛ استقصاء المثلثات القائمة الخاصة	الدوال المثلثية في المثلثات قائمة الزاوية	الزوايا وقياساتها	الدوال المثلثية للزوايا	قانون الجيوب
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء النسب بين أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية الخاصة. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاوية حادة. استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية. 	<ul style="list-style-type: none"> رسم زوايا في الوضع القياسي وإيجاد قياساتها. تحويل القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. إيجاد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما. استعمال قانون الجيوب في حل المثلثات.
المفردات	<ul style="list-style-type: none"> حساب المثلثات النسبة المثلثية الدالة المثلثية الجيب جيب التمام الظل قاطع التمام القاطع ظل التمام دوال المقلوب زاوية الارتفاع زاوية الانخفاض 	<ul style="list-style-type: none"> الوضع القياسي ضلع الابتداء ضلع الانتهاء الراديان الزاوية المركزية 	<ul style="list-style-type: none"> الزاوية الربعية الزاوية المرجعية 	<ul style="list-style-type: none"> قانون الجيوب حل المثلث 	
تمثيلات المتعددة			ص (169)		
مصادر الدرس	<ul style="list-style-type: none"> المواد حاسوب وبرنامج الجداول الإلكترونية. 	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن التدريبات الإثرائية، ص (10) دون ضمن كتاب التمارين ص (21) دون ضمن 	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن التدريبات الإثرائية، ص (15) دون ضمن كتاب التمارين ص (22) دون ضمن 	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن التدريبات الإثرائية، ص (20) دون ضمن كتاب التمارين ص (23) دون ضمن 	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) دون ضمن فوق كتاب التمارين ص (24) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (158)	رسائل قصيرة، ص (167)	نظام استجابات الطلبة، ص (172)		
تنوع التعليم	ص (160, 164)	ص (167, 170)	ص (174)		ص (180, 183)

المجموع	المراجعة و التقييم	التدريس
30 حصة	5	25

توسع 8-4 حصة	الدرس 8-5 (3) حصص	الدرس 8-6 (3) حصص	الدرس 8-7 (3) حصص	الدرس 8-8 (3) حصص
معمل الهندسة : مساحة متوازي الأضلاع	قانون جيوب التمام	الدوال الدائرية	تمثيل الدوال المثلثية بيانياً	الدوال المثلثية العكسية
<ul style="list-style-type: none"> استعمال نسبة الجيب لإيجاد مساحة متوازي الأضلاع. 	<ul style="list-style-type: none"> استعمال قانون جيوب التمام لحل مثلثات. اختيار طرق مناسبة لحل المثلثات. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة. استعمال خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية. 	<ul style="list-style-type: none"> وصف دوال الجيب وجيب التمام والظل، وتمثيلها بيانياً. وصف دوال مثلثية أخرى، وتمثيلها بيانياً. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية. حل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.
	قانون جيوب التمام	دائرة الوحدة الدالة الدائرية الدالة الدورية الدورة طول الدورة	السعة التردد	القيم الأساسية دالة معكوس الجيب دالة معكوس جيب التمام دالة معكوس الظل
		ص (197)		ص (211)
المواد • الحاسبة العلمية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق كتاب التمارين <ul style="list-style-type: none"> ص (25) دون ضمن فوق 	مصادر المعلم للأنشطة الصفية <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق كتاب التمارين <ul style="list-style-type: none"> ص (26) دون ضمن فوق 	مصادر المعلم للأنشطة الصفية <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق كتاب التمارين <ul style="list-style-type: none"> ص (27) دون ضمن فوق 	مصادر المعلم للأنشطة الصفية <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق كتاب التمارين <ul style="list-style-type: none"> ص (28) دون ضمن فوق
	السيورة التفاعلية، ص (187)	تسجيل صوتي، ص (194)	كاميرا توثيقية، ص (202)	تسجيل فيديو، ص (207)
	ص (188, 190)	ص (194, 197)	ص (200, 204)	ص (208, 210)

التقييم الختامي



- دليل الدراسة و المراجعة ص (212-216)
- اختبار الفصل ص (217)
- اختبار تراكمي ص (220, 221)

المعالجة

التشخيص

التقويم التشخيصي

مخطط المعالجة، ص (155)

التهيئة للفصل 8 ، ص (155)

بداية كل درس

مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب

فيما سبق، والآن، لماذا؟

خلال كل درس وبعده

التقويم التكويني

تدريبات المهارات، الفصل 8

تحقق من فهمك، لكل مثال

تنوع التعليم

تأكد

تنوع الواجبات المنزلية

مسائل مهارات التفكير العليا

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8

مراجعة تراكمية

www.obeikaneducation.com

أمثلة إضافية

تنبيه!

الخطوة 4، التقويم

الاختبارات القصيرة ، ص (68, 69)

www.obeikaneducation.com

منتصف الفصل

تدريبات المهارات، الفصل 8

اختبار منتصف الفصل، ص (185)

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8

اختبار منتصف الفصل، ص (70)

www.obeikaneducation.com

www.obeikaneducation.com

نهاية الفصل

تدريبات المهارات، الفصل 8

دليل الدراسة والمراجعة، ص (212-216)

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8

اختبار الفصل، ص (217)

www.obeikaneducation.com

اختبار تراكمي، ص (220-221)

www.obeikaneducation.com

بعد انتهاء الفصل 8

التقويم الختامي

تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8

اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (72-77)

www.obeikaneducation.com

اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (78, 79)

اختبار المفردات ، ص (71)

اختبار الفصل ذو الإجابة المطوَّلة ، ص (80)

اختبار تراكمي ، ص (81-83)

www.obeikaneducation.com

البديل 1

جميع المستويات

دون ضمن فوق

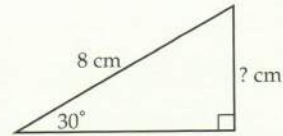
المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلبة اختيار زاوية قياسها أكبر من 90° ، ثم رسمها في الوضع القياسي، مع تحديد الزاوية المرجعية المرتبطة بها، وأخيراً إيجاد قيم الدوال المثلثية الست لها.

المتعلمون الحركيون وزع الطلبة في مجموعات ثلاثية أو رباعية. وزود كل مجموعة بأعواد، ومقصات، وصمغ. واطلب إليهم أن يعملوا ملصقات يوضحون فيها المفردات الأساسية في الدرسين 8-5، 8-4، وذلك باستعمال العيدان لتكوين مثلثات.

البديل 2

دون المتوسط دون

يعمل الطلبة من خلال العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، ويرسمون عددًا من المثلثات المتنوعة قائمة الزاوية، يتضمن كل منها زاوية قياسها 30° . واطلب إليهم قياس طول الوتر والضلع المقابل للزاوية 30° لأقرب مليمتر، ثم حساب جيب الزاوية 30° في كل مثلث من خلال قسمة طول الضلع المقابل على طول الوتر ليتوصلوا إلى أن $\sin 30^\circ$ هو نفسه لكل مثلث ويساوي 0.5. ثم ناقش النتائج مع الطلبة، وارسم على السبورة مثلثًا قائم الزاوية قياس إحدى زواياه 30° . وطول وتره 8 cm. واسأل الطلبة: ما الطريقة الأنسب لإيجاد طول الضلع المقابل للزاوية 30° ؟



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{? \text{ cm}}{8 \text{ cm}}$$

البديل 3

فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلبة رسم مثلث وإيجاد مساحته باستعمال كل من الطرق الثلاث الآتية:

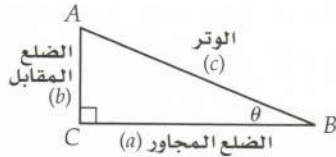
- استعمال الصيغة الأساسية لمساحة المثلث وهي: $A = \frac{1}{2} b h$. (التي تحتاج إلى معرفة طول ضلع القاعدة والارتفاع).
- استعمال صيغة عالم الرياضيات اليوناني (هيرون).
- (التي تحتاج إلى معرفة أطوال أضلاع المثلث الثلاثة).
- استعمال الصيغة $A = \frac{1}{2} bc \sin A$. (التي تحتاج إلى معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما).

يمكن للطلبة استعمال منقلة ومسطرة إذا تطلب الأمر ذلك. ثم اطلب إليهم تحديد المعلومات التي يحتاجون إلى معرفتها عن المثلث عند استعمال كل طريقة من الطرق السابقة.

ملخص الدروس

8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الدالة المثلثية هي صيغة على صورة نسبة يتم فيها المقارنة بين طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية. ويستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور لها لتعريف الدوال المثلثية الست.



8-2 الزوايا وقياساتها

تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في الوضع القياسي إذا وقع رأسها عند نقطة الأصل ووقع ضلع الابتدء على الجزء الموجب من المحور x ، ويدور ضلع الانتهاء حول نقطة الأصل وينتج عن دورانه في عكس عقارب الساعة زاوية موجبة، ومع عقارب الساعة زاوية سالبة. ومن المفيد ملاحظة أن القياس -210° مثلاً ليس أقل من القياس 210° . لإيجاد قياسات الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية ما، أضف إليها أو اطرح منها مضاعفات 360° .

يمكن للزوايا أن تُقاس بالدرجات أو بالراديان، والراديان وحدة مبنية على طول القوس. ويمكن استعمال الحقيقة الآتية ($180^\circ = \pi$ راديان) للتحويل بين القياسين.

8-3 الدوال المثلثية للزوايا

إذا كانت النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ ، فإنه يمكن إيجاد النسب المثلثية الست لها. وذلك بإسقاط عمود من النقطة على المحور x فيتشكل مثلث قائم طول إحدى ساقيه $|x|$ وحدة، وطول الساق الأخرى $|y|$ وحدة، وطول الوتر r وحدة، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وعليه فإن: $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

ولإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ غير ربعية، احسب قيم الدوال المثلثية للزاوية الحادة المرجعية θ المحصورة بين ضلع الانتهاء والمحور x . وتُحدَّد إشارة هذه الدالة من خلال معرفة الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

التربط الرأسي

ما قبل الفصل 8

- استعمال نظرية فيثاغورس.
- تطبيق الصيغ المختلفة لحل مسائل.
- تحديد المجال عند إيجاد معكوس دوال، مثل: $y = x^2$.

الفصل 8

- تعرف الدوال المثلثية للزوايا الحادة في الوضع القياسي أولاً، وكذلك النقاط على دائرة الوحدة.
- اشتقاق قانون الجيوب وقانون جيب تمام واستعمالهما بوصفهما تطبيقات على الدوال المثلثية.
- إيجاد معكوس دوال الجيب وجيب تمام والظل.
- استعمال الدوال المثلثية لإيجاد كل من السعة وطول الدورة.

ما بعد الفصل 8

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- الاستمرار في دراسة السعة وطول الدورة والتردد للدوال المثلثية ولدوال دورية أخرى.
- استعمال دوال مثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- حل معادلات تتضمن دوال مثلثية.

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

التمثيلات البيانية لدوال الجيب وجيب التمام والظل لها أنماط متكررة يُسمى كل تكرار فيها دورة. ويُسمى الطول الأفقي لكل دورة طول الدورة. وجدير بالذكر أن طول الدورة لكل من دالتي الجيب وجيب التمام هو 2π راديان أو 360° . أما دالة الظل فطول دورتها هو π راديان أو 180° . والسعة لكل من دالة الجيب وجيب التمام هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

وجبرياً بالنسبة لدالة الجيب $y = a \sin b\theta$ ، ودالة جيب التمام

$y = a \cos b\theta$ ، فإن طول الدورة هو $360^\circ \div |b|$ ، أما السعة لكل

منهما فتساوي $|a|$. أما لدالة الظل: $y = a \tan b\theta$ ، فيكون طول الدورة

$|b| \div 180^\circ$ ، وترتبط التمثيلات البيانية لدوال القاطع وقاطع التمام

وظل التمام بدوال جيب التمام والجيب والظل على الترتيب.

8-8 الدوال المثلثية العكسية

بما أن جزء كل من دالتي الجيب والظل بين 90° ، -90° وجزء دالة جيب

التمام بين 0° ، 180° يحقق اختبار الخط الأفقي، لذا فإنه يمكن تحديد

الدوال العكسية لهذه الدوال على هذه الفترات كما يأتي:

دالة معكوس الجيب: $y = \text{Arcsin } x = \text{Sin}^{-1} x$

دالة معكوس جيب التمام: $y = \text{Arccos } x = \text{Cos}^{-1} x$

دالة معكوس الظل: $y = \text{Arctan } x = \text{Tan}^{-1} x$

8-4 قانون الجيوب و 8-5 قانون جيب التمام

يمكن استعمال قانون الجيوب لحل المثلث إذا عُلِمَ:

- قياس زاويتين وطول أي ضلع (ASA أو AAS).
- طولاً ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA). وفي هذه الحالة يمكن أن نجد حللاً واحداً أو حلين أو قد لا نجد أيّاً من الحلول.

ويمكن استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث إذا عُلِمَ:

- طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما (SAS).
- أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS).

8-6 الدوال الدائرية

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة

الأصل وطول نصف قطرها وحدة

واحدة. ويمكن استعمالها لتعميم

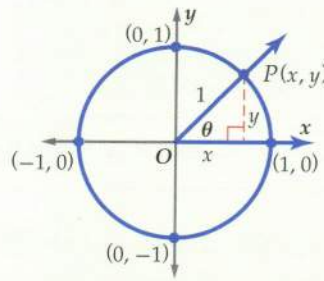
دوال الجيب وجيب التمام. إذا كان

ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع

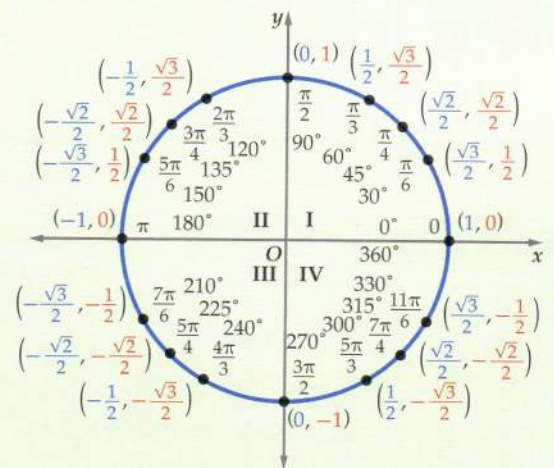
القياسي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة P التي إحداثياتها (x, y) ،

فإن $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$



ويمثل الرسم أدناه القيم الدقيقة لـ $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ لبعض الزوايا الخاصة.



تتكرر دورة كل من دالة الجيب وجيب التمام مرة كل 360° ، لذا فهما دالتان دوريتان.

مشروع الفصل

رياضات مائية

يستعمل الطلبة ما درسوه عن حساب المثلثات لوصف خصائص الرياضات المائية.

- وزّع الطلبة في مجموعات صغيرة، واطلب إلى كل مجموعة استعمال الإنترنت أو مجلات أو كتب تتعلق بالإبحار لجمع معلومات حول أبعاد الأشعة مثلثة الشكل المستعملة في القوارب الشراعية. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يكون للقارب الشراعي الصغير شراع على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $13\text{ ft }4\text{ in}$ ، وطول الضلع الثالث $14\text{ ft }7\text{ in}$.

- اطلب إلى الطلبة بمجرد توصلهم إلى المعلومات الكافية، أن يجدوا كلاً من مساحة الشراع، وقياسات الزوايا التي تصنعها حوافه.

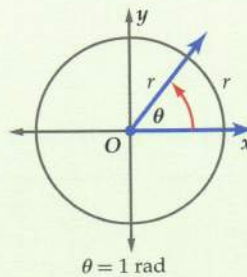
- اطلب إلى كل مجموعة رسم نموذج مصغر للشراع باعتماد مقياس رسم $1\text{ in} = 1\text{ ft}$ ، وعرضه على لوحة الإعلانات.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملاً الخطوات الآتية:

التعريف: الراديان هو قياس الزاوية θ في الوضع القياسي والتي تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر دائرة الوحدة.

سؤال: ما الذي يقيسه الراديان؟ زاوية

مثال:



فيما سبق:

درست تحليل الموال وتمثيلها بيانياً.

والآن:

- أجد قيم دوال مثلثية.
- أحل مسائل باستعمال النسب المثلثية للمثلث القائم الزاوية.
- أستعمل قانون الجيوب وقانون جيوس التمام في حل المثلث.
- أمثل دوال مثلثية بيانياً.

الماذا:

القياس غير المباشر:

للدوال المثلثية تطبيقات عملية في القياس غير المباشر، فمثلاً يمكن استعمال النسب المثلثية لمعرفة ارتفاعات الجبال أو الأشجار الشاهقة أو ناطحات السحاب أو إيجاد البعد بين جبلين أو عرض نهر.

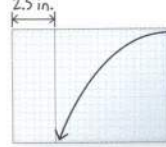
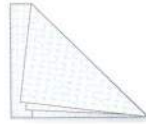


المطويات

منظم أفكار

حساب المثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول حساب المثلثات، مبتدئاً بأربع أوراق من أوراق الرسم البياني.

- 1 جَمِّع الأوراق الأربعة بعضها فوق بعض، وارسم خطاً عرضياً على مسافة 2.5 in من الحافة.
- 2 اطو الأوراق على القطر. حتى الخط المرسوم، كما في الشكل.
- 3 ثبّت الأوراق على طول القطر لتشكل كتيباً.
- 4 عنون الحافة بحساب المثلثات، ورقم الصفحات بأرقام الدروس.



المطويات

منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم في أثناء دراستهم حساب المثلثات في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واجعلهم يكتبون المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس وحفزهم على كتابة أمثلة من عندهم لتوضيح هذه المفردات.

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1
ضمن المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،

فقم: بمراجعة نظرية فيثاغورس، وخصائص المثلثات القائمة الزاوية والمتطابقة الضلعين، وأعطهم مزيداً من التدريبات.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2
دون المتوسط

إذا: أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،

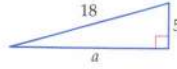
فقم: بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة سريعة

مثال 1

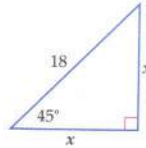
أوجد القياس المجهول في المثلث القائم الزاوية أدناه.



نظرية فيثاغورس $c^2 = a^2 + b^2$
 بالتمويض عن c بـ 18 و b بـ 5
 بالتبسيط $324 = a^2 + 25$
 بطرح 25 من كلا الطرفين $299 = a^2$
 بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين $17.3 \approx a$

مثال 2

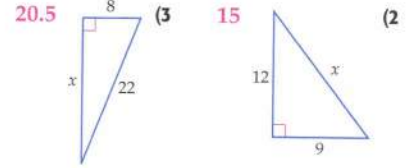
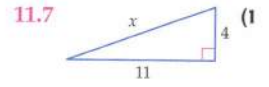
أوجد القياسين المجهولين فيما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



نظرية فيثاغورس $x^2 + x^2 = 18^2$
 بجمع الحدود المتشابهة $2x^2 = 18^2$
 بالتبسيط $2x^2 = 324$
 بقسمة كلا الطرفين على 2 $x^2 = 162$
 بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين $x = \sqrt{162}$
 بالتبسيط $x = 9\sqrt{2}$

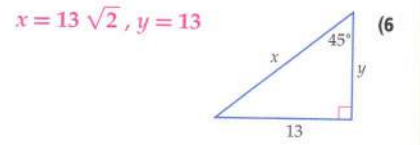
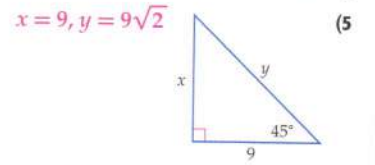
اختبار سريع

أوجد قيمة x مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.



(4) لدى راشد حديقة مستطيلة الشكل بعدها 6m و 4m. يريد أن يرصف ممراً على قطر الحديقة. فكم سيكون طول الممر؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **7.2m**

أوجد القياسين المجهولين في كل مما يأتي (اكتب الجذور في أبسط صورة):



(7) يستند سلم إلى جدار بحيث يصنع معه زاوية 45° . إذا كان طول السلم 12ft، فأوجد ارتفاع قمته عن الأرض. **$6\sqrt{2} \text{ ft} \approx 8.5 \text{ ft}$**

استقصاء المثلثات القائمة الخاصة

Investigating Special Right Triangles

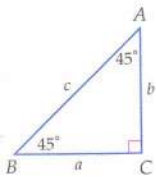
8-1

ملاحظات
الدرس

استكشاف

8-1

يمكنك استعمال الجداول الإلكترونية لاستقصاء قياسات أضلاع المثلثات القائمة الزاوية الخاصة.



نشاط المثلث الذي قياسات زواياه $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$

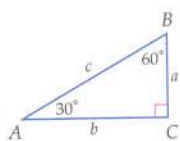
ضلعا المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ في الشكل المجاور a , b متساويان. ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا المثلث؟

الخطوة 1: أدخل الصيغ المشار إليها في برنامج الجداول الإلكترونية، حيث $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

45-45-90 triangles						
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1	1.414213562	1	0.707106781	0.707106781
3	2	2	2.828427125	1	0.707106781	0.707106781
4	3	3	4.242640687	1	0.707106781	0.707106781
5	4	4	5.656854249	1	0.707106781	0.707106781

الخطوة 2:

تحقق من النتائج؛ بما أن جميع المثلثات التي قياسات زوايا كل منها $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ متشابهة، فإن النسب بين أضلاعها تكون ثابتة، وتكون نسبة الضلع b إلى الضلع a مساوية للعدد 1. ونسبة كل من الضلعين a , b إلى الضلع c مساوية للعدد 0.71 تقريبًا.



حلل النموذج:

استعمل برنامج الجداول الإلكترونية المبيّن أدناه للمثلث الذي قياسات زواياه $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

30-60-90 triangles						
◇	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1		2			
3	2		4			
4	3		6			
5	4		8			

(1) انسخ ثم أكمل الورقة الإلكترونية أعلاه. انظر الهامش

(2) صيغ العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ المعطاة في الشكل أعلاه. $a < b < c$

(3) ما النمط الذي تلاحظه على النسب بين أطوال أضلاع هذا النوع من المثلثات؟ نسبة b إلى a تساوي 1.73 تقريبًا، ونسبة b إلى c تساوي 0.87 تقريبًا، ونسبة a إلى c تساوي 0.5 دائمًا.

156 الفصل 8 حساب المثلثات

إجابة (استكشاف 1-8):

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	c	b/a	b/c	a/c
2	1	1.732050808	2	1.732050808	0.866025404	0.5
3	2	3.464101615	4	1.732050808	0.866025404	0.5
4	3	5.196152423	6	1.732050808	0.866025404	0.5
5	4	6.92820323	8	1.732050808	0.866025404	0.5
6	5	8.660254038	10	1.732050808	0.866025404	0.5
7	6	10.39230485	12	1.732050808	0.866025404	0.5

- ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين جميع المثلثات التي قياسات زواياها $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ لكل منها نفس قياسات الزوايا، ولكن أطوال أضلاعها مختلفة، فجميع المثلثات متشابهة ولكن ليست متطابقة.

التوسع في المفهوم

أسأل الطلاب:

• ما القانون المستعمل؛ لإيجاد قيم العمود

B في المثلثات $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ؟
 $b = a$

• ما القانون المستعمل؛ لإيجاد قيم العمود

C في المثلثات $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ؟
 $C = 2a$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1

استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية.

الدرس 8-1

إيجاد قيم دوال مثلثية لزوايا حادة.

استعمال دوال مثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا في مثلثات قائمة الزاوية.

ما بعد الدرس 8-1

تمثيل دوال الجيب وجيب التمام بيانياً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

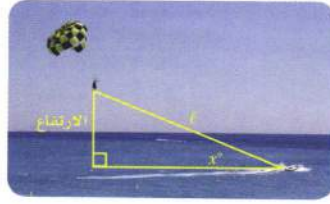
اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا" ،

واسأل:

- ما نوع الزاوية المتكوّنة من حبل السحب والخط الأفقي؟ حادة
- أي أضلاع المثلث تقابل الزاوية القائمة؟ وأي الأضلاع تقابل الزاوية x° ؟ الوتر؛ الارتفاع
- إذا كان الطول l ثابتاً و x تزداد، فكيف سيتغير الارتفاع؟ يزداد.

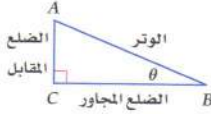
إجابة (تحقق من فهمك):

$$\sin B = \frac{15}{17}, \cos B = \frac{8}{17}, \tan B = \frac{15}{8}, \csc B = \frac{17}{15}, \sec B = \frac{17}{8}, \cot B = \frac{8}{15}$$



لماذا؟
يعتمد ارتفاع الشخص في التزلج الهوائي على طول حبل السحب l والزاوية x° التي يصنعها الحبل مع الخط الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلج.

الدوال المثلثية للزوايا الحادة يُعرّف **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. وتقرن **النسبة المثلثية** بين طوكي ضلعين في المثلث القائم الزاوية، أما **الدالة المثلثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلثة.



يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوال المثلثية الست.

مفهوم أساسي جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\sin \theta$ (جيب θ) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\csc \theta$ (قاطع تمام θ) = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
$\cos \theta$ (جيب تمام θ) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sec \theta$ (قاطع θ) = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
$\tan \theta$ (ظل θ) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\cot \theta$ (ظل تمام θ) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:

$\sin \theta = \frac{4}{5}$	$\cos \theta = \frac{3}{5}$	$\tan \theta = \frac{4}{3}$
$\csc \theta = \frac{5}{4}$	$\sec \theta = \frac{5}{3}$	$\cot \theta = \frac{3}{4}$

مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية في C ، أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ إذا كان:

طول الضلع المقابل للزاوية θ : $BC = 8$ ، طول الضلع المجاور للزاوية θ : $AC = 15$ ، طول الوتر: $AB = 17$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}, \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8}, \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15}, \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8}$$

تحقق من فهمك

1 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية B . انظر الهامش.

الدرس 8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية 157

فيما سبق:
درست استعمال نظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية.

والآن:
أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة.
أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.

المفردات:
حساب المثلثات trigonometry
النسبة المثلثية trigonometric ratio
الدالة المثلثية trigonometric function
الجيب sine
جيب التمام cosine
الظل tangent
قاطع التمام cosecant
القاطع secant
ظل التمام cotangent

دوال المقلوب reciprocal functions
معكوس الجيب inverse sine
معكوس جيب التمام inverse cosine
معكوس الظل inverse tangent
زاوية الارتفاع angle of elevation
زاوية الانخفاض angle of depression

مصادر الدرس 8-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (160)	• تنوع التعليم، ص (160, 164)	• تنوع التعليم، ص (164)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب. وتستخدم في تعريف **دوال المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

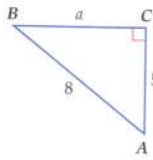
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أي دالة مثلثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادة θ في المثلث القائم الزاوية؛ لذا فإن الدوال المثلثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادة وليس على أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

مثال 2 إيجاد النسب المثلثية

$\angle B$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ فأوجد قيمة $\tan B$.

الخطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية وسمِّ إحدى زواياه الحادة B .



بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ فحدد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a .

$$\text{نظرية فيثاغورس} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = 5, c = 8 \quad a^2 + 5^2 = 8^2$$

$$\text{بالتبسيط} \quad a^2 + 25 = 64$$

$$\text{بطرح 25 من كلا الطرفين} \quad a^2 = 39$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \quad a = \pm\sqrt{39}$$

$$\text{الطول لا يمكن أن يكون سالبًا} \quad a = \sqrt{39}$$

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{39}}$$

$$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

دالة الظل

بالتعويض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$

بإطاق المقام

تحقق من فهمك

(2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B = \frac{3\sqrt{58}}{58}$.

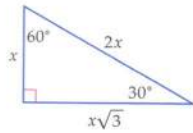
تكرر الزوايا التي قياساتها 30° ، 45° ، 60° كثيرًا في حساب المثلثات.

مفهوم أساسي بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ أن:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ أن:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = 1$$



قراءة الرياضيات

تسمية المثلثات

تُستعمل الأحرف الكبيرة خلال هذا الفصل للدلالة على رؤوس المثلث وقياسات زوايا الرؤوس. ويُستعمل الحرف الصغير المقابل للحرف الكبير للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية وتوضح دلالة الحرف من السياق.



تاريخ الرياضيات

اكتشف علماء العرب المسلمون العديد من العلاقات في حساب المثلثات، واستعملوها في حل المعادلات، وإيجاد ارتفاع الشمس، وعمل الجداول الرياضية، ويرجع إليهم الفضل في جعله علمًا مستقلًا عن علم الفلك، ومن أبرز هؤلاء العلماء:

البيروني (أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني (362-439 هـ)).

الطوسي (نصر الدين الطوسي (597-672 هـ)).

الكاشي (غياث الدين بن مسعود الكاشي (توفي سنة 839 هـ)).

البتاني (ابن عبد الله بن محمد بن سليمان الحراني (235-316 هـ)).

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

مثال 1 يبين طريقة إيجاد قيم الدوال المثلثية الست لزاوية.

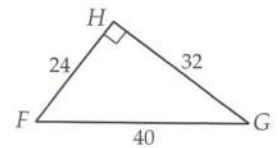
مثال 2 يبين طريقة استعمال نسبة مثلثية واحدة لزاوية لإيجاد بقية النسب.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية G .



$$\sin G = \frac{3}{5}, \cos G = \frac{4}{5},$$

$$\tan G = \frac{3}{4}, \cot G = \frac{4}{3},$$

$$\sec G = \frac{5}{4}, \csc G = \frac{5}{3}$$

2 في مثلث قائم الزاوية إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و $\tan A = \frac{5}{3}$.

$$\text{فأوجد قيمة } \csc A = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

إرشادات للمعلم الجديد

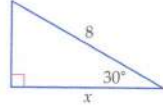
تبرير: اطلب إلى الطلبة تعلم كيفية إعادة رسم المثلثات الواردة ضمن "مفهوم أساسي" من الذاكرة. ويمكنهم التوصل من هذه المثلثات إلى القيم الموضحة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثًا قائم الزاوية على السبورة، وسجّل عليه أطوال أضلاعه. ولكتابة النسب المثلثية، اسحب قياس طول ضلع المثلث إلى مكانه في النسبة.

استعمال الدوال المثلثية: يمكنك استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية.

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.
طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية 30° .
استعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{8}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$$

$$6.9 \approx x$$

دالة جيب التمام

بالتعويض عن θ بـ 30° ، والمجاور بـ x ، والوتر بـ 8

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

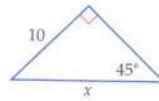
بضرب كلا الطرفين في 8

باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

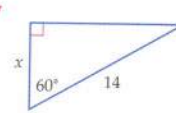
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم:

14.1



(3B)

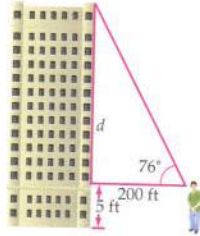
7



(3A)

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات التي لا تتضمن زواياها أيًا من الزوايا: 30° , 45° , 60° .

مثال 4 إيجاد طول ضلع مجهول



بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة مقياس زاوية الميل لقياس الزاوية المحصورة بين خط نظره المار بقمة البناية والخط الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟
الزاوية المقاسة كما يوضح الشكل هي 76° . طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالة الظل لإيجاد d .

دالة الظل

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 76^\circ = \frac{d}{200}$$

$$200 \tan 76^\circ = d$$

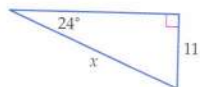
باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط:

$$802 \approx d$$

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

(4) استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم. 27.0

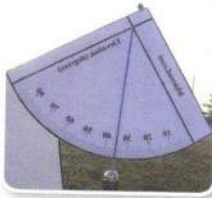


الدرس 8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية 159

إرشادات للدراسة

اختيار دالة

إذا كان طول الوتر مجهولًا فإنه يجب استعمال دالة الجيب أو دالة جيب التمام لإيجاد القيمة المجهولة.



الربط مع الحياة

مقاييس زاوية الميل تُستعمل لقياس زاوية ميل المجال المغناطيسي الأرضي ودرجة ميل واهتزاز المركبات والقوارب والطائرات. كما تُستعمل في رصد البراكين وحفر الآبار.

استعمال الدوال المثلثية

المثالان 3, 4: يبينان كيفية استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية.

مثال 5: يبين كيفية إيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية.

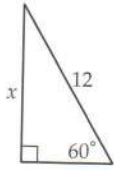
مثال 6: يبين كيفية استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض لحل مسائل من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x .

قرب الجواب إلى أقرب جزء من

عشرة إذا لزم. 10.4



بناية: في المثال 4، ما المسافة بين

قمة البناء وعين أحمد؟

تقريبًا 827 ft

المحتوى الرياضي

الدوال المثلثية: قد يعتاد الطلبة

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.

إلا أن الدوال حتى الآن قد عُرِّفت

بدلالة النسب بين أطوال أضلاع

المثلث القائم الزاوية. مما يعني أن هذه

التعريفات تصلح فقط للزوايا الحادة.

أما الحالات الأكثر عمومية فسيتم

دراستها عند تقديم الزوايا المرجعية.

عند حل معادلات مثل $3x = -27$ ، تستعمل العملية العكسية للضرب. كما يمكنك استعمال معكوس: الجيب أو جيب التمام أو الظل في إيجاد قياسات الزوايا.

مفهوم أساسي	
أضف إلى مطويتك	معكوس النسب المثلثية
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x ، فإن: معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\sin A = x$ ، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$
مثال:	$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x ، فإن: معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\cos A = x$ ، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$
مثال:	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45^\circ$
التعبير اللفظي:	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x ، فإن: معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.
الرموز:	إذا كان $\tan A = x$ ، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$
مثال:	$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60^\circ$

إذا علمت الجيب، أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فإنه يمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد قياس هذه الزاوية والذي هو معكوس النسبة المثلثية المعروفة.

مثال 5 إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

$\angle N$ (a)

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالة الجيب.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

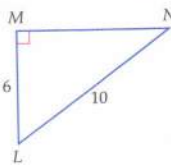
معكوس الجيب

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\sin N = \frac{6}{10}$$

$$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$$

$$36.9^\circ \approx m\angle N$$



$\angle B$ (b)

استعمل دالة جيب التمام.

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

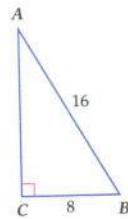
معكوس جيب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\cos B = \frac{8}{16}$$

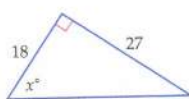
$$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$$

$$60^\circ = m\angle B$$



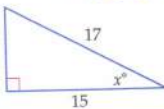
أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

56.3



(5B)

28.1



(5A)

قراءة الرياضيات

معكوس النسب المثلثية

تقرأ العبارة $\sin^{-1} x$

معكوس جيب x وتعني

الزاوية التي جيبها x ،

يشبه هذا الرمز رمز

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$.

كن حذراً ولا تخلط هذا

الرمز مع رمز الأس

السالب:

$$\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$$

إرشادات للدراسة

لإيجاد $\sin^{-1} \frac{6}{10}$

باستعمال الآلة

الحاسبة، اضغط

على المفاتيح

الآتية بالترتيب من

اليسار إلى اليمين

`SHIFT SIN () 6 / 10 =`

ستحصل على الإجابة

36.9° ، ولإيجاد

$\cos^{-1} \frac{8}{16}$ ، اضغط على

المفاتيح

`SHIFT COS () 8 / 16 =`

وستحصل على الإجابة

60°

تنوع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلبة رص مجموعة من الكتب بعضها فوق بعض؛ لصنع نموذج لمستوى مائل لاستقصاء مدى الانحدار المطلوب كي يجعل لعبة سيارة تتدحرج نزولاً دون حاجة إلى دفعها. واطلب إليهم كتابة نتائجهم بدلالة الدوال المثلثية لمثلث قائم الزاوية.

زوايا الارتفاع والانخفاض
زوايا الارتفاع
والانخفاض للحالة
الواحدة متطابقتان؛
لأنهما زاويتان داخليتان
متبادلتان لخطين
متوازيين .



الربط مع الحياة

أكثر العربات الدوارة انحداراً
في العالم لها زاوية انحدار
(انخفاض) تقارب 90° .

في الشكل المجاور، تُسمى الزاوية المحصورة بين خط نظر السابح إلى المنفذ والخط الأفقي **زاوية الارتفاع**. كما تُسمى الزاوية المحصورة بين خط نظر المنفذ إلى السابح والخط الأفقي **زاوية الانخفاض**.



مثال إضافي

6

(a) **لعبة الجولف**: وجد من خلال كاميرا منطاد مراقبة، أن المسافة الظاهرية بين اللاعب والحفرة في المثال 6a هي المسافة الأفقية. أوجد هذه المسافة الأفقية. **169.4 ft**

(b) **العربة الدوارة**: أوجد طول الضلع المجاور للزاوية 60° في المثلث القائم المرسوم في المثال 6b. **112.6 ft**



(a) **لعبة الجولف**: يقف لاعب جولف أسفل تلّ وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التل 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التل عن الحفرة هي 12° ، فأوجد المسافة من أسفل التل إلى الحفرة.

اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسية (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التل إلى الحفرة (الوتر).

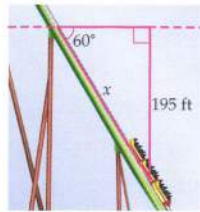
$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \sin 12^\circ = \frac{36}{x}$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في } x \quad x \sin 12^\circ = 36$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } \sin 12^\circ \quad x = \frac{36}{\sin 12^\circ}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad x \approx 173.2$$

لذا فإن المسافة من أسفل التل إلى الحفرة يساوي: 173.2 ft تقريباً.



(b) **العربة الدوارة**: قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوارة في إحدى مدن الألعاب هي 60° . وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.

اكتب معادلة باستخدام دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسية (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \sin 60^\circ = \frac{195}{x}$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في } x \quad x \sin 60^\circ = 195$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } \sin 60^\circ \quad x = \frac{195}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad x \approx 225.2$$

لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريباً.

تحقق من فهمك

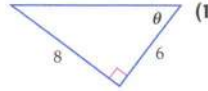
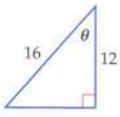


(6A) **تضريح حمولة**: استعمل سطح مائل لتضريح شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32° . إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل. **2.3 m تقريباً**

(6B) **سلالم**: سلّم طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72° . ما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟ **3.8 m تقريباً**

مثال 1

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ : (1, 2) انظر الهامش.



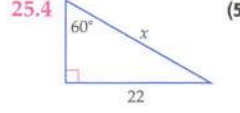
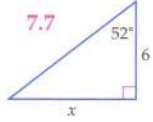
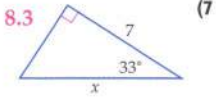
مثال 2

معتبرًا $\angle A$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

(3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$? $\frac{\sqrt{33}}{7}$ (4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟ $\frac{21}{29}$

مثال 3

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة:



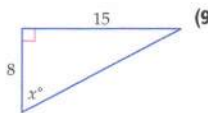
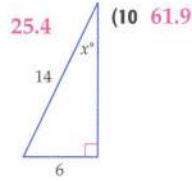
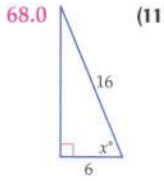
مثال 4

(8) أشجار: يقف عبدالله ملاصقًا لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعدًا عن مكانه مسافة 100 ft، في مسار عمودي على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكلاً معهما زاوية قياسها 70° ، فما البعد بين الشجرتين؟

274.7 ft تقريبًا

مثال 5

أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة:



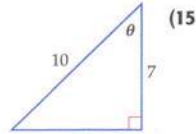
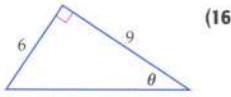
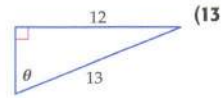
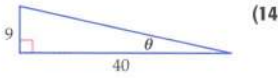
مثال 6

(12) سلالم: إذا علمت أن زاوية ارتفاع السلالم الموصى بها لمكافحة الحرائق هي 75° . إلى أي ارتفاع على نهاية يمكن أن يصل سلم طوله 6.5 m، إذا تم الاعتماد على زاوية الارتفاع الموصى بها؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. 6.3 m

تدرب وحل المسائل

مثال 1

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل مما يأتي: (13-16) انظر الهامش.



مثال 2

إذا علمت أن $\angle A$ ، $\angle B$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية، فأجب عما يأتي:

(17) إذا كان $\tan A = \frac{8}{15}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟ $\frac{15}{17}$ (18) إذا كان $\cos A = \frac{3}{10}$ ، فما قيمة $\tan A$ ؟ $\frac{\sqrt{91}}{3}$
 (19) إذا كان $\tan B = 3$ ، فما قيمة $\sin B$ ؟ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (20) إذا كان $\sin B = \frac{4}{9}$ ، فما قيمة $\tan B$ ؟ $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

م استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة معين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

$\sin \theta = \frac{4}{5}$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$; (1)

$\csc \theta = \frac{5}{4}$; $\sec \theta = \frac{5}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{4}$

$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\cos \theta = \frac{3}{4}$; (2)

$\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $\csc \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$;

$\sec \theta = \frac{4}{3}$; $\cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\sin \theta = \frac{12}{13}$; $\cos \theta = \frac{5}{13}$; (1)

$\tan \theta = \frac{12}{5}$; $\csc \theta = \frac{13}{12}$;

$\sec \theta = \frac{13}{5}$; $\cot \theta = \frac{5}{12}$

$\sin \theta = \frac{9}{41}$; $\cos \theta = \frac{40}{41}$; (1)

$\tan \theta = \frac{9}{40}$; $\csc \theta = \frac{41}{9}$;

$\sec \theta = \frac{41}{9}$; $\cot \theta = \frac{40}{9}$

$\sin \theta = \frac{\sqrt{51}}{10}$; $\cos \theta = \frac{7}{10}$; (1)

$\tan \theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$; $\csc \theta = \frac{10\sqrt{51}}{51}$;

$\sec \theta = \frac{10}{7}$; $\cot \theta = \frac{7\sqrt{51}}{51}$

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; (1)

$\tan \theta = \frac{2}{3}$; $\csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$;

$\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$; $\cot \theta = \frac{3}{2}$

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة

المستوى

52-60 ، 13-35

دون المتوسط

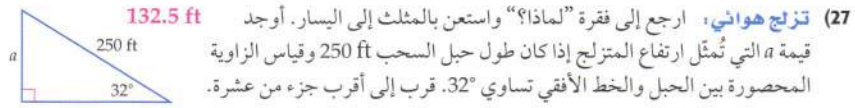
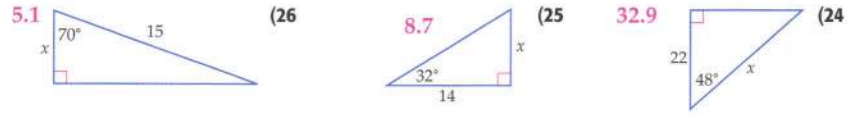
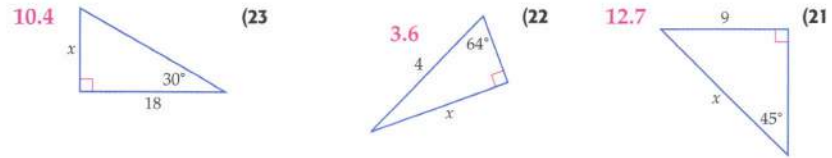
52-60 ، 45-50 ، زوجي ، 36-42 ، فردي ، 13-35

ضمن المتوسط

36-60

فوق المتوسط

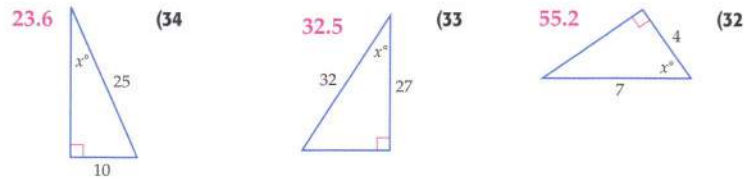
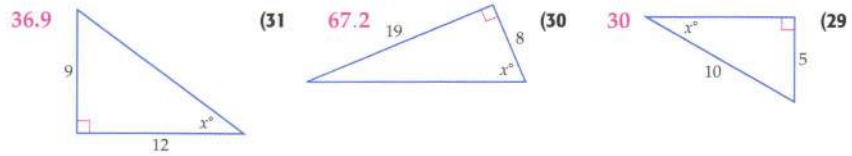
في كلِّ مما يأتي، استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



(28) يقف فيصل ملاحظاً لإحدى شجرتين متقابلتين في حديقة. إذا تحرك مبتعداً عن مكانه مسافة 20 m، في مسار عمودي على الخط الواصل بين الشجرتين، ومشكلاً زاوية قدرها 52° ، فما البعد بين الشجرتين؟ **25.6 m**

في كلِّ مما يأتي، أوجد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

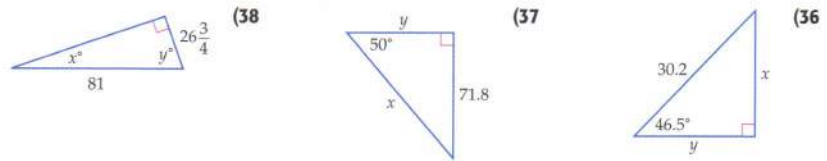
مثال 5



(35) **تسلق**؛ تسلق أحد الأشخاص تلاً بزاوية ارتفاع قياسها 20° ، أوجد ارتفاع الشخص عندما يكون قد قطع مسافة أفقية مقدارها 18 m. **6.6 m**

مثال 6

في كلِّ مما يأتي استعمل دوال مثلثية، لإيجاد قيمة كلِّ من x , y . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



حلِّ كلًّا من المعادلات الآتية:

86.2 $\tan X = 15$ (41) 54.9 $\sin N = \frac{9}{11}$ (40) 80.9 $\cos A = \frac{3}{19}$ (39)

11.5 $\cos Z = 0.98$ (44) 7.1 $\tan G = 0.125$ (43) 20.5 $\sin T = 0.35$ (42)

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة قل المعلومات التي يجب أن يعرفها لشخص عن المثلثات القائمة ليستطيع حل المثلث ويجد قياس زاوية أو طول ضلع مجهول فيه، ثم تسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.



الربيط مع الحياة

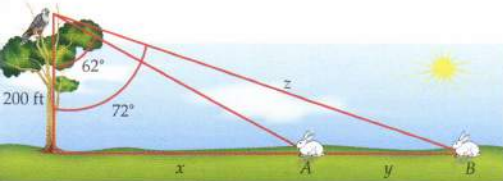
يستطيع الصقر رؤية أجسام طولها 10 cm عن بعد 1.5 km. كما أنه يستطيع رؤية الأشياء بوضوح عندما ينقض بسرعة 100 ميل / ساعة.

45 **أعشاش:** تنظر فاطمة نحو عش طائر على شجرة بزاوية ارتفاع قياسها 74.5° ، فإذا كان مستوى نظرها يرتفع 5 ft عن سطح الأرض، وكانت تقف على بعد 12 ft من قاعدة الشجرة. فما ارتفاع عُش الطائر عن سطح الأرض؟ قرب إلى أقرب قدم. **48 ft**

46 **صقور:** رأى صقر من ارتفاع 200 ft أرنبين A, B. كما هو موضح في الشكل.

(a) ما المسافة التقريبية z بين الصقر والأرنب B؟ **تقريبًا 647.2 ft**

(b) ما البعد بين الأرنبين؟ **تقريبًا 239.4 ft**



في $\triangle ABC$ ، $\angle C$ زاوية قائمة. استعمل القيم المعطاة لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في $\triangle ABC$. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. (47-50) **انظر الهامش.**

$m\angle B = 31^\circ, b = 19$ (48)

$m\angle A = 36^\circ, a = 12$ (47)

$\tan A = \frac{4}{5}, a = 6$ (50)

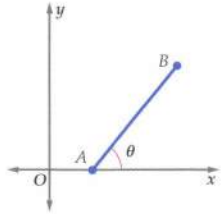
$a = 8, c = 17$ (49)

مسائل مهارات التفكير العليا

51 **تحذّر:** قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0), B(6, 5)$ كما هو موضح في الشكل إلى اليسار، ما قياس الزاوية الحادة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x؟ وضح كيف وجدت القياس.

52 **تبرير:** بين إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرر إجابتك: قيمة دالة الجيب لأية زاوية حادة، لن تكون سالبة أبدًا. **انظر الهامش.**

53 **إجابة مفتوحة:** في المثلث القائم الزاوية ABC، إذا علمت أن: $\sin A = \sin C$. فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلث؟ برر إجابتك. **انظر الهامش.**



51 51.3° تقريبًا، إذا رُسم مثلث قائم الزاوية، بحيث تكون القطعة AB هي الوتر، فإن طول الضلع المقابل للزاوية θ هو 5 وطول الضلع المجاور لها هو 4، فيكون: $\tan A = \frac{5}{4}$ ، فتكون: $A \approx 51.3^\circ$.

تدريب على اختبار

54 إذا كان ثمن شطيرة x ريالًا، وثمان عبلة عصير y ريالًا، وثمان شطيرتين مع عبلة عصير 4.50 ريالًا، وثمان ثلاث شطائر مع عبليتي عصير 7.25 ريالًا فأَي المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y؟ **B**

- A** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- B** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
- C** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
- D** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

55 نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5. إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm^2 ، فكم ستمتدُّ طول قطر المستطيل؟ **A**

- A** 26
- B** 28
- C** 30
- D** 32

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: **الدرس (5-1)**

(57) $\frac{36b^3cf}{5aq} \div \frac{14c^2f^5}{qa^2} \div \frac{35cf^4}{18ab^3}$

(56) $\frac{5a^4c}{3b} \cdot \frac{15a^2b^2}{21ac} \cdot \frac{14a^4c^2}{6ab^3}$

أوجد مجموع كل متسلسلة مما يأتي:

(60) $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ **الدرس (6-4)**

(59) $3 + 8 + 13 + \dots + 58$ **الدرس (6-2)**

إجابات:

(47) $m\angle B = 54^\circ, b = 16.5, c = 20.4$

(48) $m\angle A = 59^\circ, a = 31.6, c = 36.9$

(49) $m\angle A = 28.1^\circ, m\angle B = 61.9^\circ, b = 15$

(50) $m\angle A = 38.7^\circ, m\angle B = 51.3^\circ, b = 7.5, c = 9.6$

(52) **صحيحة؛** $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin \theta$ وطول الضلع المقابل لزاوية حادة وطول الوتر موجبان، لذا فإن قيمة دالة الجيب ستكون موجبة دائمًا.

(5) بما أن $\sin A = \sin C$ فإن:

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } A}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } C}{\text{طول الوتر}}$$

وبما أن طول الوتر في النسبتين هو نفسه فإن طول الضلع المقابل لـ C يساوي طول الضلع المقابل لـ A، وهذا يعني أن المثلث متطابق الضلعين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اطلب إلى الطلبة حساب قيمة $\sin^2 x + \cos^2 x$ لبعض قيم x، ثم تخمين قيمة العبارة السابقة، واستعمال تعريف الدوال المثلثية لإثبات هذا التخمين. لاحظ أن القيمة دائمًا تساوي 1.

$\sin^2 x + \cos^2 x \stackrel{?}{=} 1$

$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$

وبما أن $(\text{الوتر})^2 = (\text{المجاور})^2 + (\text{المقابل})^2$ ، صحيح دائمًا من خلال نظرية فيثاغورس، فالقيمة تساوي 1 دائمًا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 8

دون ضمن المتوسط فوق المتوسط

دون ضمن المتوسط

دون دون المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6)

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

استعمال الدوال المثلثية، يمكنك استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية، ويمكن إيجاد قياسات الزوايا باستعمال ممكوس الجيب، ومكوس جيب الضلع، ومكوس الظل.

أوجد قياس C ، مع تقريبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

ما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية C وطول الوتر، لذا استعمال دالة الجيب.

دالة الجيب	$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
بالتعويض عن المقابل بـ 10، وعن الوتر بـ 10.	$\sin C = \frac{10}{10}$
مكوس الجيب	$\sin^{-1} \frac{10}{10} = m\angle C$
باستخدام الآلة الحاسبة	$53.1^\circ = m\angle C$

تقارن

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل ما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(1) $\sin 30^\circ = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 20$

(2) $\cos 63^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x \approx 8.8$

(3) $\sin 20^\circ = \frac{14.5}{x} \Rightarrow x \approx 43.0$

(4) $\cos 45^\circ = \frac{5}{x} \Rightarrow x \approx 7.1$

(5) $\sin 32^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x \approx 12.2$

(6) $\tan 70^\circ = \frac{9}{x} \Rightarrow x \approx 3.3$

(7) $\cos 45^\circ = \frac{7}{x} \Rightarrow x \approx 9.9$

(8) $\sin 32^\circ = \frac{33}{x} \Rightarrow x \approx 66.8$

(9) $\tan 70^\circ = \frac{23.6}{x} \Rightarrow x \approx 7.1$

الصف: الثاني الثانوي الفصل: 8، ص 111

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الدوال المثلثية هي أداة، يُرشد حساب المثلثات بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث القائم الزاوية وأضلاعه. والدالة المثلثية تعرف من النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

المقابل	المقابل	المقابل
$\sin \theta$ (جيب θ)	$\cos \theta$ (جيب تمام θ)	$\tan \theta$ (ظل θ)
$\csc \theta$ (مكوس الجيب)	$\sec \theta$ (مكوس الجيب)	$\cot \theta$ (مكوس الظل)

خطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية، وسم إحدى زواياه الحادة B ، وضع العدد 3 طولًا للضلع المجاور والعدد 7 طولًا للوتر.

خطوة 2: استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة b .

$a^2 + b^2 = c^2$
 $3^2 + b^2 = 7^2$
 $9 + b^2 = 49$
 $b^2 = 40$
 $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

خطوة 3: أوجد $\tan B$.

$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

تقارن

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل ما يأتي:

(1) $\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}, \csc \theta = \frac{13}{5}, \sec \theta = \frac{13}{12}, \cot \theta = \frac{12}{5}$

(2) $\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}, \csc \theta = \frac{5}{3}, \sec \theta = \frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{4}{3}$

(3) $\sin \theta = \frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{15}{17}, \tan \theta = \frac{8}{15}, \csc \theta = \frac{17}{8}, \sec \theta = \frac{17}{15}, \cot \theta = \frac{15}{8}$

(4) إذا كان $\tan A = \frac{7}{12}$ ، فأوجد $\cos A$. $\cos A = \frac{12}{13}$ إذا كان $\frac{1}{2}$ ، فأوجد $\tan A$. $\tan A = 1.732$

الصف: الثاني الثانوي الفصل: 8، ص 111

تدريبات المهارات (8)

دون ضمن المتوسط

تدريبات حل المسألة (9)

دون ضمن المتوسط

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 تدريبات حل المسألة

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

(1) اصعد المذلق، شمس ساف، منزل بيتلان قدره $10\frac{10}{12}$ ft. يمشي أن السقف يرتفع 10 ft مقابل كل 12 ft أفقًا. والشكل أدناه يعطي صورة جالسية للتلترك.

(2) مصحف بنده، قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية. أظهر حطط قطعة الأرض أن قياسات زواياها هي 40° ، 50° ، و 90° (إذا كان طول وتر قطعة الأرض 30 m، فما أطوال الضلعين الآخرين لقطعة الأرض؟)

(3) $\approx 23.0 \text{ m}$ و $\approx 19.3 \text{ m}$

(4) هندسة: رُسم شكل سداسي منتظم داخل دائرة طول قطرها 8 in في الشكل.

(a) ما قياس الزاوية x عند قاعدة السقف؟ $\approx 39.6^\circ$

(b) ما قياس الزاوية y عند قمة السقف؟ $\approx 100.4^\circ$

(c) ما طول حافة السقف z ؟ $\approx 15.6 \text{ ft}$

(d) إذا كان طول المنزل 26 ft، فما المساحة الكلية للسقف؟ $\approx 812.3 \text{ ft}^2$

(2) بنهايات، وقت أحد على بُعد 150 ft من قاعدة بناية، وفحص الزاوية المحصورة بين الخط الواصل من قمة البناية إلى عينه، والحط الأفقي للترابيع فكانت 84° . إذا كان ارتفاع عينه عن الأرض 5 ft، فما ارتفاع البناية؟ $\approx 1432 \text{ ft}$

الصف: الثاني الثانوي الفصل: 8، ص 111

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-1 تدريبات المهارات

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كل ما يأتي:

(1) $\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}, \csc \theta = \frac{5}{3}, \sec \theta = \frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{4}{3}$

(2) $\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}, \csc \theta = \frac{13}{5}, \sec \theta = \frac{13}{12}, \cot \theta = \frac{12}{5}$

(3) $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \tan \theta = \frac{2}{3}, \csc \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \cot \theta = \frac{3}{2}$

معدن: زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية

(4) إذا كان $\tan A = 3$ ، فأوجد $\sin A$. $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$ إذا كان $\frac{1}{10}$ ، فأوجد $\cos A$. $\cos A = 0.998$

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x في كل ما يأتي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(6) $\sin 30^\circ = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 20$

(7) $\cos 60^\circ = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 10$

(8) $\tan 22^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow x \approx 4.0$

(9) $\tan 30^\circ = \frac{13.9}{x} \Rightarrow x \approx 23.9$

(10) $\cos 51^\circ = \frac{5}{x} \Rightarrow x \approx 9.8$

(11) $\tan 63^\circ = \frac{3.9}{x} \Rightarrow x \approx 6.3$

(12) $\sin 60^\circ = \frac{5}{x} \Rightarrow x \approx 5.8$

أوجد قيمة x قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(13) $\sin 30^\circ = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 10$

(14) $\sin 60^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow x \approx 2.3$

(15) $\sin 30^\circ = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4$

الصف: الثاني الثانوي الفصل: 8، ص 111

لماذا؟

المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظل الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظل على القرص 15° كل ساعة.



فيما سبق:

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات

والآن:

- أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها.
- أحول من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات:

- الوضع القياسي standard position
- ضلع الابتداء initial side
- ضلع الانتهاء terminal side
- الراديان radian
- الزاوية المركزية central angle
- طول القوس arc length

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترايط الرأسي

ما قبل الدرس 8-2

استعمال زوايا مقيسة بالدرجات.

الدرس 8-2

رسم زوايا في الوضع القياسي وإيجاد قياساتها.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

ما بعد الدرس 8-2

تمثيل دوال الجيب وجيب التمام بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا"،

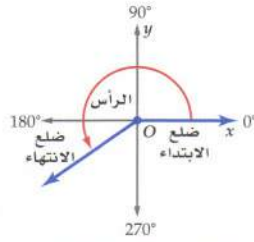
وسائل:

- إلى أين يتجه الظل في الصباح؟ الغرب
- متى يكون لك أقصر ظل؟ عند الظهر
- فسر لماذا يتحرك الظل 15° كل ساعة.

يعود الظل إلى موقعه الأصلي كل

24 ساعة، وعندما تقسم الدائرة الكاملة

على 24 فإن الناتج: $360^\circ \div 24 = 15^\circ$.



الزوايا المرسومة في الوضع القياسي تكون الزاوية المرسومة في المستوى

الإحداثي في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x .

- يُسمى الضلع المنطبق على المحور x ضلع الابتداء للزاوية.
- يُسمى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل ضلع الانتهاء.

مفهوم أساسي

قياسات الزوايا

يكون قياس الزاوية موجباً إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالباً إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

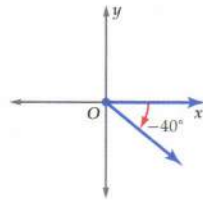
مثال 1

رسم زاوية في الوضع القياسي

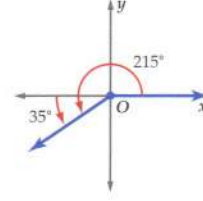
ارسم كلّاً من الزاويتين المعطى قياسها فيما يأتي في الوضع القياسي:

(a) $215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$ (b) -40°

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء الموجب من المحور x



ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء السالب من المحور x .



تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر ملحق الإجابات

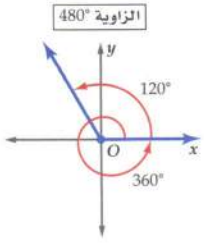
ارسم كلّاً من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

(A) 80° (B) -105°

مصادر الدرس 8-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (167)	• تنوع التعليم، ص (170)	• تنوع التعليم، ص (170)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة. فعلى سبيل المثال:
دورة كاملة مقدارها 360° إضافة إلى دورة بمقدار 120° تشكلان زاوية قياسها
 $360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$



الربط مع الحياة

التزلج المائي رياضة يضع فيها المتزلج زلاجة من الزجاج اللبني، أو من أنواع مختلفة من الخشب في قدميه، ويتم سحبه فوق الماء بواسطة زورق ذي محرك سريع.

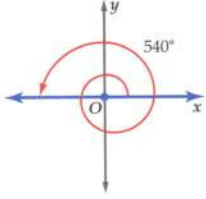
رسم زاوية في الوضع القياسي

مثال 2 من واقع الحياة

التزلج المائي: يتضمن التزلج المائي، أن يقوم المتزلج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء أثناء تنفيذه هذه الرياضة. إذا تضمنت إحدى المناورات الدوران بمقدار 540° في الهواء، فارسم زاوية قياسها 540° في الوضع القياسي.

$$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° بدءاً من الجزء الموجب من المحور x .



تحقق من فهمك

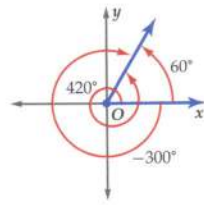
(2) ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي. انظر الهامش.

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: 300° , 420° , 60° كما هو موضح في الشكل المجاور.

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360° .

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$$

$$60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$$



مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

(a) 130°

$$\text{زاوية بقياس موجب: } 130^\circ + 360^\circ = 490^\circ \text{ بإضافة } 360^\circ$$

$$\text{زاوية بقياس سالب: } 130^\circ - 360^\circ = -230^\circ \text{ بطرح } 360^\circ$$

(b) -200°

$$\text{زاوية بقياس موجب: } -200^\circ + 360^\circ = 160^\circ \text{ بإضافة } 360^\circ$$

$$\text{زاوية بقياس سالب: } -200^\circ - 360^\circ = -560^\circ \text{ بطرح } 360^\circ$$

تحقق من فهمك

(3B) 315° , -405° , -45°

(3A) 375° , -345° , 15°

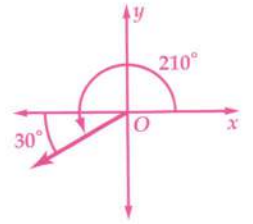
قراءة الرياضيات

زاوية الدوران
في حساب المثلثات، يشار إلى الزاوية أحياناً بزاوية الدوران.

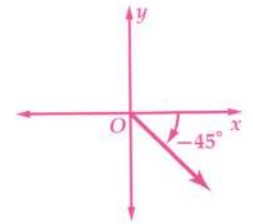
مثالان إضافيان

ارسم كلاً من الزاويتين المعطى قياسهما في الوضع القياسي.

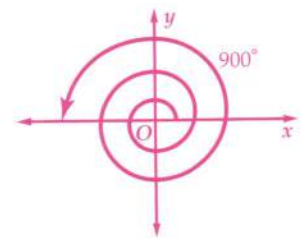
(a) 210°



(b) -45°

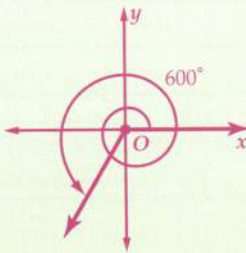


غوص: في مسابقة (الغوص من منصة الوثب) نفذ غواص دورة بمقدار 900° قبل أن يغطس في الماء. ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.



إجابة (تحقق من فهمك):

(2)



إرشادات للمعلم الجديد

رسم الزوايا: ناقش الطلبة في أهمية تحديد الزوايا بالأسهم كما هو موضح، وكتابة قياسها بالدرجات.

القياس بالراديان

كما في القياس بالدرجات، فإن القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.

• قياس زاوية بالراديان يكون موجباً إذا كان الدوران عكس حركة عقارب الساعة.

• قياس زاوية بالراديان يكون سالباً إذا كان الدوران مع حركة عقارب الساعة.

قراءة الرياضيات

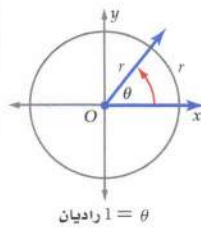
القياس بالراديان

كلمة راديان أو rad تحذف عادة عندما يتم التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. ومن هنا فعندما لا نضع وحدة لقياس معطى لزاوية تكون الوحدة هي الراديان.

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند على طول قوس من دائرة. 1 راديان (rad) هو قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة.

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

1 راديان θ

مفهوم أساسي

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$	للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

مثال 4

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

$$\begin{aligned} (a) \quad -30^\circ &= -30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \\ &= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ (b) \quad \frac{5\pi}{2} &= \frac{5\pi}{2} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \\ &= \frac{900^\circ}{2} = 450^\circ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

$$(4A) \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad (4B) \quad -67.5^\circ = -\frac{3\pi}{8}$$

ملخص المفهوم

القياس بالدرجات وبالراديان

يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$$\begin{aligned} 30^\circ &= \frac{\pi}{6} & 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \\ 60^\circ &= \frac{\pi}{3} & 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



الدرس 8-2 الزوايا وقياساتها 167

مثال إضافي

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية من الزاويتين الآتيتين:

(a) 210°

إجابة ممكنة: $150^\circ, 570^\circ$

(b) -120°

إجابة ممكنة: $480^\circ, 240^\circ$

التعليم باستعمال التقنيات

رسائل قصيرة: اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثنائية على أن يرسل أحد الطالبين رسالة تتضمن قياس زاوية، ويرد عليه الآخر برسالة تتضمن زاويتين تشتركان معها في ضلع الانتهاء. ثم يتبادل الطلبة الأدوار فيما بينهم ويكرروا العملية.

التحويل بين الدرجات والراديان

مثال 4 يبين كيفية التحويل من درجات إلى راديان، ومن راديان إلى درجات.

وقد استعمل الرمز (rad) اختصاراً لكلمة radian (راديان)؛ للدلالة على أن قياس الزاوية معطى بالراديان.

مثال 5 يبين كيفية التحويل واستعمال قياس الزوايا في مواقف من الحياة.

مثال إضافي

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى راديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات.

(a) $30^\circ = \frac{\pi}{6}$

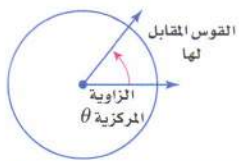
(b) $-300^\circ = -\frac{5\pi}{3}$

تنوع التعليم

دون

إذا احتاج الطلبة إلى تدريبات إضافية على الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء،

فاطلب إليهم العمل في مجموعات ثنائية على أن يشكل أحدهما زاوية بقلم رصاص أو عودين. أما الآخر فيعطي قياسين للزاوية أحدهما موجب والآخر سالب، يشتركان مع الزاوية النموذج في ضلع الانتهاء.



الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.

مفهوم أساسي **طول القوس**

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ .

الرموز: $s = r\theta$

النموذج:

سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 47

مثال إضافي

شاحنات: إذا كان طول نصف قطر عجلة القيادة (Steering wheel) لشاحنة هو 11 in . ما المسافة التي تقطعها نقطة على عجلة القيادة إذا دارت العجلة أربعة أخماس الدورة؟ 55.3 in

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد طول القوس

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in . ما المسافة بالقدم التي تقطعها الشاحنة بعد أن تدور إطاراتها ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$\text{قياس الزاوية هو } \frac{3}{4} \text{ الدورة الكاملة} \quad \theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

$$\begin{aligned} \text{صيغة طول القوس} \quad s &= r\theta \\ &= 33 \cdot \frac{3\pi}{2} \\ &\approx 155.5 \text{ in} \end{aligned}$$

بالتعويض عن r بـ 33 و θ بـ $\frac{3\pi}{2}$ باستخدام الآلة الحاسبة للتبسيط

بالقسمة على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

إذن الشاحنة قطعت مسافة 13 ft تقريباً بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.

تحقق من فهمك

(5) إذا كان طول قطر دائرة 9 cm، فأوجد طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله 60° . قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **4.7 cm تقريباً**

تنبيه

طول القوس تذكر أن تكتب قياس الزاوية بالراديان وليس بالدرجات عندما تحسب طول القوس. وتذكر أيضاً أن الدورة الكاملة تساوي 2π راديان.

تأكد

(4) إجابة ممكنة: 385° , -335°

ارسم كلاً من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي: (1-3) انظر الهامش. (5) إجابة ممكنة: 185° , -335°

(6) إجابة ممكنة: 260° , -460°

(1) 140° (2) -60° (3) 390°

المثالان 1, 2

مثال 3

في كلِّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

(4) 25° (5) 175° (6) -100°

مثال 4

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

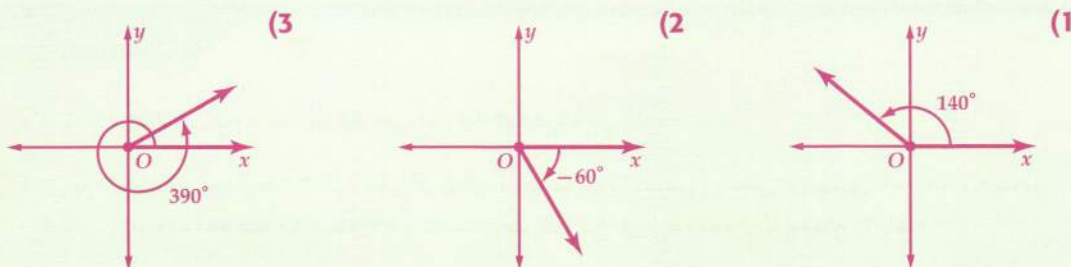
(7) 45° $\frac{\pi}{4}$ (8) 225° $\frac{5\pi}{4}$ (9) -40° $-\frac{2\pi}{9}$

مثال 5

(10) **تنس طاولة:** تحرك لاعب تنس طاولة في مسار على شكل قوس من دائرة. إذا كان طول نصف قطر دائرته هو 1.2 m، وزاوية دوران اللاعب تساوي 100° . فما طول هذا القوس؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **2.1 m**

168 الفصل 8 حساب المثلثات

إجابات:



المثالان 1, 2

ارسم كلًا من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي: (11-16) انظر الهامش.

- (11) 75° (12) 160° (13) -90°
(14) -120° (15) 295° (16) 510°

(17) **جهاز**: يتأرجح لاعب جمباز على جهاز عارضين، ليدور بزوايا قياسها 240° . ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي. انظر الهامش

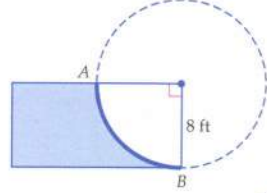
في كل مما يأتي. أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

- (18) 50° (19) 95° (20) 205°
(21) 350° (22) -80° (23) -195°

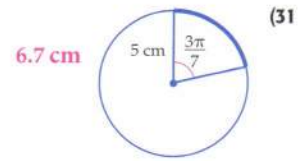
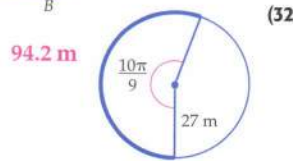
حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

- (24) 330° $\frac{11\pi}{6}$ (25) 150° $\frac{5\pi}{6}$ (26) $-\frac{\pi}{3}$ -60°
(27) -50° $-\frac{5\pi}{18}$ (28) 190° $\frac{19\pi}{18}$ (29) $-\frac{7\pi}{3}$ -420°

(30) أوجد طول القوس المحدد في الشكل المجاور. 12.6 ft تقريبًا



أوجد طول القوس المحدد في كل من الدائرتين الآتيتين، مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.



(33) **ساعات**: كم من الوقت يستغرق عقرب الدقائق في ساعة ليدور بزوايا قياسها 2.5π راديان؟ $1 \text{ h } 15 \text{ min}$

(34) **المزولة**: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية هذا الدرس. يدور الظل على القرص 15° كل ساعة.

- (a) بعد كم ساعة يدور الظل بزوايا قياسها $\frac{8\pi}{5}$ راديان؟ 19.2 h
(b) ما قياس الزاوية بالراديان التي يدورها الظل بعد مرور 5 ساعات؟ $\frac{5\pi}{12}$
(c) مزولة طول نصف قطرها 8 in ، ما طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور 14 ساعة؟ قَرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 29.3 in

في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة:

- (35) 620° (36) -400° (37) $-\frac{3\pi}{4}$ (38) $\frac{19\pi}{6}$

(39) **تمثيلات متعددة**: لديك النقطتان $D(6, 8)$ ، $C(6, 0)$.

(a) هندسيًا: ارسم المثلث $\triangle ECD$ حيث E هي نقطة الأصل. انظر الهامش.

(b) جبريًا: أوجد ظل $\angle CED$. $\tan \angle DEC = \frac{4}{3}$

(c) جبريًا: أوجد ميل \overline{ED} . $(\overline{ED} \text{ ميل}) = \frac{4}{3}$

(d) لفظيًا: ما العلاقة التي تستطيع استنتاجها بين الميل وظل الزاوية؟

الدرس 8-2 الزوايا وقياساتها 169

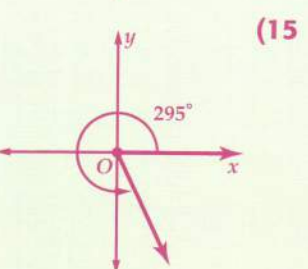
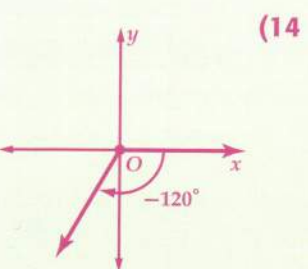
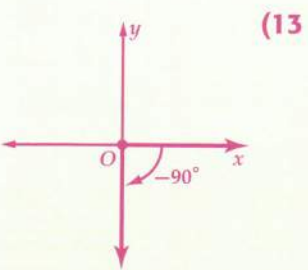
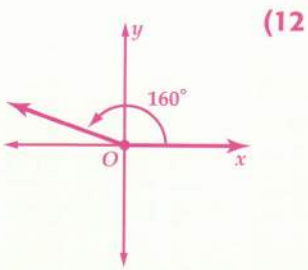
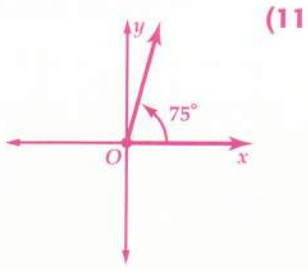
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-10 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات



(18) إجابة ممكنة:

 $410^\circ, -310^\circ$

(19) إجابة ممكنة:

 $455^\circ, -265^\circ$

(20) إجابة ممكنة: مثال 3

 $565^\circ, -155^\circ$

(21) إجابة ممكنة:

 $710^\circ, -10^\circ$

(22) إجابة ممكنة: مثال 4

 $280^\circ, -440^\circ$

(23) إجابة ممكنة:

 $165^\circ, -555^\circ$

(35) إجابة ممكنة: مثال 5

 $260^\circ, -100^\circ$

(36) إجابة ممكنة:

 $320^\circ, -40^\circ$

(37) إجابة ممكنة:

 $\frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}$

(38) إجابة ممكنة:

 $\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ 

الربط مع الحياة

استعملت المزولة قديمًا في المسجد الأقصى لمعرفة أوقات الصلاة.

(39d) إجابة ممكنة:

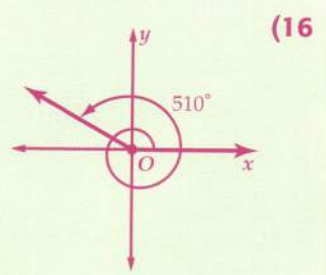
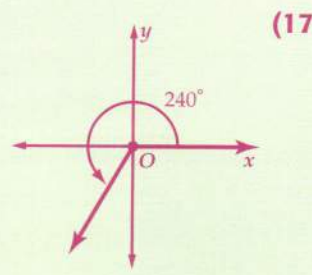
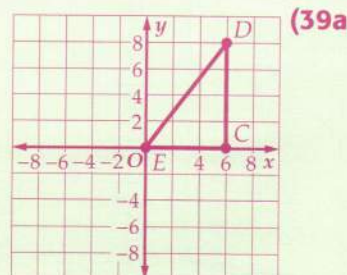
في المستوى الإحداثي، ظل الزاوية

المرسومة في الوضع القياسي

يساوي ميل ضلع انتهاء الزاوية.

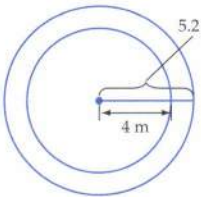
تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	46-58, 44, 11-32
ضمن المتوسط	46-58, 39-44, 11-37 فردي
فوق المتوسط	33-58



حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(40) $472.5^\circ \approx \frac{21\pi}{8}$ (41) $124^\circ \approx \frac{31\pi}{45}$ (42) $-200^\circ \approx -\frac{10\pi}{9}$ (46) $5 \approx 286.5^\circ \approx \frac{900}{\pi}$



(43) **أحصنة دوارة**، في مدينة ألعاب، تدور لعبة الأحصنة في دائرتين، الأولى داخلية طول نصف قطرها 4m والثانية خارجية طول نصف قطرها 5.2m. إذا كانت الأحصنة تدور 5 دورات في الدقيقة، فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

- (a) أوجد قياس الزاوية θ بالراديان التي يدورها حصان في ثانية واحدة. $\frac{\pi}{6}$
 (b) كم يزيد طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الخارجية على طول القوس الذي يصنعه حصان يدور في الدائرة الداخلية، وذلك بعد مرور ثانية واحدة؟ **0.6m تقريباً**

مسائل مهارات التفكير العليا

(44) **اكتشف الخطأ**، كتب كلٌّ من علي وأحمد عبارة تُمثّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

أحمد $(360 - x)^\circ$	علي $(x - 360)^\circ$
---------------------------	--------------------------

(45) **تحذّر**، مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم. $x = 2$

(46) **مسألة مفتوحة**، ارسم زاوية حادة في الوضع القياسي وسمّها. وأوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، بحيث تكونان مشتركتين في ضلع الانتهاء مع هذه الزاوية. **انظر الهامش.**

(47) **تبرير**، برهن صيغة طول القوس المقابل للزاوية المركزية. **انظر ملحق الإجابات.**

(44) **علي**؛ قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء يمكن الحصول عليه بإضافة أو طرح أحد مضاعفات 360° ، قام أحمد بطرح قياس الزاوية الأصلية من 360° . وهذا خطأ.

تنبيه!

اكتشف الخطأ : في السؤال 44 وضح للطلبة أنه إذا تم قياس الزاوية مع اتجاه عقارب الساعة فذلك يعني أن القياس x للزاوية هو كمية سالبة، وعليه فإن قياس الزاوية $(360 - x)^\circ$ سيكون أكبر من وليس أقل من 360° .

4 التقويم

علم سابق اطلب إلى الطلبة أن يصفوا كيف ساعدهم مفهوم الزوايا في المثلثات قائمة الذي تعلموه سابقاً على فهم توضيح الزوايا في الوضع القياسي في درس الحالي.

جاية :

(4) **إجابة ممكنة:**
 $440^\circ, -280^\circ$

تدريب على اختيار

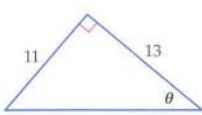
(49) **هندسة**، إذا كانت مساحة المثلث المجاور وحدة مربعة. فما طول الضلع XZ ؟ **C**

(48) إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$ فأوجد قيمة x . $-\frac{1}{2}$

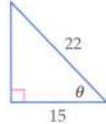
- A** $2\sqrt{34}$ **B** $4\sqrt{109}$ **C** $2\sqrt{109}$ **D** $4\sqrt{34}$

مراجعة تراكمية

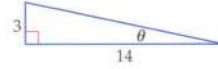
أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ في كلٍّ مما يأتي: **الدرس (8-1) (50-52) انظر ملحق الإجابات.**



(52)



(51)



(50)

حل كل معادلة مما يأتي: **الدرس (5-6)**

(55) $2 \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{x+1}$

(54) $11 \frac{9}{t-3} = \frac{t-4}{t-3} + \frac{1}{4}$

(53) $3, 2, a + 1 = \frac{6}{a}$

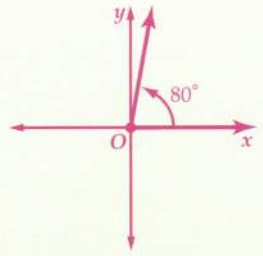
استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر في المثلثات القائمة الزاوية التي طول كلٍّ من ساقيها كما يأتي: **(مهارة سابقة)**

(58) $\sqrt{317}$ $a = 14, b = 11$

(57) $\sqrt{353}$ $a = 8, b = 17$

(56) $3\sqrt{41}$ $a = 12, b = 15$

170 الفصل 8 حساب المثلثات



تمثيلات متعددة : يستعمل الطلاب في السؤال 39 الهندسة الإحداثية، وحساب مثلثات، والجبر والتحليل؛ لتوضيح علاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية التي سنعها مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

تنوع التعليم

ضعن فوق

توسّع : هناك عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية معلومة. لذا اطلب إلى الطلبة كتابة عبارة جبرية تعبر عن قياس الزوايا المشتركة مع الزاوية التي قياسها 50° في ضلع الانتهاء. $50^\circ + k \cdot 360^\circ$ حيث k عدد صحيح.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 8

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11)

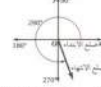
الاسم: _____ التاريخ: _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا وقياساتها

الزوايا المرسومة في الوضع القياسي، أتمد الزاوية بتناسق مستقيماً، ويُعطى قياس الزاوية في الوضع القياسي بـ مقدار واتجاه الدوران من ضلع الابتدأ (الضلع الذي يطبق على المحور x) إلى ضلع الانتهاء، ويكون القياس موجباً إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة، وسلباً إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة. والزاوية التي في الوضع القياسي، ولها ضلع الانتهاء السلب، تسمى زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء.

رسم زاوية قياسها 290° في الوضع القياسي:



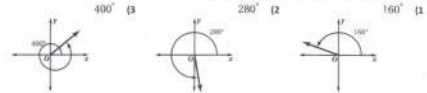
يسهل محور x والسالب دورانياً موجباً بقياس 270° ورسم زاوية قياسها 290° ، نُقر ضلع الانتهاء 20° زيادة في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.

أوجد زاويتين إحداثهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتريتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل ما يأتي:

- (a) 250° زاوية بقياس موجب: $250^\circ + 360^\circ = 610^\circ$
 زاوية بقياس سالب: $250^\circ - 360^\circ = -110^\circ$
 (b) -140° زاوية بقياس موجب: $-140^\circ + 360^\circ = 220^\circ$
 زاوية بقياس سالب: $-140^\circ - 360^\circ = -500^\circ$

تدريبات

رسم الزوايا المُعطى قياسها في كل ما يأتي في الوضع القياسي:



أوجد زاويتين إحداثهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب، ومشتريتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة في كل ما يأتي:

- (a) 65° (b) 425° (c) 285°
 (d) -295° (e) -435° (f) 590°
 (g) 420° (h) -300° (i) 130°

القطر: 11، حساب التفاضل

11

القطر: 11، حساب التفاضل

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (12)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا وقياساتها

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس، يمكن أن تُقاس الزوايا بالدرجات أو بالراديان، ولها وحدتان مريضتان بطرق القوس، والراديان الواحد هو قياس زاوية θ في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء θ قوساً من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويربط القياس من خلال المعادلتين: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ و $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

القياس بالراديان	القياس بالدرجات
$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$	للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، احذف قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$
$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، احذف قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$
طول القوس	طول القوس من الدائرة s المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ أي $s = r\theta$.

جدّ قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وللكثيرة بالراديان إلى الدرجات:

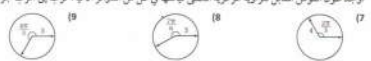
- (a) $45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
 (b) $5\pi \text{ rad} = 5\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 900^\circ$
 (c) $135^\circ = 135^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
 (d) $3\pi \text{ rad} = 3\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 540^\circ$
 (e) $5 \text{ rad} = 5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 11.78^\circ$

تدريبات

جدّ قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وللكثيرة بالراديان إلى الدرجات:

- (1) 140° (2) -260° (3) -108° (4) -75°
 (5) $7\pi/6$ (6) 380° (7) $19\pi/9$

أوجد طول القوس المقابل للزاوية المركزية المعطى قياسها في كل من الدوائر الآتية. قرب إلى أقرب جزء من عشرة:



(a) نصف القطر: 8.4 وحدة (b) نصف القطر: 11.0 وحدة (c) نصف القطر: 12.6 وحدة

القطر: 18، حساب التفاضل

12

القطر: 18، حساب التفاضل

تدريبات حل المسألة (14)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-2 تدريبات حل المسألة

الزوايا وقياساتها

(1) حزمة الأضلاع، حزمة دوارة تحتوي على 20 شعاعاً مركبة بالأعداد من 1 إلى 20 على التوالي، وتكمل هذه الحزمة دورة واحدة حول مركزها كل 40 ثانية.



$9.4 \text{ in} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{2} = 14.8 \text{ in}$

- (a) إذا كانت المقاعد على مسافات متساوية، فما قياس الزاوية المركزية التي يكوّنها المقعدان 1 و 8 بالدرجات؟
 (b) ما سرعة الحزمة الدوارة بالدورات في الدقيقة؟
 (c) ما سرعة الحزمة الدوارة بالراديان في الدقيقة؟
 (d) ركبت طفل الحزمة الدوارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟
 (e) ما سرعة الحزمة الدوارة بالدورات في الدقيقة؟
 (f) ركبت طفل الحزمة الدوارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟
 (g) ما سرعة الحزمة الدوارة بالدورات في الدقيقة؟
 (h) ركبت طفل الحزمة الدوارة مدة 6 دقائق، فما قياس الزاوية التي دارها الطفل بالراديان؟

القطر: 18، حساب التفاضل

14

القطر: 18، حساب التفاضل

تدريبات المهارات (13)

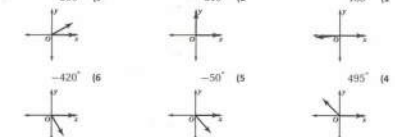
دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-2 تدريبات المهارات

الزوايا وقياساتها

رسم كل من الزوايا المعطى قياسها في الوضع القياسي:



أوجد زاويتين إحداثهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، ومشتريتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة فيما يأتي:

- (a) 185° (b) 810° (c) 390° (d) 495°
 (e) -50° (f) -420° (g) 45° (h) 405°
 (i) 370° (j) -350° (k) 10° (l) -450°
 (m) 270° (n) -90° (o) $9\pi/2$ (p) $3\pi/2$ (q) $5\pi/2$ (r) $2\pi/3$
 (s) $4\pi/3$ (t) $8\pi/6$ (u) $11\pi/6$ (v) $13\pi/6$ (w) $11\pi/6$
 (x) 130° (y) $13\pi/18$ (z) 210° (aa) $7\pi/6$
 (ab) 30° (ac) 90° (ad) 60° (ae) 120°
 (af) $2\pi/3$ (ag) 270° (ah) 150° (ai) $5\pi/6$
 (aj) 225° (ak) $5\pi/4$ (al) 120° (am) $2\pi/3$
 (an) -210° (ao) $7\pi/6$ (ap) -135° (aq) $-3\pi/4$

القطر: 18، حساب التفاضل

13

القطر: 18، حساب التفاضل

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 8-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

الدرس 8-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
إيجاد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

ما بعد الدرس 8-3

تمثيل دوال الظل، ظل التمام، القاطع، وقاطع التمام بيانياً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

- في أي ربع تقع الزاوية 20° في اتجاه عقارب الساعة؟ **الربع الرابع**
- في أي ربع تقع الزاوية 200° في عكس اتجاه عقارب الساعة؟ **الربع الثالث**
- كيف يمكن التعبير عن موقع الزاوية التي قياسها 20° في اتجاه عقارب الساعة باستعمال التدوير في عكس اتجاه عقارب الساعة؟

 340° عكس اتجاه عقارب الساعة

لماذا؟

تنتشر العجلة الدوارة في كُثريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من 90° .الدوال المثلثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا قياساتها تزيد عن 90° أو تقل عن 0° .

فيما سبق:

درست إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

والآن:

- أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

المضردات:

الزاوية الربعية

quadrantal angle

الزاوية المرجعية

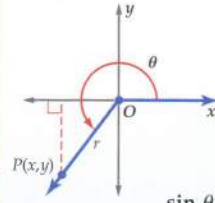
reference angle

www.obeikaneducation.com

أضف إلى
مطوبتك

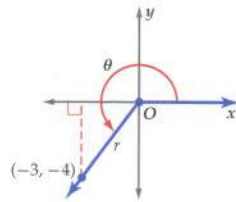
مفهوم أساسي

الدوال المثلثية للزوايا

لتكن زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P . $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} & \tan \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ \csc \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 & \sec \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0 \end{aligned}$$

مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعلومية نقطة

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-3, -4)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوال المثلثية الست.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} & \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} & \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4} & \sec \theta &= \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} & \cot \theta &= \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6, 2)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ . انظر الهامش.

الدرس 8-3 الدوال المثلثية للزوايا 171

مصادر الدرس 8-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (174)	• تنويع التعليم، ص (174)	
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

إجابة: (تحقق من فهمك):

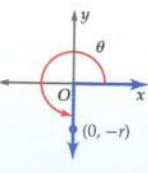
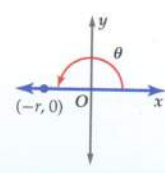
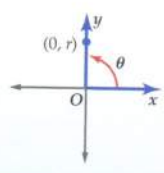
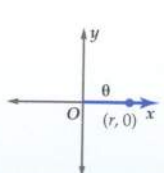
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = -\frac{1}{3}, \quad (1) \\ \csc \theta &= \sqrt{10}, \sec \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = -3 \end{aligned}$$

إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y ، فإن الزاوية θ تُسمى **زاوية ربعية**.

إرشادات للدراسة

الزوايا الربعية
قياس أي زاوية ربعية
هو من مضاعفات 90°
أو $\frac{\pi}{2}$.

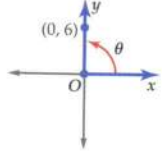
مفهوم أساسي الزوايا الربعية

$\theta = 270^\circ$ $\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ 	$\theta = 180^\circ$ $\theta = \pi \text{ rad}$ 	$\theta = 90^\circ$ $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ 	$\theta = 0^\circ$ $\theta = 0 \text{ rad}$ 
---	---	--	---

مثال 2 الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, 6)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y ، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي 90° . استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوال المثلثية.



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$$

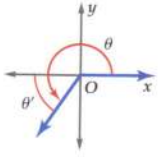
$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرفة)}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرفة)}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$$

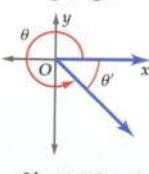
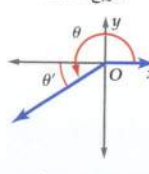
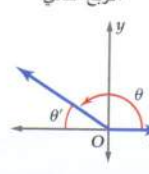
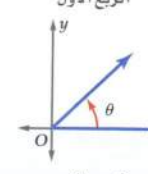
تحقق من فهمك

2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2, 0)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .



الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x . والجدول الآتي يبين قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي الزوايا المرجعية

الربع الرابع  $\theta' = 360^\circ - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$	الربع الثالث  $\theta' = \theta - 180^\circ$ $\theta' = \theta - \pi$	الربع الثاني  $\theta' = 180^\circ - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	الربع الأول  $\theta' = \theta$
---	---	---	--

الدوال المثلثية للزوايا

مثال 1 يبين كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية لمعرفة نقطة يمر بها ضلع الانتهاء.

مثال 2 يبين كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاوية ربعية.

التقويم التكويني:

ستعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثالان إضافيان

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ

المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(8, -15)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}; \cos \theta = \frac{8}{17};$$

$$\tan \theta = -\frac{15}{8}; \sec \theta = \frac{17}{8};$$

$$\csc \theta = -\frac{17}{15}; \cot \theta = -\frac{8}{15}$$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ

المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, -2)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$\sin \theta = -1; \cos \theta = 0;$$

$$\tan \theta \text{ غير معرف}$$

$$\csc \theta = -1; \cot \theta = 0;$$

$$\sec \theta \text{ غير معرف}$$

قراءة الرياضيات

الرمز θ'

θ' يقرأ: ثيتا شرطة.

تنبيه!

توضيح أخطاء مفاهيمية: في المثال 1، انتبه إلى الطلبة الذين يعتقدون أن r يجب أن تكون عددًا سالبًا إذا كانت x أو y سالبة.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابات الطلبة: اعرض

على الطلبة عددًا من الأمثلة

مثل $\cos 120^\circ, \csc(-35^\circ)$

$(\tan(-165^\circ))$. واسأل إن كانت

قيمة كل من الدوال السابقة موجبة

أم سالبة؟ واطلب إليهم أن يرمزوا

إلى الإجابة الموجبة بالرمز A وإلى

الإجابة السالبة بالرمز B .

إيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من 360° أو أقل من 0° ، استعمل زاوية بقياس موجب محصور بين 0° ، 360° ، ومشاركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ .

مثال 3 إيجاد الزوايا المرجعية

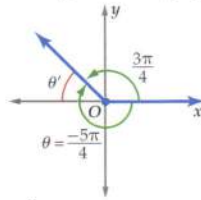
ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a) 210°

(b) $-\frac{5\pi}{4}$

الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء

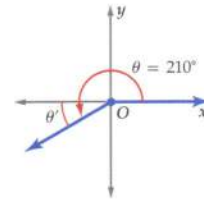
هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$

يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



ضلع الانتهاء للزاوية 210°

يقع في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$

تحقق من فهمك (3A, 3B) انظر الهامش

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(3A) -110°

(3B) $\frac{9\pi}{3}$

لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ . يمكن استعمال الزوايا المرجعية وتحدد إشارة كل دالة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ . وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي

إيجاد قيم الدوال المثلثية

أضف إلى طويك

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin \theta, \csc \theta: +$	$\sin \theta, \csc \theta: +$
$\cos \theta, \sec \theta: +$	$\cos \theta, \sec \theta: -$
$\tan \theta, \cot \theta: +$	$\tan \theta, \cot \theta: -$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta: -$	$\sin \theta, \csc \theta: -$
$\cos \theta, \sec \theta: -$	$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: +$	$\tan \theta, \cot \theta: -$

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ' .

الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

يمكن استعمال قيم الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ التي تعلمتها في الدرس 8-1.

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

ظل التمام	القاطع	قاطع التمام	الظل	جيب التمام	الجيب
$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30^\circ = 2$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\cot 45^\circ = 1$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60^\circ = 2$	$\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الدرس 8-3 الدوال المثلثية للزوايا 173

الزوايا المرجعية

مثال 3 يبيّن كيفية إيجاد الزاوية المرجعية لزاوية معلومة.

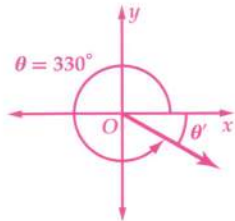
مثال 4 يبيّن كيفية استعمال الزاوية المرجعية في حساب قيم الدوال المثلثية.

مثال 5 يبيّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة تتعلق بالزوايا المرجعية.

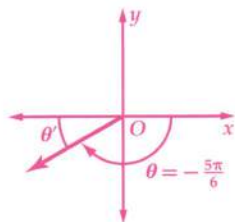
مثال إضافي

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a) 330°

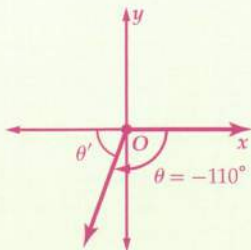


(b) $\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}$

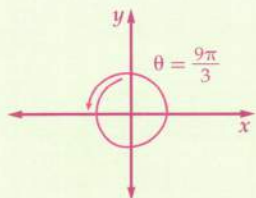


إجابات (تحقق من فهمك)

(3A) 70°



(3B)



تنبيه!

تجنب الأخطاء: قد يجد بعض

الطلبة عند قيامهم بحساب قيم الدوال المثلثية لزاوية ما أنه من المفيد رسم الزاوية في الوضع القياسي، ثم إسقاط عمود على المحور x لتكوين مثلث قائم الزاوية. لذا، يبيّن لهم أنه كلما زادت قيمة الزاوية من 90° إلى 180° فإن قيمة y تقترب من 0، ويتقارب طول الضلعين الآخرين.

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كلِّ ممَّا يأتي:

$$\cos 240^\circ \quad (\text{a})$$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 240° في الربع الثالث.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$\theta = 240^\circ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

دالة جيب التمام سالبة في الربع الثالث $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\csc \frac{5\pi}{6} \quad (\text{b})$$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

دالة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني $\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ = \csc 30^\circ$$

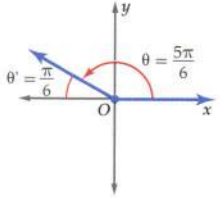
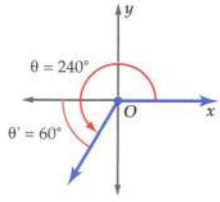
$$\csc 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كلِّ ممَّا يأتي:

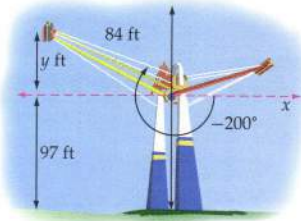
$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{5\pi}{6} \quad (\text{4B})$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135^\circ \quad (\text{4A})$$



استعمال الدوال المثلثية

مثال 5 من واقع الحياة



أرأيت: إذا كان طول كل ذراع من الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft. أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضح في الشكل.

قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية 200° :
 $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$

$$180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\text{قياس الزاوية المرجعية} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\text{دالة الجيب} \quad \sin 20^\circ = \frac{y}{84}$$

$$\theta = 20^\circ, r = 84 \quad \sin 20^\circ = \frac{y}{84}$$

$$\text{بضرب كلا الطرفين في 84} \quad 84 \sin 20^\circ = y$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة } y \quad 28.7 \approx y$$

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريباً، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو $28.7 + 97$ ويساوي 125.7 ft تقريباً.

تحقق من فهمك

5 أرأيت: أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft وقياس زاوية الدوران 195° تقريباً 106.6 ft تقريباً



الربط مع الحياة

في بعض أنواع الأراجيح الدوارة يشعر الراكب بانعدام الوزن في لحظة ما، حيث تصل سرعة الأرجوحة إلى 60 ميلاً في الساعة في كلا الاتجاهين.

مثالان إضافيان

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كلِّ ممَّا يأتي:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 135^\circ \quad (\text{a})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cot \frac{7\pi}{3} \quad (\text{b})$$

أرأيت: أوجد الارتفاع لنهاية الذراع الأصفر في المثال 5 إذا كان طول هذا الذراع 89 قدمًا وارتفاع محور الدوران 99 قدمًا، وقياس زاوية الدوران 200° .

$$y = 89 \sin 20^\circ = 30.4 \text{ ft};$$

$$30.4 + 99 = 129.4 \text{ ft}$$

المحتوى الرياضي

الزوايا المرجعية: قُدِّمت الدوال المثلثية في الدرس 1-8 للزوايا الحادة فقط. وتمكَّن الزوايا المرجعية من حساب قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. علمًا بأن جميع الزوايا المرجعية هي زوايا حادة.

إجابات

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad (\text{1})$$

$$\tan \theta = 2, \csc \theta = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\sec \theta = \sqrt{5}, \cot \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}, \quad (\text{2})$$

$$\tan \theta = \frac{15}{8}, \csc \theta = -\frac{17}{15},$$

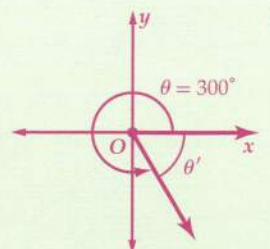
$$\sec \theta = -\frac{17}{8}, \cot \theta = \frac{8}{15}$$

$$\sin \theta = -1, \cos \theta = 0, \quad (\text{3})$$

$$\tan \theta = \text{غير معرف}, \csc \theta = -1,$$

$$\sec \theta = \text{غير معرف}, \cot \theta = 0$$

$$60^\circ \quad (\text{4})$$



تنوع التعليم

دون ضمن

المتعلمون السمعيون: وزع الطلبة في مجموعات صغيرة لابتكار نشيد أو مقطوعة شعرية تساعد زملاءهم على تذكر قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة.

المثالان 1, 2

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ : (1-3) انظر الهامش.

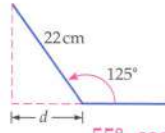
(1) $(1, 2)$ (2) $(-8, -15)$ (3) $(0, -4)$

3 مثال ارسم كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها: (4-6) انظر الهامش.

(4) 300° (5) 115° (6) $-\frac{3\pi}{4}$

4 مثال أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(7) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{3\pi}{4}$ (8) $-\sqrt{3} \tan \frac{5\pi}{3}$ (9) $-2 \sec 120^\circ$ (10) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 300^\circ$



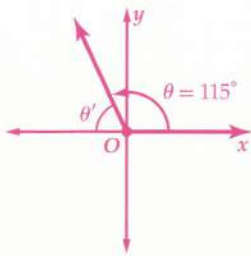
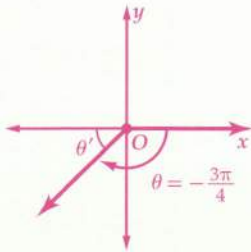
11 تقنية فتح سعيد حاسوبه المحمول الذي طول شاشته 22 cm فشكل زاوية قياسها 125° كما هو مبين في الشكل المجاور.

(a) أعد رسم الشكل السابق في المستوى الإحداثي بحيث تكون الزاوية 125° مرسومة في الوضع القياسي. انظر ملحق الإجابات.

(b) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 125° ، ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد d .

(c) استعمل هذه الدالة، لإيجاد قيمة d . قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. 12.6 cm

إجابات:

5) 65° 6) $\frac{\pi}{4}$ 

(12) $\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13},$

$\tan \theta = \frac{12}{5}, \csc \theta = \frac{13}{12},$

$\sec \theta = \frac{13}{5}, \cot \theta = \frac{5}{12}$

(13) $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5},$

$\tan \theta = -\frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4},$

$\sec \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = -\frac{3}{4}$

(14) $\sin \theta = 0, \cos \theta = 1, \tan \theta = 0,$

$\csc \theta$ غير معرّف, $\sec \theta = 1,$

غير معرّف $\cot \theta$

(15) $\sin \theta = -1, \cos \theta = 0,$

$\tan \theta$ غير معرّف, $\csc \theta = -1,$

$\sec \theta$ غير معرّف $\cot \theta = 0$

(16) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$

$\tan \theta = -\frac{1}{2}, \csc \theta = -\sqrt{5},$

$\sec \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot \theta = -2$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمر بإحدى النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ : (12-17) انظر الهامش.

(12) $(5, 12)$ (13) $(-6, 8)$ (14) $(3, 0)$

(15) $(0, -7)$ (16) $(4, -2)$ (17) $(-9, -3)$

3 مثال ارسم كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها. (18-23) انظر ملحق الإجابات.

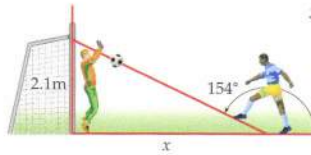
(18) 195° (19) 285° (20) -250°

(21) $\frac{7\pi}{4}$ (22) $-\frac{\pi}{4}$ (23) 400°

4 مثال أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(24) $-\frac{1}{2} \sin 210^\circ$ (25) $-1 \tan 315^\circ$ (26) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 150^\circ$ (27) $-\sqrt{2} \csc 225^\circ$

(28) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{4\pi}{3}$ (29) $\frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{3}$ (30) $1 \cot \frac{5\pi}{4}$ (31) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sec \frac{11\pi}{6}$



32 كرة قدم، يركل لاعب كرة قدم الكرة نحو الهدف من مسافة x m

عن حارس المرمى كما هو مبين في الشكل المجاور، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع 2.1 m من سطح الأرض.

(a) أوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية 154° . ثم اكتب دالة مثلثية يمكن استعمالها في إيجاد المسافة بين اللاعب

وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة. $26^\circ, \tan 26^\circ = \frac{2.1}{x}$

(b) ما المسافة التقريبية بين اللاعب وحارس المرمى عندما ركل اللاعب الكرة؟ 4.3 m تقريباً

175 الدرس 8-3 الدوال المثلثية للزوايا

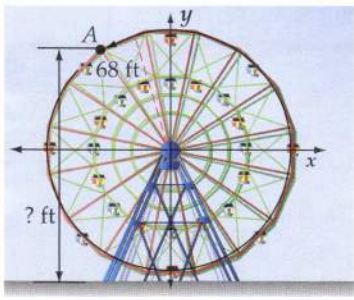
تنوع الواجبات المنزلية

الأُسئلة	المستوى
45-58, 12-32	دون المتوسط
45-58, 34-42 زوجي, 13-33 فردي	ضمن المتوسط
33-58	فوق المتوسط

(17) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$

$\tan \theta = \frac{1}{3}, \csc \theta = -\sqrt{10},$

$\sec \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \cot \theta = 3$



33 عجلات دوارة: في إحدى مدن الألعاب عجلة دوارة طول نصف قطرها 68 ft وترتفع عن سطح الأرض 15 ft. بعد جلوس الشخص في العربة السفلية دارت العجلة بزاوية قياسها 202.5° عكس حركة عقارب الساعة قبل أن تتوقف. فكم يكون ارتفاع هذه العربة عن سطح الأرض عندما تتوقف العجلة عن الدوران؟ **145.8 ft**

4 التقويم:

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلبة إلقاء نظرة على الدرس 8-4 وكتابة تصوراتهم حول ارتباط ما تعلموه في الدرس الحالي بالفكرة الرئيسية للدرس اللاحق.

التقويم التكويني:

تحقق من فهم الطلاب للدروس من 8-1 إلى 8-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}, (34)$$

$$\csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, (35)$$

$$\csc \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

$$\cot \theta = -\frac{3}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{15}{17}, \tan \theta = \frac{15}{8}, (36)$$

$$\csc \theta = -\frac{17}{15}, \sec \theta = -\frac{17}{8},$$

$$\cot \theta = \frac{8}{15}$$

$$\sin \theta = -\frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, (37)$$

$$\csc \theta = -\frac{13}{5}, \sec \theta = \frac{13}{12},$$

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$

(44) لا؛ لأن الزاوية المرجعية في هذه الحالة تكون 45° ، وحتى يكون الجيب موجبًا والظل سالبًا يجب أن تقع الزاوية المرجعية في الربع الثاني، ولذلك فإن قياس الزاوية يجب أن يكون 135° أو أية زاوية لها ضلع الانتهاء نفسه.

(45) غير صحيحة؛ لأن:

$$3 \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

(46) إجابة ممكنة: $\theta = -200^\circ$

تدريب على اختبار

(48) إذا كان مجموع عددين 21 والفرق بينها 3،

فما ناتج ضربهما؟ **108**

(49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$ ؟ **D**

35 - 12i D

36 - i C

36 - 12i B

-12i A

مراجعة تراكمية

حوّل قياس كل زاوية مكتوبة بالراديان فيما يأتي إلى الدرجات: **الدرس (8-2)**

$$-765^\circ - \frac{17}{4}\pi (52)$$

$$330^\circ \frac{11}{6}\pi (51)$$

$$240^\circ \frac{4}{3}\pi (50)$$

حلّ كلّ من المعادلات الآتية علمًا بأن جميع الزوايا حادة: **الدرس (8-1)**

$$66.0^\circ \tan C = \frac{9}{4} (55)$$

$$3 \sin 30^\circ = \frac{b}{6} (54)$$

$$40.1^\circ \cos A = \frac{13}{17} (53)$$

أوجد قيمة x في كلّ مما يأتي: **الدرس (5-6)**

$$-4 \frac{5}{x+8} = \frac{15}{2x+20} (58)$$

$$9 \frac{x+5}{x-1} = \frac{7}{4} (57)$$

$$6 \frac{x+2}{18} = \frac{x-2}{9} (56)$$

176 الفصل 8 حساب المثلثات

(47) إجابة ممكنة: ارسم الزاوية وحدد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية. ثم استعمل القاعدة المناسبة لإيجاد قياس زاويتها المرجعية θ . (الزاوية المرجعية هي زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x). ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية. ثم استعمل القاعدة المناسبة لإيجاد قياس زاويتها المرجعية θ . (الزاوية المرجعية هي زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x). ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

المناسبة لإيجاد قياس زاويتها المرجعية θ . (الزاوية المرجعية هي زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x). ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

الزاوية θ والمحور x). ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

ثم أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ . وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

وأخيرًا استعمل الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.

الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لتحديد إشارة الدالة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون **دون المتوسط** **ضمن ضمن المتوسط** **فوق فوق المتوسط**

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (17) **دون**

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 **تدريبات إعادة التعليم**
الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية. إذا كانت θ زاوية غير رجيحة، ومرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين شعاع الاتجاه θ والمحور x .

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\theta = \theta'$	$\theta = 180^\circ - \theta'$ ($\theta' = 180^\circ - \theta$)	$\theta = 180^\circ + \theta'$ ($\theta' = \theta - 180^\circ$)	$\theta = 360^\circ - \theta'$ ($\theta' = 360^\circ - \theta$)

قاعدة الزاوية المرجعية

رسم زاوية قياسها 205° في الربع الثاني. لم يوجد زاويتها المرجعية القياسي، لم يوجد زاويتها المرجعية.

رسم كل زاوية بما يأتي في الوضع القياسي، لم يوجد زاويتها المرجعية:

(1) 155° (2) 230° (3) $4\pi/3$ (4) $\pi/6$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(5) $\tan 330^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\cos \frac{11\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (7) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ (8) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

المصدر: التتالي الثاني، الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات إعادة التعليم (16) **دون**

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 **تدريبات إعادة التعليم**
الدوال المثلثية للزوايا

الدوال المثلثية للزاوية θ لنكون θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، ولنكن النقطة $P(x, y)$ تقع على شعاع الاتجاه في الوضع القياسي لها، باستعمال نظرية فيثاغورس، يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل الممددين لنقطة الأصل والنقطة $P(x, y)$ فيكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة فيما يأتي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$ $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

إذا كان شعاع الاتجاه للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-5, 5\sqrt{2})$ ، فأوجد قيم الدوال الستة للزاوية θ .

نظرية فيثاغورس: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 50} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

استعمل قيم الدوال الست للزاوية θ مع $x = -5, y = 5\sqrt{2}, r = 5\sqrt{3}$ لإيجاد قيم الدوال الستة للزاوية θ :

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{2}}{-5} = -\sqrt{2}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{-5} = -\sqrt{3}$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

تدريبات

أوجد قيم الدوال الست للزاوية θ مع ما يأتي من شعاع الاتجاه للنقطة في كل ما يأتي:

(1) $(4, 4)$ (2) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (3) $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

(4) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (5) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (6) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(7) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (8) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (9) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

(10) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (11) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (12) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(13) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (14) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (15) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (16) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(17) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (18) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (19) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (20) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

المصدر: التتالي الثاني، الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات حل المسألة (19) **دون ضمن فوق**

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 **تدريبات حل المسألة**
الدوال المثلثية للزوايا

1 أجهزة لاسلكية، جهاز إرسال وإستقبال لاسلكيان، يتعد كل منهما 2 km عن تيم. وقياس الزاوية المحصورة بين الخطين الواسلين من الجهازين إلى المقيم 120° . إذا كانت النقطة $(2, 0)$ تمثل موقع الجهاز الأول بالنسبة للمخيم، فما النقطة التي تمثل موقع الجهاز الثاني بالنسبة للمخيم؟

2 ساعة، إذا كان يتدول ساعة حائط يتحرك بزاوية 120° على فوس دائري، مع ما يأتي من قياس الزاوية التي يمسحها يتدول بمرور ساعة بالعلامة $(\frac{\pi}{3}, 5)$ $\theta = 0.3 \cos \theta = 5$ ، حيث: الزمن بالتوازي. أوجد قياسات الزوايا بالدرجات المقابلة للقيم: $0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 0, -0.18, 0.28, -0.28, 0.16, 0.02, -0.20$

3 عجلة دوارة، تركيب وليد عجلة دوارة نصف قطرها 60 m، وارتفاع أخفض عربة عن الأرض فيها 0.5 m. إذا تحركت العجلة عندما كان وليد في أخفض عربة، ودار بزاوية مقدارها 210.5° ، ثم توقفت العجلة، فكم كان ارتفاع عربة وليد عن الأرض عندما توقفت؟

4 كرة قدم، ركب لاعب كرة قدم في اتجاه حائط، فارتدت الكرة عنه بزاوية قياسها 40° . ما بُعد الكرة عن الحائط عندما قُطعت مسار ارتدادها؟

5 طائرة ورقية، العادة: $R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32} + 15 \cos \theta$. لتغير عن المسافة التي تغطيها طائرة ورقية عندما تسير بسرعة ابتدائية 16 قدم/ثانية بزاوية قياسها θ مع الأرض.

6 إذا قُطعت الطائرة بسرعة ابتدائية مقدارها 15 قدم/ثانية بزاوية قياسها 25° ، فما المسافة التي تسطعها؟

7 قُطعت طائرة مقاتلة وراقبت بسرعة ابتدائية مقدارها 10 أقدام / ثانية لكل منها، إحداهما بزاوية قياسها 15° والأخرى بزاوية قياسها 45° ، فأيها مسطح مسافة أكبر من الأخرى؟

8 الطائرة التي قُطعت بزاوية قياسها 15° .

المصدر: التتالي الثاني، الفصل 8، حساب التفاضل

تدريبات المهارات (18) **دون ضمن فوق**

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-3 **تدريبات المهارات**
الدوال المثلثية للزوايا

إذا كان شعاع الاتجاه للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، يمر بالنقطة المعطاة، فأوجد قيم الدوال الستة للزاوية θ في كل ما يأتي:

(1) $(5, 12)$ (2) $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ (3) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (4) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (5) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

(6) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (7) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (8) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (9) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

(10) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (11) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (12) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (13) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

(14) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (15) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (16) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (17) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (18) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(19) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (20) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (21) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (22) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(23) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (24) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (25) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (26) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(27) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (28) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (29) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (30) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(31) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (32) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (33) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (34) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(35) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (36) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (37) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (38) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(39) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (40) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (41) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (42) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(43) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (44) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (45) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(47) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (48) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (49) $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ (50) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية بما يأتي:

(1) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ (2) $\cos 270^\circ = 0$ (3) $\tan 135^\circ = -1$ (4) $\csc 30^\circ = 2$

(5) $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$ (6) $\cot 90^\circ = 0$ (7) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (8) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(9) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (10) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (11) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (12) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

(13) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (14) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (15) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (16) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(17) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (18) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (19) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (20) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(21) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (22) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (23) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (24) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(25) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (26) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (27) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (28) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(29) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (30) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (31) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (32) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

(33) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (34) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (35) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (36) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(37) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (38) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (39) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (40) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(41) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (42) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (43) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (44) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(45) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (46) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (47) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (48) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(49) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (50) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (51) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (52) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

(53) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (54) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (55) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (56) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(57) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (58) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (59) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (60) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(61) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (62) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (63) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (64) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(65) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (66) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (67) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (68) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(69) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (70) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (71) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (72) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

(73) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (74) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (75) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (76) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(77) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (78) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (79) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (80) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(81) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (82) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (83) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (84) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

(85) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (86) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (87) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (88) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(89) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (90) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (91) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (92) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

(93) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (94) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (95) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (96) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$

(97) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (98) $\cot \frac{\pi}{4} = 1$ (99) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (100) $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

المصدر: التتالي الثاني، الفصل 8، حساب التفاضل

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-4

إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية، وقياسات زواياها.

الدرس 8-4

إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمال قانون الجيوب في حل المثلثات.

ما بعد الدرس 8-4

استعمال قانون جيوب التمام في حل المثلثات.

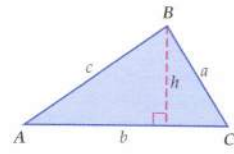
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

وأسأل:

- ما قياس الزاوية المقابلة للضلع الواصل بين الفوهتين واهو ونوكان؟ وبين واهو وواباش؟ 102° ; 23°
- ما قياس الزاوية المقابلة للضلع الواصل بين وواباش ونوكان؟ 55°
- ما المسافة بين الفوهتين واهو وواباش؟ 1.2 km
- أي فوهة تقع على رأس الزاوية الكبرى؟ وواباش



يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلث، إذا كان معلوماً لديك طولاً أي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مفهوم أساسي مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز: $\frac{1}{2} bc \sin A = \text{المساحة}$ $\frac{1}{2} ac \sin B = \text{المساحة}$ $\frac{1}{2} ab \sin C = \text{المساحة}$

صيغة مساحة المثلث بالتعويض عن h بـ $c \sin A$ بالتبسيط

المساحة = $\frac{1}{2} bh$ $\sin A = \frac{h}{c}$ أي $h = c \sin A$ في المثلث المجاور

المساحة = $\frac{1}{2} b(c \sin A)$ $\frac{1}{2} bc \sin A = \text{المساحة}$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

$\triangle ABC$ فيه: $a = 8$, $b = 9$, $C = 104^\circ$

المساحة = $\frac{1}{2} ab \sin C$

بالتعويض $\frac{1}{2} (8)(9) \sin 104^\circ =$

بالتبسيط $34.9 \approx$

إذن المساحة تساوي 34.9 cm^2 تقريباً

تحقق من فهمك

(1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31^\circ$, $b = 18 \text{ m}$, $c = 22 \text{ m}$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة. 102.0 m^2

الدرس 8-4 قانون الجيوب 177

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها.

والآن:

- أجد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات.

المفردات:

- قانون الجيوب Law of Sines
- حل المثلث solving a triangle

www.obeikaneducation.com

مصادر الدرس 8-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (180)	• تنويع التعليم، ص (180, 183)	• تنويع التعليم، ص (180, 183)
كتاب التمارين	• ص (24)	• ص (24)	• ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات: يمكن استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلث في اشتقاق قانون الجيوب، الذي يُبين العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اضف الى
مطوية

مفهوم أساسي قانون الجيوب

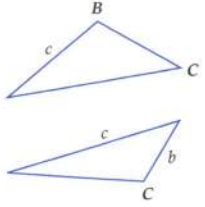
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

حل المثلث يعني استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.

ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:

- معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه (زاوية - زاوية - ضلع (حالة AAS)، أو زاوية - ضلع - زاوية (حالة ASA))
- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (ضلع - ضلع - زاوية (حالة SSA))



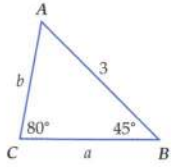
مثال 2 حل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلعه

حل $\triangle ABC$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180 - (80 + 45) = 55^\circ$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلٍّ من الطولين: a, b . اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلٍّ منهما.



$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{b} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$b = \frac{3 \sin 45^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$b \approx 2.2$$

قانون الجيوب

بالتعويض

بالحل بالنسبة لكل متغير

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 55^\circ}{a} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$a = \frac{3 \sin 55^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$a \approx 2.5$$

$$A = 55^\circ, a \approx 2.5, b \approx 2.2, \text{ إذن}$$

تحقق من فهمك

$$N = 73^\circ, p \approx 3.5, q \approx 4.7$$

2 حل $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 42^\circ, Q = 65^\circ, n = 5$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

إرشادات للدراسة

علاقات بديلة

يمكن كتابة قانون الجيوب كما يأتي:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبذلك يمكنك استعمال العلاقات الآتيتين لحل المثلث في المثال 2.

$$\frac{a}{\sin 55^\circ} = \frac{3}{\sin 80^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 80^\circ}$$

إيجاد مساحة المثلث

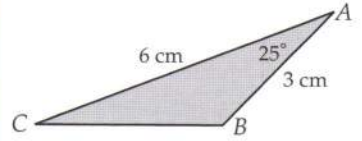
مثال 1 يبين كيفية إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين والزوايا المحصورة بينهما.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. 3.8 cm^2



استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات

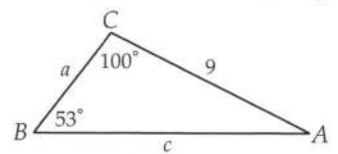
مثال 2 يبين كيفية استعمال قانون الجيوب لحل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلعه.

مثال 3 يبين كيفية تحديد عدد حلول مثلث، ثم استعمال قانون الجيوب لإيجاد الحلول.

مثال 4 يبين كيفية استعمال قانون الجيوب لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

حل $\triangle ABC$. قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.



$$A = 27^\circ, a \approx 5.1, c \approx 11.1$$

تنبيه!

توضيح أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن قانون الجيوب يستعمل لحل المثلثات القائمة الزاوية فقط. لذا، وضح لهم أن هذا القانون يصلح لحل أي مثلث، ومثله قانون جيوب التمام الذي سيدرسونه في الدرس القادم 8-5.

الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان تُسمى الحالة المبهمة.

في الجهة اليمنى من الأشكال المجاورة.

الارتفاع h يقارن مع a لأن h هو أقصر بُعد من C إلى \overline{AB} عندما تكون الزاوية A حادة.

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

إذا كان معلومًا لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع فإنه يوجد مثلث وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حل، أو له حل واحد، أو له حلان.

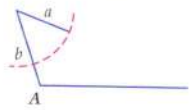
أضف إلى مطوبتك

مفهوم أساسي

المثلثات الممكنة في حالة (SSA)

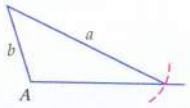
افتراض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ قائمة أو منفرجة



$$a \leq b$$

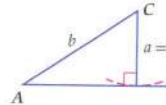
لا يوجد حل



$$a > b$$

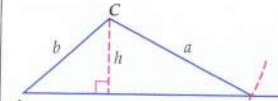
حل واحد

$\angle A$ حادة



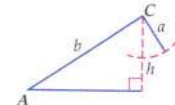
$$a = h$$

حل واحد



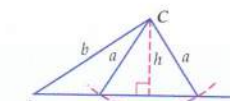
$$a \geq b$$

حل واحد



$$a < h$$

لا يوجد حل



$$h < a < b$$

حلان

بما أن $\sin A = \frac{h}{b}$ ، فيمكنك استعمال الصيغة $h = b \sin A$ لإيجاد قيمة h في المثلثات الحادة الزوايا.

مثال 3

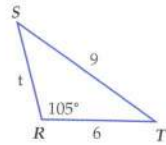
حل مثلث بمعلومية طولَي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرَّبًا أطول الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105^\circ, r = 9, s = 6$.

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$ ، نستنتج أن للمثلث حلًا واحدًا.

الخطوة 1: ابدأ برسم المثلث، ثم استعمال قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.



قانون الجيوب

$$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

يضرب كلا الطرفين في 6

$$\sin S = \frac{6 \sin 105^\circ}{9}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\sin S \approx 0.6440$$

بإيجاد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$ ، والزاوية S حادة

$$S \approx 40^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$$m\angle T \approx 180 - (105 + 40) \approx 35^\circ$$

الخطوة 3: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قيمة t .

$$\frac{\sin 35^\circ}{t} \approx \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

قانون الجيوب

$$t \approx \frac{9 \sin 35^\circ}{\sin 105^\circ}$$

بالحل بالنسبة لـ t

$$t \approx 5.3$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن: $S \approx 40^\circ, T \approx 35^\circ, t \approx 5.3$

مثال إضافي

3

حدّد إذا كان لكل مثلث فيما يأتي

حل واحد أم حلان أم ليس له

حل. أوجد الحلول، مقرَّبًا أطوال

الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة

وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle NPQ$ فيه

$$Q = 110^\circ, q = 11, n = 8$$

$$P = 27^\circ, N = 43^\circ, p = 5.3$$

(b) $\triangle DEF$ فيه

$$E = 52^\circ, e = 5, f = 9$$

ليس له حل.

(c) $\triangle XYZ$ فيه

$$X = 28^\circ, z = 15, x = 9$$

الحل الأول هو:

$$Z = 51^\circ, Y = 101^\circ, y = 18.8$$

والحل الثاني هو:

$$Z = 129^\circ, Y = 23^\circ, y = 7.5$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمال

السبورة لتوضيح الحالة التي يكون

للمثلث فيها حلان عند استعمال

قانون الجيوب. واستعمل برنامج

الرسم لرسم الضلعين المعطى

طولاهما والزاوية المعلومة بدقة.

وارسم أحد الأوضاع الممكنة للضلع

الثالث للمثلث، ثم حرّك القطعة

المستقيمة التي تمثله لتوضيح كيفية

رسم المثلث الآخر الممكن.

إرشادات للمعلم الجديد

نبه الطلبة إلى أنه إذا بدأ الطالب باستخدام

قانون الجيب لحل مثلث ليس له حل

فسيجد أن جيب إحدى الزوايا أكبر من

واحد، وذلك يجعل الحل مستحيلًا.

المحتوى الرياضي

قانون الجيوب: يمكن أن يوجد في إحدى حالات استعمال قانون الجيوب، أكثر من حل للمثلث. وفي مثل هذه الحالة يجب القيام بخطوات الحل مرتين.

إرشادات للدراسة

حلان:

في الضلع C ، بما أن $\angle A < \angle b$ فإن للمثلث حلين أحدهما عندما تكون الزاوية B حادة، والآخر عندما تكون الزاوية B منفرجة (مكملة للزاوية الحادة في الحل الأول).

إرشادات للدراسة

الزاوية المرجعية
في الحالة الثانية استعملت زاوية مرجعية قياسها 42° لإيجاد القياس الآخر للزاوية B .

(3C) حلان:

$$B \approx 61^\circ, C \approx 72^\circ, c \approx 19.5;$$

$$B \approx 119^\circ, C \approx 14^\circ, c \approx 5.0$$

(b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54^\circ, a = 6, b = 8$.

بما أن $\angle A$ حادة، و $6 < 8$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .

$$b = 8, A = 54^\circ \quad h = b \sin A = 8 \sin 54^\circ \approx 6.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلث حل.

(c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35^\circ, a = 17, b = 20$.

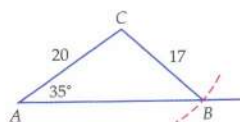
بما أن $\angle A$ حادة، و $17 < 20$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .

$$b = 20, A = 35^\circ \quad h = b \sin A = 20 \sin 35^\circ \approx 11.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فإن للمثلث حلين وبالتالي هناك مثلثان يطلب حلّهما.

الحالة 1، $\angle B$ حادة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

$$\text{قانون الجيوب} \quad \frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$\text{بالحل بالنسبة لـ } \sin B \quad \sin B = \frac{20 \sin 35^\circ}{17}$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة} \quad \sin B \approx 0.6748$$

$$\text{بإيجاد قيمة } \sin^{-1} 0.6748 \quad B \approx 42^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180 - (35 + 42) \approx 103^\circ$$

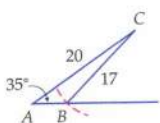
الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$$\text{قانون الجيوب} \quad \frac{\sin 103^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$\text{بالحل بالنسبة لـ } c \quad c \approx \frac{17 \sin 103^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad c \approx 28.9$$

الحالة 2، $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$$m\angle B \approx 180^\circ - 42^\circ \approx 138^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180 - (35 + 138) \approx 7^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

$$\text{قانون الجيوب} \quad \frac{\sin 7^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$$

$$\text{بالحل بالنسبة لـ } c \quad c \approx \frac{17 \sin 7^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad c \approx 3.6$$

لذا فإن أحد الحلين هو: $B \approx 42^\circ, C \approx 103^\circ, c \approx 28.9$ ، والحل الثاني هو: $B \approx 138^\circ, C \approx 7^\circ, c \approx 3.6$.

تحقق من فهمك

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95^\circ, r = 10, s = 12$ ليس له حل

(3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32^\circ, n = 7, p = 4$ حل واحد، $M \approx 130^\circ, P \approx 18^\circ$

(3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47^\circ, a = 15, b = 18$

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

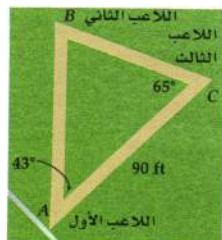
المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلبة كتابة مقالة حول المثال الذي وجدوا أنه يتحدى قدراتهم على نحو كبير، والسبب في ذلك. واطلب إليهم أن يضمنوا مقالاتهم جميع الأسئلة والاستفسارات لديهم حول الدرس.



الربط مع الحياة

يتراوح طول ملعب كرة القدم بين 90m-120m وعرضه بين 45m-90m. ومن الملاعب الرئيسية في المملكة العربية السعودية استاد الملك فهد الدولي بالرياض الذي يتسع لـ 75 ألف متفرج.

كرة قدم: يُمثل الشكل المجاور ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.



$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 72^\circ$$

$$\frac{\sin 72^\circ}{90} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$$

$$x \sin 72^\circ = 90 \sin 43^\circ$$

$$x = \frac{90 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$x \approx 64.5$$

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريباً.

تحقق من فهمك

(4) أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني. 85.8 ft

مثال إضافي

كرة قدم: افترض في المثال 4 أن قياس الزاوية عند اللاعب الثالث 58° ، وعند اللاعب الأول 41° . فكم تكون المسافة بين اللاعبين الثاني والثالث؟ 59.8 ft تقريباً

3 التدريب

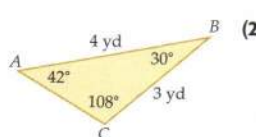
التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلبة.

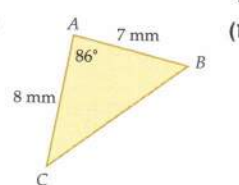
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

في الأسئلة (1-4)، أوجد مساحة $\triangle ABC$ ، مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

$$3 \text{ yd}^2$$

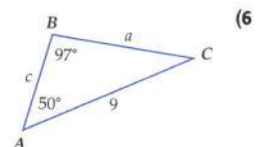


$$27.9 \text{ mm}^2$$

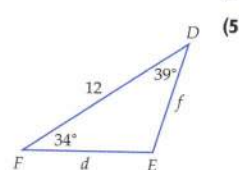


$$175.4 \text{ in}^2 \quad B = 103^\circ, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in} \quad (4) \quad 21.2 \text{ cm}^2 \quad A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm} \quad (3)$$

(في الأسئلة 5-7)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة:



(6)



(5)

$$F = 60^\circ, f \approx 12.3, h \approx 9.1 \quad G = 80^\circ, H = 40^\circ, g = 14 \quad (7) \quad \triangle FGH \text{ الذي فيه:}$$

حدد إن كان للمثلث ABC في كلٍّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$A = 95^\circ, a = 19, b = 12 \quad (8) \quad \text{حل واحد: } B \approx 39^\circ, C \approx 46^\circ, c \approx 13.7$$

$$A = 60^\circ, a = 15, b = 24 \quad (9) \quad \text{لا يوجد حل}$$

$$A = 34^\circ, a = 8, b = 13 \quad (10)$$

$$A = 30^\circ, a = 3, b = 6 \quad (11)$$

(12) فضاء: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين فوهة واهو وفوهة نوكان. 3 km تقريباً

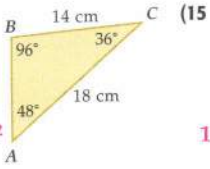


الدرس 8-4 قانون الجيوب 181

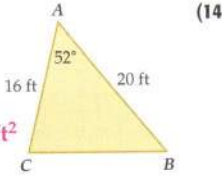
تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	40-54 ، 38 ، 13-36
ضمن المتوسط	40-54 ، 38 ، فردي 13-37
فوق المتوسط	37-54

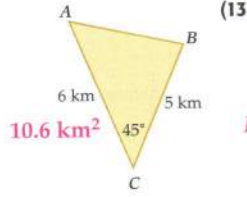
مثال 1 (في الأسئلة 13-19)، أوجد مساحة كل من المثلثات الآتية إلى أقرب جزء من عشرة:



(15) 74.1 cm^2



(14) 126.1 ft^2

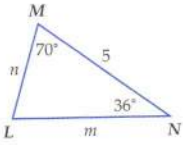


(13) 10.6 km^2

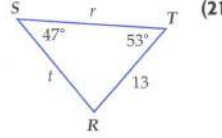
- (20) $C = 30^\circ, b \approx 11.1, c \approx 5.8$
 (21) $R = 80^\circ, r \approx 17.5, t \approx 14.2$
 (22) $L = 74^\circ, m \approx 4.9, n \approx 3.1$

- (16) 66.9 in^2 $A = 138^\circ, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$ 5.9 ft^2 $C = 25^\circ, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$
 (17) 5.6 cm^2 $C = 116^\circ, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$ (18) 65.2 m^2 $B = 92^\circ, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$

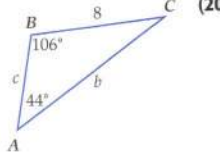
مثال 2 (في الأسئلة 20-26)، حل كل مثلث. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



(22)



(21)



(20)

- (27) حل واحد: $B \approx 25^\circ, C \approx 55^\circ, c \approx 5.8$
 (28) حل واحد: $B \approx 49^\circ, C \approx 56^\circ, c \approx 12.0$
 (29) حل واحد: $B \approx 32^\circ, C \approx 110^\circ, c \approx 32.1$
 (31) حلان: $B \approx 53^\circ, C \approx 85^\circ, c \approx 7.4$;
 $B \approx 127^\circ, C \approx 11^\circ, c \approx 1.4$

- (23) $\triangle HJK$ الذي فيه: $H = 53^\circ, J = 20^\circ, h = 31, K = 107^\circ, j \approx 13.3, k \approx 37.1$
 (24) $\triangle NPQ$ الذي فيه: $P = 109^\circ, Q = 57^\circ, n = 22, N = 14^\circ, p \approx 86.0, q \approx 76.3$
 (25) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 50^\circ, a = 2.5, C = 67^\circ, B \approx 63^\circ, b \approx 2.9, c \approx 3.0$
 (26) $\triangle ABC$ الذي فيه: $B = 18^\circ, C = 142^\circ, b = 20, A = 20^\circ, a \approx 22.1, c \approx 39.8$

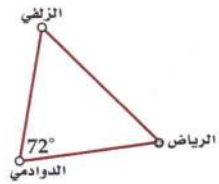
- مثال 3 (32) حلان: $B \approx 71^\circ, C \approx 65^\circ, c \approx 18.3$;
 $B \approx 109^\circ, C \approx 27^\circ, c \approx 9.1$
 (34) حل واحد: $B = 90^\circ, C = 60^\circ, c \approx 29.4$

حدد إن كان للمثلث ABC في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

- (28) $A = 75^\circ, a = 14, b = 11$ (27) $A = 100^\circ, a = 7, b = 3$
 (30) ليس له حل $A = 52^\circ, a = 9, b = 20$ (29) $A = 38^\circ, a = 21, b = 18$
 (32) $A = 44^\circ, a = 14, b = 19$ (31) $A = 42^\circ, a = 5, b = 6$
 (34) $A = 30^\circ, a = 17, b = 34$ (33) ليس له حل $A = 131^\circ, a = 15, b = 32$

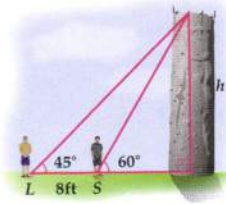
مثال 4

جغرافياً: في الشكل المجاورة ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثاً. إذا كانت المسافة بين الرياض والدوامي 236 km، وبين الرياض والزلفي 262 km، وقياس الزاوية عند الدوامي 72° .



- (35) أوجد قياس الزاوية عند مدينة الرياض. انظر الهامش
 (36) أوجد المسافة بين الزلفي والدوامي. انظر الهامش

- (35) 49° تقريباً
 (36) 208 km تقريباً



37 تسلق: يقف خالد وسعيد أمام جدار صخري للتسلق والمسافة بينهما 8 أقدام كما هو مبين في الشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخري؟
قرب إلى أقرب قدم. **19.0 ft**

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلبة في السؤال 38 أن يلاحظوا أن رضوان استعمل الآلة الحاسبة بشكل صحيح.

$$\sin T = \frac{12 \cdot \sin 56^\circ}{24} = \frac{(12)(0.8290)}{24} \approx 0.4145$$

لذا فإن $T \approx 24.5^\circ$. أما علي فقد أخطأ؛ لأن الحالة التي لا يكون للمثلث حل عندها هي عندما يكون طول الضلع المقابل للزاوية θ أقل من حاصل ضرب $\sin \theta$ في طول الضلع المجاور للزاوية θ .

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلبة كتابة الخطوات الضرورية لحل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس زاويتين فيه.

إجابات:

39 إجابة ممكنة:

$$a = 12, b \approx 14.2, c = 5.0$$

$$a = 6, b \approx 7.1, c \approx 2.5$$

40 إجابة ممكنة: $r = 30$ ، يجب أن يكون

طول الضلع المقابل للزاوية R أقل من

من طول الارتفاع 33.6 حسب قانون

الجيب.

مسائل مهارات التفكير العليا

38 **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $r = 24, t = 12, R = 56^\circ$. فإذا حاول كل من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$. فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك. **رضوان، R زاوية حادة، و $r > t$ ، لذلك فإن للمثلث حل واحد**

علي
بها $t > r$ لا يوجد للمثلث حل.

رضوان
 $\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56^\circ}{24}$
 $\sin T \approx 0.4145$
 $T \approx 24.5^\circ$

39 **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC بحيث يكون في كل

منها $C = 20^\circ, A = 55^\circ$. **انظر الهامش**

40 **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $d = 38, R = 62^\circ$ ، فأوجد قيمة r ، بحيث لا يوجد للمثلث DRF حل

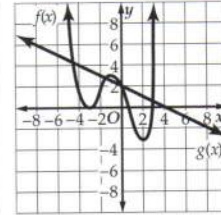
عندها. ووضح إجابتك. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

42 إذا كان أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو

4. فأَيُّ مما يأتي يُمثِّل تحليلاً للعلاقة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ ؟

- A** $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$
C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$



41 **إجابة قصيرة:** في الشكل

المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من

$f(x)$ ، $g(x)$ ما قيمة $f(g(4))$ ؟ **2**

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي: (الدرس 3-8)

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cot 60^\circ \quad (45) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{3}{4} \pi \quad (44) \quad -\frac{1}{2} \sin 210^\circ \quad (43)$$

في كلٍّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة: (الدرس 2-8)

$$\frac{8}{3} \pi, -\frac{4}{3} \pi, \frac{2}{3} \pi \quad (48) \quad 328^\circ, -392^\circ, -32^\circ \quad (47) \quad 485^\circ, -235^\circ, 125^\circ \quad (46)$$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلات الآتية (إن وجد): (الدرس 4-6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0.5(1.1)^n \quad (51) \quad 27 + 36 + 48 + \dots \quad (50) \quad 256 + 64 + 48 + 36 + \dots \quad (49)$$

إذا كانت $w = 6, x = -4, y = 1.5, z = \frac{3}{4}$ فأوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$26 \quad wy + xz + w^2 - x^2 \quad (54) \quad 61 \frac{9}{16} \quad x^2 + z^2 + 5wy \quad (53) \quad 56.25 \quad w^2 + y^2 - 6xz \quad (52)$$

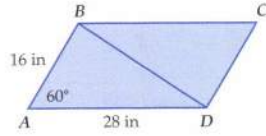
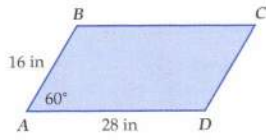
الدرس 4-8 قانون الجيوب 183

تنوع التعليم

صنّف فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة حساب مساحة مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه 3، 4، 5 باستخدام صيغة المساحة الواردة في الدرس ثلاث مرات (مرة لكل زاوية من زوايا المثلث). **6؛ 6؛ 6**

يمكنك إيجاد مساحة أي مثلث باستعمال الجيب. وكذلك يمكنك استعمال الجيب في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع.



نشاط

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ABCD.

الخطوة 1: ارسم القطر \overline{BD} .

يقسم القطر \overline{BD} متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين هما: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

الخطوة 2: أوجد مساحة $\triangle ABD$.

المساحة = صيغة مساحة المثلث $\frac{1}{2}(AB)(AD) \sin A$

$AB = 16, AD = 28, A = 60^\circ$ $\frac{1}{2}(16)(28) \sin 60^\circ =$

بالضرب وتعويض قيمة $\sin 60^\circ$ $224 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

بالتبسيط $112\sqrt{3} =$

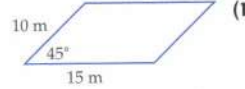
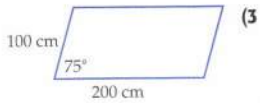
الخطوة 3: أوجد مساحة $\square ABCD$.

مساحة $\square ABCD$ تساوي مجموع مساحتي المثلثين: $\triangle ABD, \triangle CDB$.

وبما أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ، فإن مساحة $\triangle CDB$ تساوي مساحة $\triangle ABD$.

لذا فإن مساحة $\square ABCD$ تساوي مثلي مساحة $\triangle ABD$. أي $2 \cdot 112\sqrt{3} = 224\sqrt{3} \approx 387.98 \text{ in}^2$

- تمارين: 11.65 in^2 (2b) 22.5 in^2 (2a) 150 m^2 (1c) 57.40 m^2 (1b) 106.07 m^2 (1a)
 10000 cm^2 (3c) 12175.23 cm^2 (3b) 19318.52 cm^2 (3a) 38.97 in^2 (2c)



أوجد كلاً مما يأتي لكل متوازي أضلاع أعلاه:

- (a) المساحة.
(b) المساحة عندما يصبح قياس الزاوية المعلومة نصف القياس المُعطى.
(c) المساحة عندما يكون قياس الزاوية المعلومة مثلي القياس المُعطى.

1 التركيز

الهدف: استعمال نسبة الجيب لإيجاد مساحة متوازي أضلاع.

إرشادات التدريس

إذا استعمل الطلبة الآلات الحاسبة لإيجاد المساحات التقريبية، فذكرهم بأن يتحققوا من وضع آلاتهم على نظام الدرجات.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلبة في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، لتنفيذ النشاط.

اطلب إلى كل طالب في كل مجموعة أن يرسم قطرًا مختلفًا لمتوازي الأضلاع، ثم يقارنوا بين حساباتهم للمساحة؛ للتحقق من صحة الحل.

أسأل:

• ما الذي يمثله $AB \sin A$ في متوازي الأضلاع؟

بما أن $\sin A = \frac{h}{AB}$ ، فإن $AB \sin A$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع.

تدريب: اطلب إلى الطلبة حل التمارين 1-3.

3 التقويم

التقويم التكويني:

استعمل التمرين 2 لتقويم مدى قدرة الطلبة على حساب مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولاً ضلعين متجاورين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

من المحسوس إلى المجرد:

اطلب إلى الطلبة تطوير صيغة لحساب مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولاً ضلعين متجاورين فيه a و b ، وقياس إحدى زواياه θ . $A = ab \sin \theta$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 8

دون فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21)

دون

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22)

دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم

قانون الجيوب

استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات، يمكن استعمال قانون الجيوب لحل أي مثلث، إذا علم فيه قياس زاويتين وطول الضلع المقابل لإحداهما، أو إذا علم طول ضلعين فيه، وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

قانون الجيوب: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

الفرص أن قيمة كل من a, b, c من المثلث ABC معطاة (أو كانت A قائمة أو منفرجة فإن $a > b$ لا يوجد حل $a < b \sin A$ لا يوجد حل $a = b \sin A$ يوجد حل واحد $b > a > b \sin A$ يوجد حلان $a > b$ يوجد حل واحد

المثلثات الممكنة حلها: (أو كانت A حادة فأن: $a < b \sin A$ لا يوجد حل $a = b \sin A$ يوجد حل واحد $b > a > b \sin A$ يوجد حلان $a > b$ يوجد حل واحد

حدد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلين مطبقاً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $A=48^\circ, a=11, b=16$
 يا أن A حادة، أوجد قيمة $b \sin A$ مع قيمة a .
 وبما أن $11 < 11.89$ ، فإن $b \sin A = 11.89$ ، وبما أن $11 < 11.89$ ، فإن $b \sin A > a$ ، لا يوجد حل للمثلث.

(b) $A=34^\circ, a=6, b=8$
 يا أن A حادة، أوجد قيمة $b \sin A$ مع قيمة a .
 وبما أن $8 \sin 34^\circ \approx 4.47$ ، وبما أن $6 > 4.47$ ، فإن $a > b \sin A$ ، يوجد للمثلث حلان:

الحل الأول: $B=104^\circ$
 استعمال قانون الجيوب لإيجاد B :
 $\frac{\sin B}{8} = \frac{\sin 34^\circ}{6}$
 $\sin B = 0.7456$
 $B \approx 48^\circ$ من 180° ، فإن $B = 132^\circ$
 قياس الزاوية C يساوي $180^\circ - (34^\circ + 132^\circ) = 14^\circ$ تقريباً.
 استعمال قانون الجيوب لإيجاد قيمة c :
 $\frac{\sin 14^\circ}{c} = \frac{\sin 34^\circ}{6}$
 $c \approx 2.6$

الحل الثاني: $B=48^\circ$
 قياس الزاوية C يساوي $98^\circ = 180^\circ - (34^\circ + 48^\circ)$ تقريباً.
 استعمال قانون الجيوب مرة أخرى لإيجاد قيمة c :
 $\frac{\sin 98^\circ}{c} = \frac{\sin 34^\circ}{6}$
 $c \approx 10.6$

تباين
 حدد ما إذا كان للمثلث ABC حل واحد أم حلان أم ليس له حل، وأوجد الحلين مطبقاً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(1) $A=125^\circ, a=22, b=15$ يوجد حل واحد.
 $B=34^\circ, C=21^\circ, c=9.6$

(2) $A=24^\circ, a=3, b=8$ لا يوجد حل.

(3) $A=64^\circ, C=66^\circ, c=40$
 $B=116^\circ, C=14^\circ, c=11.8$

الفصل 8 - حساب المثلثات

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم

قانون الجيوب

إيجاد مساحة مثلث، مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي أي ضلعين فيه في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

مساحة المثلث: $A = \frac{1}{2}bc \sin A$
 $A = \frac{1}{2}ac \sin B$
 $A = \frac{1}{2}ab \sin C$

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

في $\triangle ABC$ ، $a=10, b=14, C=40^\circ$
 $A = \frac{1}{2}ab \sin C$
 $A = \frac{1}{2}(10)(14) \sin 40^\circ$
 $A \approx 44.9951$
 مساحة المثلث تساوي 45 وحدة مربعة تقريباً.

تباين
 أوجد مساحة كل من المثلثات الآتية مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(1) 62.3 وحدة مربعة

(2) 41.8 وحدة مربعة

(3) 71.5 وحدة مربعة

(4) 106.4 ft²

(5) 29.0 m²

(6) 4.8 cm²

(7) $A=20^\circ, b=7$ cm, $c=4$ cm 61.4 m²

(8) $C=55^\circ, a=10$ m, $b=15$ m 9 ft²

(9) $B=42^\circ, a=3$ ft, $c=9$ ft 77.9 m²

(10) $A=33^\circ, b=13$ m, $c=15$ m 47.8 cm²

(11) $C=85^\circ, a=12$ cm, $b=8$ cm

الفصل 8 - حساب المثلثات

تدريبات المهارات (23)

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (24)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات حل المسألة

قانون الجيوب

(1) مضي، بين زوايا في طريق مستقيم، فقرر أن يسير في 12 مضي، بين زوايا في طريق مستقيم، فقرر أن يسير في 75° من مسافة 450 م، استدار زاوية قياسها 75° درجة عائداً إلى الطريق المستقيم.

(a) ما المسافة التي يتعين أن يقطعها أولاً على هذا المسار ليعد إلى الطريق؟ 402 m

(b) كم سيكون بُعد على عن نقطة الانطلاق عندما يعود إلى الطريق؟ 676 m

(2) تساق الصخور، لاحقاً أحد مستأقني الجبال في حلقة معينة أثناء تسلقه، جداراً صخرياً أنه يستطيع رؤية قمة وقاع جبل مقابل له. ويوجد أن زاوية انحدار قاع الجبل 36° وزاوية ارتفاع قمة الجبل 42° . إذا كان ارتفاع ذلك الجبل 2000 ft، فاعده على مستوى سطح البحر، فما ارتفاع التسلق عن مستوى سطح البحر إلى أقرب قدم؟ 893 ft

(3) عهد الامتلاك، وأقيمت حفلة عيد ميلاد صيد سمك على سطح قارب مراكب على حافته بزاوية قياسها 22° مع سطح القارب. فإذا كان طول الحبال 5 ft وطول الخط المقوس 3 ft، فاحدة الحبال، وكانت حركة القارب بسبب حركة لتنتزعة دعماً وإلياً، فأوجد قياس الزاوية التي يجب أن يصنعها الخط مع الحبال، حتى تكون الصنارة على مستوى سطح القارب. 119.4° أو 16.6°

(4) كاميرات مراقبة، وأقيمت كاميرات مراقبة على سطح مبنى على بُعد مسافة معينة عن طريق مستقيم، وكانت الكاميرات تدور بحس اتجاه عقارب الساعة بسرعة ثابتة تبلغ دورة واحدة في الدقيقة. وفي لحظة معينة كانت الكاميرا في مواجهة نقطة على الطريق، وتبعد عن الكاميرا 20 m. وبعد أربع ثوان كانت الكاميرا تواجه نقطة على بُعد 10 m من النقطة الأولى على الطريق. ما قياس الزاوية التي دارتها الكاميرا في 4 ثوان؟ 24°

(b) ما المسافة بين الكاميرا والطريق إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟ 19.6 m

الفصل 8 - حساب المثلثات

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات المهارات

قانون الجيوب

أوجد مساحة $\triangle ABC$ إلى أقرب جزء من عشرة.

(1) 36.9 cm²

(2) 10.0 ft²

(3) $A=35^\circ, b=3$ ft, $c=7$ ft 6.0 ft²

(4) $C=148^\circ, a=10$ cm, $b=7$ cm 18.5 cm²

(5) $C=22^\circ, a=14$ m, $b=8$ m 21.0 m²

(6) $B=93^\circ, c=18$ mi, $a=42$ mi 377.5 mi²

(7) 36.9 cm²

(8) 4.8 cm²

(9) 29.0 m²

(10) 4.8 cm²

(11) 10.0 ft²

(12) 10.0 ft²

(13) $A=30^\circ, a=1, b=4$ 13

(14) $A=30^\circ, a=2, b=4$ 14

(15) $A=30^\circ, a=3, b=4$ 15

(16) $A=38^\circ, a=10, b=9$ 16

(17) $A=78^\circ, a=8, b=5$ 17

(18) $A=133^\circ, a=9, b=7$ 18

(19) $A=127^\circ, a=2, b=6$ 19

(20) $A=109^\circ, a=24, b=13$ 20

(21) $B=34^\circ, C=108^\circ, c=15.4$ 21

(22) $B=90^\circ, C=60^\circ, c=3.5$ 22

(23) $B=42^\circ, C=108^\circ, c=5.7$ 23

(24) $B=138^\circ, C=12^\circ, c=1.2$ 24

(25) $B=36^\circ, C=64^\circ, c=7.4$ 25

(26) $B=31^\circ, C=40^\circ, c=16.4$ 26

الفصل 8 - حساب المثلثات

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل .

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70).

المطويات

متابعة المطويات

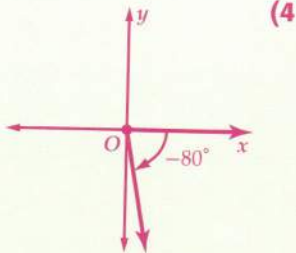
قبل أن تطلب إلى الطلبة الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 8-1 إلى 8-4 من خلال مطوياتهم.

إجابات:

$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos \theta = \frac{3}{4}, (3)$

$\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}, \csc \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7},$

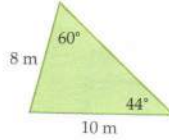
$\sec \theta = \frac{4}{3}, \cot \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بإحدى النقطتين الآتيتين في كل مرة، فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ : (12, 13) انظر ملحق الإجابات.

(6, 8) (13) (0, -5) (12)

14 حذيقية: عند فيصل حذيقية مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه. ما مساحة الحذيقية؟ 38.8 m^2 تقريباً



حدّد إن كان للمثلث ABC في كلٍّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(15) $A = 38^\circ, a = 18, c = 25$ انظر ملحق الإجابات

(16) $A = 65^\circ, a = 5, b = 7$ ليس له حل

(17) $A = 115^\circ, a = 12, b = 8$ حل واحد:

$B = 37^\circ, C = 28^\circ, c = 6.2$

في كلٍّ مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

(18) $600^\circ, -120^\circ, 240^\circ$

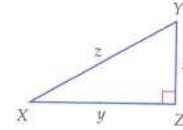
(19) $\frac{17\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$

(20) $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$

21 اختيار من متعدد: افرض أن زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث $\cos \theta > 0$. في أي ربع يقع ضلع الانتهاء للزاوية θ ?
A الربع الأول أو الثاني
B الربع الأول أو الثالث
C الربع الثاني أو الثالث
D الربع الأول أو الرابع

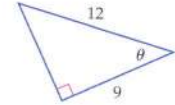
حلّ $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين: 1, 2 وفق القياسات المعطاة، وقرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

$X = 25^\circ, (1)$
 $y = 34.3,$
 $z = 37.9$
 $Y = 65^\circ, (2)$
 $y = 17.2,$
 $z = 18.9$



$X = 25^\circ, x = 8 (2)$ $Y = 65^\circ, x = 16 (1)$

3 أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ انظر الهامش.

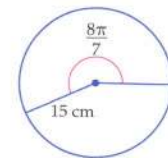


4 ارسم زاوية قياسها 80° في الوضع القياسي. انظر الهامش.

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(5) $215^\circ = \frac{43\pi}{36}$ (6) $-350^\circ = -\frac{35\pi}{18}$
(7) $288^\circ = \frac{8\pi}{5}$ (8) $810^\circ = \frac{9\pi}{2}$

9 اختيار من متعدد: طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة أدناه مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة يساوي: C



- 4.2 cm A
- 17.1 cm B
- 53.9 cm C
- 2638.9 cm D

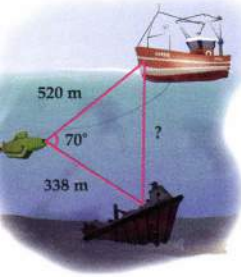
أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(10) $0 \tan \pi$ (11) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{3\pi}{4}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 8-1 إلى 8-4 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23).		www.obeikaneducation.com

قانون جيب التمام Law of Cosines



لماذا؟

الغواصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءاً إلى حطام سفينة أخرى على بعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

- استعمال قانون جيب التمام لحل المثلثات: لا يمكن استعمال قانون الجيوب لحل مثلث مثل المثلث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث في الحالتين الآتيتين:
- معرفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع (حالة SAS))
- معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث (ضلع - ضلع - ضلع (حالة SSS))

أضف إلى
رطوبتك

قانون جيب التمام

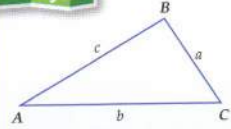
مفهوم أساسي

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



www.obeikaneducation.com

قانون جيب التمام
Law of Cosines

المفردات:

- **والآن؟**
• أستعمل قانون جيب التمام لحل مثلثات.
- أختار طرقاً مناسبة لحل مثلثات.

فيما سبق:

درست حل مثلثات باستعمال قانون الجيوب.

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 8-5

استعمال قانون الجيوب لحل المثلث.

الدرس 8-5

استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث.

اختيار الطريقة الأنسب لحل المثلث.

ما بعد الدرس 8-5

استعمال قانون الجيوب وقانون جيب التمام لحل مسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا"؟

وأسأل:

- هل المثلث المرسوم في الشكل حاد الزوايا، أم قائم الزاوية، أم منفرج الزاوية؟ **حاد الزوايا**
- وضح لماذا يكون قياس الزاوية عند الرأس الذي يمثل الحطام أكبر منها عند الرأس الذي يمثل السفينة؟
- لأن الضلع المقابل للزاوية عند الرأس الذي يمثل الحطام أطول من الضلع المقابل للرأس الذي يمثل السفينة.
- لماذا يجب أن تكون المسافة بين السفينة والحطام أقل من 858 m؟ **لأن متباينة المثلث تشير إلى أن طول أي ضلع في مثلث يجب أن يكون أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين (520 + 338 = 858 m).**

حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

مثال 1

حلّ $\triangle ABC$. مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$$\text{قانون جيب التمام } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a = 7, c = 5, B = 36^\circ \quad b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36^\circ$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط } b^2 \approx 17.4$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين } b \approx 4.2$$

الخطوة 2: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A .

$$\text{قانون جيب التمام } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = 7, b = 4.2, c = 5 \quad 7^2 = 4.2^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$$

$$\text{ب طرح } 4.2^2 \text{ و } 5^2 \text{ من كلا الطرفين } 7^2 - 4.2^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على } -2(4.2)(5) \quad \frac{7^2 - 4.2^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط } -0.1514 \approx \cos A$$

$$\text{بإيجاد قيمة } \cos^{-1} -0.1514 \quad 99^\circ \approx A$$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180 - (36 + 99) \approx 45$$

$$\text{إذن: } b \approx 4.2, A \approx 99^\circ, C \approx 45^\circ$$

186 الفصل 8 حساب المثلثات

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص. (188)	• تنوع التعليم، ص. (188, 190)	• تنوع التعليم، ص. (190)
كتاب التمارين	• ص. (25)	• ص. (25)	• ص. (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص. (26) • تدريبات المهارات، ص. (28) • تدريبات حل المسألة، ص. (29)	• تدريبات المهارات، ص. (28) • تدريبات حل المسألة، ص. (29) • التدريبات الإثرائية، ص. (30)	• تدريبات المهارات، ص. (28) • تدريبات حل المسألة، ص. (29) • التدريبات الإثرائية، ص. (30)

1 حلّ $\triangle FGH$ الذي فيه: $G = 82^\circ, f = 6, h = 4$ مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة. $H \approx 36^\circ, F \approx 62^\circ, g \approx 6.7$

استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث

مثال 1 يبين كيفية حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

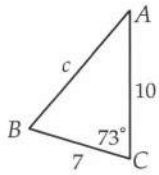
مثال 2 يبين كيفية حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

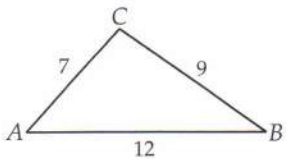
مثالان إضافيان

1 حل $\triangle ABC$.



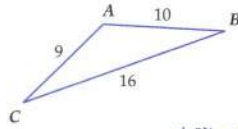
$$A \approx 40^\circ; B \approx 67^\circ; c \approx 10.4$$

2 حل $\triangle ABC$.



$$A \approx 48^\circ; B \approx 35^\circ; C \approx 97^\circ$$

مثال 2 حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة



قانون جيب التمام

$$a = 16, b = 9, c = 10$$

ب طرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين

بقسمة كلا الطرفين على $-2(9)(10)$

باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

بإيجاد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$

حلّ $\triangle ABC$ مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$$

$$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$$

$$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$$

$$-0.4167 \approx \cos A$$

$$115^\circ \approx A$$

الخطوة 2: استعمال قانون الجيب لإيجاد قياس $\angle B$.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115^\circ}{16}$$

$$\sin B \approx \frac{9 \sin 115^\circ}{16}$$

$$\sin B \approx 0.5098$$

$$\sin^{-1} 0.5098 \quad B \approx 31^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180 - (115 + 31) \approx 34^\circ$$

$$\text{إذن: } A \approx 115^\circ, B \approx 31^\circ, C \approx 34^\circ$$

تحقق من فهمك

2 حلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة. $A \approx 25^\circ, B \approx 114^\circ, C \approx 42^\circ$

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات: يمكنك استعمال قانون الجيب وقانون جيب التمام لحل مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقل إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسي أيّ عنصرين آخرين من عناصر المثلث. وإذا كان للمثلث حل، فيجب أن تُقرّر إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيب أو قانون جيب التمام لحله.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

بعد إيجاد $m\angle A$ في الخطوة 1، يمكن استعمال قانون جيب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس زاوية أخرى.

إرشادات للدراسة

التقريب: يمكن أن

يؤدي التقريب في بعض الأحيان إلى إجابات غير دقيقة، مثل أن يكون لدينا مثلث مجموع قياسات زواياه 181° .

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: حدّد مسائل متنوعة للطلبة وامنحهم وقتاً كافياً لحلها. ثم اختر عدداً من الطلبة لشرح إنجازاتهم أمام الصف ومناقشة ذلك. وتأكد من أن الطلبة يرسمون شكلاً توضيحياً ويفسرون سبب اختيارهم لقانون الجيب أو جيب التمام لحل المسائل، ثم احفظ هذه المسائل والرسوم وقم بإرسالها إلى الطلبة

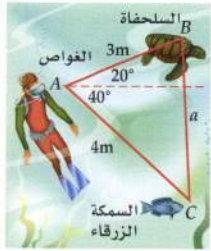
المحتوى الرياضي

قانون جيب التمام: يمكن استعمال قانون جيب التمام لحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، أو بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أبدأ الحل باستعمال	إذا أعطيت
قانون الجيوب	قياسا زاويتين وطول أي ضلع
قانون الجيوب	طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
قانون جيب التمام	طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما
قانون جيب التمام	أطوال الأضلاع الثلاثة

مثال 3 من واقع الحياة استعمال قانون جيب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها 20° ليرى سلحفاة تبعد عنه 3m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها 40° فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكومتين من نظر الغواص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغواص وكل من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل المسألة.

حل:

قانون جيب التمام $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b = 4, c = 3, A = 60^\circ$ $a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60^\circ$

باستعمال الآلة الحاسبة $a^2 = 13$

بإيجاد قيمة a الموجبة $a \approx 3.6$

إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6m تقريباً.

تحقق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أن: $B \approx 74^\circ, C \approx 46^\circ$. بما أن $C < A < B, c < a < b$ فإن الحل منطقي.

تحقق من فهمك

3 ماراثون: ركض سعيد مسافة 6km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها 79° ، وركض مسافة 7km. ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟ تقريباً 8.3km



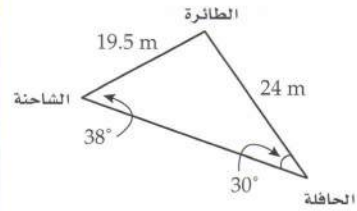
الربط مع الحياة

الرقم القياسي لأعمق مسافة غاص إليها غواص هو 318.2m.

- $A \approx 36^\circ, C \approx 52^\circ, b \approx 5.1$
- $A \approx 112^\circ, B \approx 40^\circ, C \approx 28^\circ$
- $A \approx 18^\circ, B \approx 29^\circ, C \approx 133^\circ$
- $A \approx 48^\circ, C \approx 22^\circ, b \approx 7.6$

مثال إضافي

مطار: الشكل أدناه يبين المسافات بين شاحنة وطائرة وحافلة في أرض أحد المطارات. ما المسافة بين الحافلة والشاحنة؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. 36.2m تقريباً

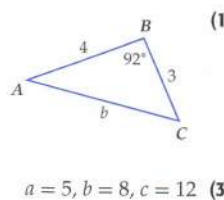
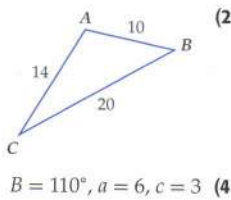


تنبيه!

تجنب الأخطاء: عندما يتعين على الطلبة تقرير أي طرق الحل عليهم أن يختاروا، وضح لهم تعريف الزاوية المحصورة، وأعطهم مزيداً من التدريبات.

تأكد

(في الأسئلة 1-4)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



المثالان 1, 2

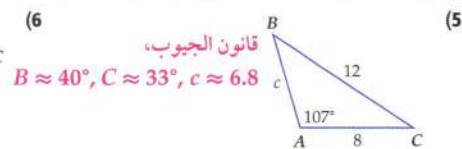
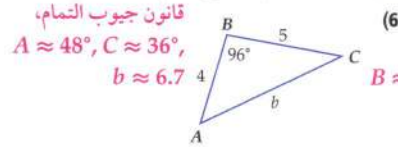
تنوع التعليم

دون ضمن

واجه بعض الطلبة مشكلة في حل المثلث باستعمال أي طريقة من طرق حل المثلث،

بتوزيعهم إلى مجموعات صغيرة، ثم دعهم يناقشوا الطريقة التي سيختارونها لحل المثلث. واطلب إليهم المقارنة بين طرقهم، مع كتابة وصف مختصر لمساعدة زملائهم الآخرين. ثم مشاركة سائر الطلبة في النتائج.

(في الأسئلة 5-7)، حدد القانون (الجيب أو جيب التمام) الذي يجب البدء باستعماله لحل كل مثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



(7) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 35^\circ, s = 16, t = 9$. **قانون جيب التمام،** $S \approx 114^\circ, T \approx 31^\circ, r \approx 10.1$

(8) **كرة قدم:** في إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بُعد 20 m من لاعب الجناح الأيمن. ودار لاعب خط الوسط بزوايا قياسها 40° ، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بُعد 16 m منه. ما المسافة بين لاعبي الجناحين؟ **12.9 m تقريباً**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة ثم استعمل الجدول أسفله هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلبة كتابة كيف ساعدتهم الدرس السابق "قانون الجيب" على فهم الدرس الحالي "قانون جيب التمام".

التقويم التكويني

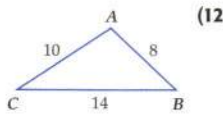
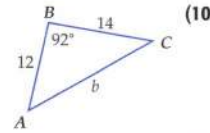
تحقق من فهم الطلاب للدرس 8-4, 8-5 بإعطائهم:

الاجتهاد القصير 2، ص (68)

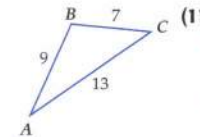
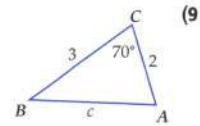
تدرب وحل المسائل

المثالان 2, 1

(في الأسئلة 16-9)، حل كل مثلث. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

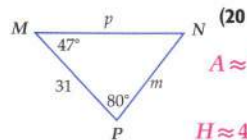
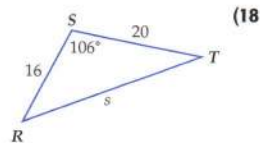


(14) $C = 80^\circ, a = 9, b = 2$
 (16) $w = 20, x = 13, y = 12$

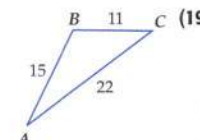
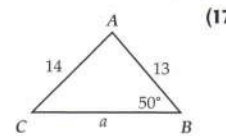


(13) $A = 116^\circ, b = 5, c = 3$
 (15) $f = 10, g = 11, h = 4$

(في الأسئلة 17-22)، حدد القانون (الجيب أو جيب التمام) الذي يجب البدء باستعماله لحل كل مثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



(21) **قانون الجيب،**
 $A \approx 17^\circ, B \approx 79^\circ, b \approx 6.9$
 (22) **جيب التمام،**
 $H \approx 48^\circ, J = 25^\circ, K = 107^\circ$



(21) $\triangle ABC$ الذي فيه: $C = 84^\circ, c = 7, a = 2$. **(22) $\triangle HJK$ الذي فيه: $h = 18, j = 10, k = 23$**

(23) **استكشاف:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. وأوجد المسافة بين السفينة وحطام السفينة الأخرى. قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **514.2 m**

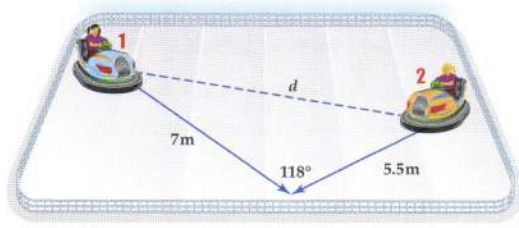
(24) **سياق:** ميدان للسباق على شكل مثلث أطوال أضلاعه 1.8 km, 2 km, 1.2 km. أوجد قياس كل زاوية من زواياه. **$81^\circ, 36^\circ, 63^\circ$**

تنوع الواجبات المنزلية

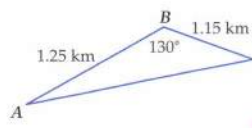
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	32-42, 9-23
ضمن المتوسط	32-42, 24-28, 9-23 فردي
فوق المتوسط	24-42

(25) أرض: قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه 140 m, 210 m, 300 m. استعمل قانون جيب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مقربة إلى أقرب متر مربع. **13698 m² تقريباً**

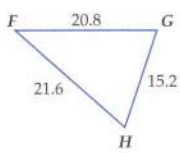
(26) ألعاب سيارات: في ساحة سيارات اللعب في مدينة ألعاب، اصطدمت السيارتان 1, 2 كما هو مبين في الشكل أدناه. ما المسافة d التي كانت بين السيارتين قبل تصادمهما؟ **10.7 m تقريباً**



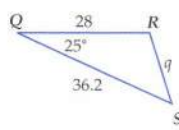
(27) رياضة مائية: يركب أحمد دراجته المائية ليقطع المسافة من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C بسرعة 28 كلم/ساعة. ثم يعود من النقطة C إلى النقطة A مباشرة بسرعة 35 كلم/ساعة. كم دقيقة تحتاج إليها الرحلة ذهاباً وإياباً؟ قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. **8.9 min**



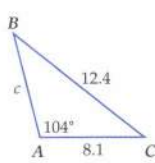
(في الأسئلة 28-30)، حل كل مثلث. قَرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



(30)



(29)



(28)

(28) $B \approx 39^\circ, C \approx 37^\circ, c \approx 7.7$

(29) $R \approx 107^\circ, S \approx 48^\circ, q \approx 16.0$

(30) $F \approx 42^\circ, G \approx 72^\circ, H \approx 66^\circ$

(32) طول أطول الأضلاع

14.5 cm استعمل قانون جيب

التمام لإيجاد قياس الزاوية

المقابلة له وتساوي 102°

مسائل مهارات التفكير العليا

(31) تحدُّ: استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون

جيب التمام. استعمل الإرشادات الآتية: **انظر الهامش**

أولاً: طبق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

ثانياً: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

$$c^2 = x^2 + h^2$$

$$\cos A = \frac{x}{c}$$

(32) تبرير: مثلث أطوال أضلاعه 10.6 cm, 8 cm, 14.5 cm. وضح كيف يمكنك إيجاد قياس الزاوية الكبرى فيه. ثم أوجدتها مقربة إلى أقرب درجة.

(33) اكتب: قارن بين الحالات التي تستطيع فيها استعمال قانون الجيب لحل مثلث تلك التي تستطيع فيها استعمال قانون جيب التمام. **انظر الهامش**

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-x)^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \\ &= b^2 - 2bx + c^2 \\ &= b^2 - 2b(c \cos A) + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

باستعمال نظرية فيثاغورس للمثلث

$\triangle DBC$ بإيجاد مفكوك $(b-x)^2$

في $\triangle ADB$ ، $c^2 = x^2 + h^2$

$$\cos A = \frac{x}{c} \text{ أو } x = c \cos A$$

الخاصية الإبدالية للجمع

(3) يمكنك استعمال قانون الجيب لحل

المثلث عندما يكون معلوماً لديك

قياس زاويتين وطول أحد الأضلاع،

أو طولاً ضلعين وقياس الزاوية

المقابلة لأحدهما. ويمكنك استعمال

قانون جيب التمام لحل المثلث

عندما يكون معلوماً لديك طولاً

ضلعين وقياس الزاوية المحصورة

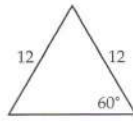
بينهما، أو أطوال أضلاع المثلث

الثلاثة.

تنوع التعليم

ضمن هوق

توسع: اطلب إلى الطلبة استعمال قانون جيب التمام في محاولة لحل مثلث أطوال أضلاعه 5, 12, 18 (لا وجود لمثلث هذا المثلث). واطلب إليهم توضيح ما الذي اكتشفوه وماذا يعني ذلك. سيحصل الطلبة على إجابة خاطئة عند محاولتهم إيجاد الدالة العكسية لجيب التمام؛ لأن القيمة ليست محصورة بين -1 و 1، مما يعني أنه لا وجود لمثلث هذا المثلث.



C
(35) هندسة: محيط الشكل المجاور يساوي:
 36 **C** 24 **A**
 48 **D** 30 **B**

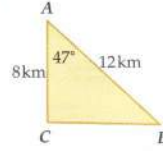
(34) إجابة قصيرة: حل المعادلة: $4, \frac{23}{15} \frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$

إجابات:

مراجعة تراكمية

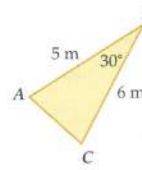
أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلِّ ممَّا يأتي مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة: **الدرس (8-4)**

35.1 km²



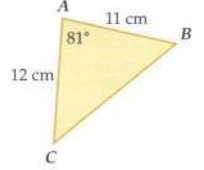
(38)

7.5 m²



(37)

65.2 cm²



(36)

انظر الهامش

(39) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-9, 6)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ . **الدرس (8-3)**

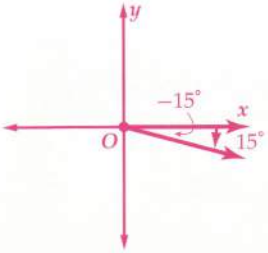
ارسم الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لكلِّ منها. **الدرس (8-3)** **(40-42) انظر الهامش**

245° (42)

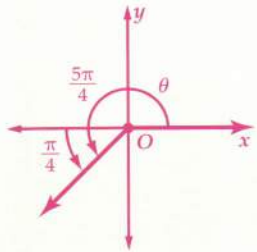
$\frac{5}{4}\pi$ (41)

-15° (40)

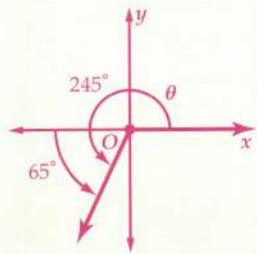
(40)



(41)



(42)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 8

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تمته (27)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 **تدريبات إعادة التعليم**
قانون جيب التمام

اختيار الطريقة المناسبة لحل المثلثات.

المعطيات	المطلوب
قياس زاويتين وطول أي ضلع طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. أضلاع الأضلاع الثلاثة.	حل مثلث

بدء استعمال قانون جيب التمام الذي يجب استخدامه لحل المثلث.

لا كان معلوماً من المثلث طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما، فإنّه يتعين عليك أن تبدأ بأخذ استعمال قانون جيب التمام.

قانون جيب التمام
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $A = 34^\circ, b = 20, c = 8,$
 باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط
 $a^2 = 196.71$
 باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط
 $a \approx 14.1$

استعمل قانون الجيوب لإيجاد B .

قانون الجيوب $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
 $A = 34^\circ, a \approx 14.1, b = 20,$
 باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط
 $B \approx 128^\circ$
 إذن قياس الزاوية C تقريباً $180 - (34 + 128) = 18^\circ$.

حدد القانون (الجيوب أم جيب التمام) الذي يجب استخدامه لحل المثلث في كل ما يأتي، ثم حلّ المثلث.

1) **قانون الجيوب**
 $A = 74^\circ, B = 61^\circ, C = 45^\circ$
 $A = 82^\circ, B = 44^\circ, b = 11$

2) **قانون الجيوب**
 $A = 108^\circ, B = 47^\circ, b = 13.8$

3) **قانون الجيوب**
 $A = 35^\circ, B = 92^\circ, C = 35^\circ$

4) **قانون الجيوب**
 $A = 58^\circ, a = 12, b = 8$

5) **قانون الجيوب**
 $B = 37^\circ, C = 85^\circ, c = 14.1$

الصف: الثاني التاني الفصل: 8 حساب المثلثات 27

دون

تدريبات إعادة التعليم (26)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 **تدريبات إعادة التعليم**
قانون جيب التمام

استعمال قانون جيب التمام لحل المثلثات

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

يمكنك استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث، إذا عُلم طول ضلعين فيه، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، أو إذا عُلمت أطوال أضلاع المثلث.

حلّ $\triangle ABC$ متقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.

المثلث معلوم فيه طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

استعمل قانون جيب التمام لإيجاد قيمة C
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $c^2 = 28^2 + 15^2 - 2(28)(15) \cos 82^\circ$
 $c^2 \approx 892.89$
 $c \approx 29.9$

يمكنك الآن استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A .

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$
 $\frac{\sin A}{28} = \frac{\sin 82^\circ}{29.9}$
 $\sin A \approx 0.9273$
 $A \approx 68^\circ$

قياس الزاوية B تقريباً: $180 - (82 + 68) = 30$.

تساويين

حلّ كلًا من المثلثات الآتية مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1) $A = 60^\circ, c = 17, b = 12$ (2) $a = 14, c = 20, B = 38^\circ$
 $a = 15.1, B = 43^\circ, C = 77^\circ$ $b = 12.4, A = 44^\circ, C = 98^\circ$

3) $a = 4, b = 6, c = 3$
 $A = 36^\circ, B = 118^\circ, C = 26^\circ$

4) $A = 103^\circ, b = 31, c = 52$
 $a = 66, B = 27^\circ, C = 50^\circ$

5) $a = 15, b = 26, c = 132$
 $c = 30, A = 17^\circ, B = 31^\circ$

6) $a = 31, b = 52, c = 43$
 $A = 36^\circ, B = 88^\circ, C = 56^\circ$

الصف: الثاني التاني الفصل: 8 حساب المثلثات 26

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (29)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 **تدريبات حل المسألة**
قانون جيب التمام

1) بركة سياحة، يمثل الشكل أثناء بركة سياحة، وبحالها بحفرة إلقاء واحدة من جهة المياه العميقة، والأخرى من جهة المياه غير العميقة. والمسافة بين كل من الحطتين ومنصة القفر كذا في الشكل.

2) مع خالدة جهاز اتصال لاسلكي يمكنه استعماله إذا كان في مدى لا يزيد على 40 mi عن برج البث. إذا قاد خالدة سيارته مسافة 32 mi من برج البث على طريق رئيس ثم سار في طريق فرعية مسافة 19 mi آخر كما في الشكل أدناه.

3) دراجات، تحرك هيلان بدراجتها من نقطة A في مسارين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما 15° . فإذا قطع الطفل الأول مسافة 5 m، والثاني 7 m، فما المسافة بينها في تلك اللحظة؟

4) تقنية، مع خالدة جهاز اتصال لاسلكي يمكنه استعماله إذا كان في مدى لا يزيد على 40 mi عن برج البث. إذا قاد خالدة سيارته مسافة 32 mi من برج البث على طريق رئيس ثم سار في طريق فرعية مسافة 19 mi آخر كما في الشكل أدناه.

5) هل يستطيع خالدة استعمال الجهاز من هذا المكان؟ وضع إجابتك.

6) إذا كان خالد في مدى البث عند هذه النقطة، فكم المسافة التي يجب أن يسيرها على الطريق الفرعي ليخرج من مدى البث؟ وإذا كان خارج مدى البث، فما المسافة التي يجب أن يسيرها عائدًا ليكون في مدى البث.

7) إنه ضمن مدى البث، ويضيء مدى البث أيضًا إن سار 1.4 m متباعدًا.

8) حجم لشكافة له برتاين A و B والمسافة بينهما 80 m. يقع مكتب مدير الخيم عند النقطة O على بعد 95 m من A وعلى بعد 115 m من B، ما قياس الزاوية $\angle AOB$ ؟

9) **قانون الجيوب**
 $B = 30^\circ, a = 2.7, c = 6.1$

10) **قانون الجيوب**
 $A = 41^\circ, C = 55^\circ, a = 6.1$

11) **قانون الجيوب**
 $A = 27^\circ, C = 119^\circ, c = 7.8$
 $A = 11^\circ, C = 27^\circ, c = 50$

12) **قانون الجيوب**
 $B = 142^\circ, a = 21.6, b = 67.8$

13) **قانون الجيوب**
 $A = 71^\circ, C = 62^\circ, a = 20$

14) **قانون الجيوب**
 $B = 47^\circ, b = 15.5, c = 18.7$

15) **قانون الجيوب**
 $A = 51^\circ, b = 7, c = 10$

16) **قانون الجيوب**
 $a = 7.8, C = 85^\circ, B = 44^\circ$

17) **قانون الجيوب**
 $B = 125^\circ, a = 8, b = 14$

18) **قانون الجيوب**
 $A = 26^\circ, C = 27^\circ, c = 7.8$

الصف: الثاني التاني الفصل: 8 حساب المثلثات 29

دون ضمن فوق

تدريبات المهارات (28)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 **تدريبات المهارات**
قانون جيب التمام

حلّ كلًا من المثلثات الآتية مقرباً الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

1) $A = 143^\circ, B = 20^\circ, C = 16^\circ$

2) $A = 104^\circ, B = 47^\circ, C = 29^\circ$

3) $B = 23^\circ, C = 116^\circ, a = 5.1$

4) $C = 35^\circ, a = 5, b = 8$
 $A = 37^\circ, B = 107^\circ, c = 4.8$
 $C = 71^\circ, a = 3, b = 4$
 $A = 44^\circ, B = 67^\circ, c = 4.1$

حدد القانون (الجيوب أم جيب التمام) الذي يتعين استخدامه لحل المثلث في كل ما يأتي، ثم حلّ المثلث.

6) **قانون الجيوب**
 $B = 30^\circ, a = 2.7, c = 6.1$

7) **قانون الجيوب**
 $A = 41^\circ, C = 55^\circ, a = 6.1$

8) **قانون الجيوب**
 $A = 27^\circ, C = 119^\circ, c = 7.8$
 $A = 11^\circ, C = 27^\circ, c = 50$

9) **قانون الجيوب**
 $B = 142^\circ, a = 21.6, b = 67.8$

10) **قانون الجيوب**
 $A = 71^\circ, C = 62^\circ, a = 20$

11) **قانون الجيوب**
 $B = 47^\circ, b = 15.5, c = 18.7$

12) **قانون الجيوب**
 $A = 51^\circ, b = 7, c = 10$

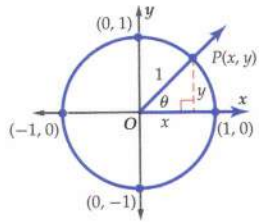
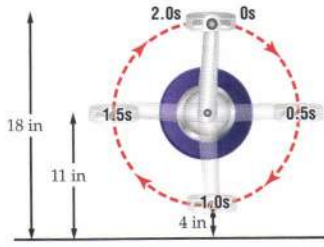
13) **قانون الجيوب**
 $a = 7.8, C = 85^\circ, B = 44^\circ$

14) **قانون الجيوب**
 $B = 125^\circ, a = 8, b = 14$

15) **قانون الجيوب**
 $A = 26^\circ, C = 27^\circ, c = 7.8$

الصف: الثاني التاني الفصل: 8 حساب المثلثات 28

الدوال الدائرية Circular Functions



لماذا؟

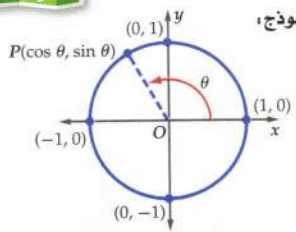
عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدال أثناء دورانه يمثل دالة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبين في الشكل المجاور. لاحظ أن البدال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كل ثانيتين.

الدوال الدائرية: دائرة الوحدة هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالتَي الجيب وجيب التمام.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos \theta$ هي الإحداثي x ، وقيمة $\sin \theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

دوال في دائرة الوحدة



التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$ فإن $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$ الرموز: $P(x, y)$ مثال، إذا كانت: $\theta = 120^\circ$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$

أضف إلى
طوبتك

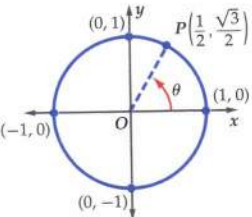
مفهوم أساسي

www.obeikaneducation.com

كل من $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$ دالة بالنسبة إلى θ . وتُسمى كل منهما **دالة دائرية**؛ لأن تعريف كل منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مثال 1

إيجاد قيمة كل من الجيب وجيب التمام بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. فأوجد كلًا من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.
 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos \theta, \sin \theta)$
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. فأوجد كلًا من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.
 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، $\cos \theta = \frac{3}{5}$

إرشادات للدراسة

الدوال الدائرية، بما أن طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها θ يساوي $r\theta$ ، وعليه يمكن التعبير عن مجال الدالة المثلثية بطول القوس المقابل للزاوية بدلاً من قياسها، وعندئذ تسمى دالة دائرية.

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 8-6

إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية.

الدرس 8-6

إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال دائرة الوحدة.

استعمال خصائص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.

ما بعد الدرس 8-6

تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانياً وتفسيرهما.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"،

واسأل:

• استعمال أقصى وأدنى ارتفاع للبدال لإيجاد طول قطر الدائرة.

(طول القطر) =

(القيمة الكبرى) - (القيمة الصغرى)

$18 - 4 = 14 \text{ in}$

• استعمال ارتفاع مركز الدائرة لإيجاد طول قطر الدائرة.

(طول نصف القطر) = $18 - 11 = 7 \text{ in}$

أو

$11 - 4 = 7 \text{ in}$

إذن طول القطر

$2(7) = 14 \text{ in}$

• ما موقع البداية للبدال؟ فسر ذلك. يمكن

حساب موقع البداية عندما $t = 0$ ثانية، في هذه اللحظة يكون البدال عند أعلى نقطة في الشكل.

مصادر الدرس 8-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (194)	• تنوع التعليم، ص (194, 197)	• تنوع التعليم، ص (197)
كتاب التمارين	• ص (26)	• ص (26)	• ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

الدورات، يمكن أن

تبدأ الدورة عند أي

نقطة في منحنى الدالة

الدورية. ففي المثال 2

إذا كانت بداية الدورة

عند $\frac{\pi}{2}$ ، فإن النمط

سيبدأ بالتكرار عند $\frac{3\pi}{2}$

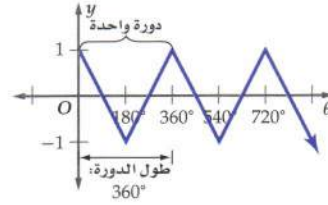
ويكون طول الدورة هو:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

الدوال الدورية: في الدوال الدورية يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبين في التمثيل البياني للدالة أدناه.

θ	y
0°	1
180°	-1
360°	1
540°	-1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°



الدوال الدائرية:

مثال 1 يبين كيفية إيجاد الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة.

التقويم التكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$. فأوجد قيمة $\cos \theta$, $\sin \theta$

$$\sin \theta = \frac{3}{4}, \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

الدوال الدورية:

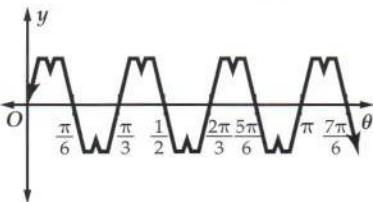
مثال 2 يبين كيفية استعمال التمثيل البياني للدالة الدورية لإيجاد طول الدورة.

مثال 3 يبين كيفية حل مسائل من واقع الحياة باستعمال الصفة الدورية للدوال المثلثية.

مثال 4 يبين كيفية إيجاد قيمة دالة مثلثية باستعمال دورة الدالة.

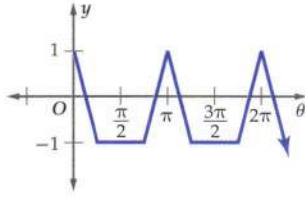
مثال إضافي

2 أوجد طول دورة الدالة الممثلة بيانياً: $\frac{\pi}{3}$



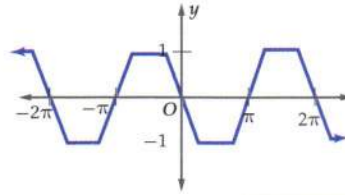
مثال 2 إيجاد طول الدورة

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور. يبدأ تكرار النمط عند $\pi, 2\pi, \dots$ ولذلك طول الدورة هو π .



تحقق من فهمك

2 أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور. 2π



دوران العجلة والبذل في الدراجة الهوائية، ولعبة العجلة الدوّارة، والعديد من الألعاب في مدن الألعاب، ودوران الأشياء المختلفة في الفضاء، كلها تُمثل دوالاً دورية.

مثال 3 من واقع الحياة

دراجات هوائية، عد إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغير ارتفاع البذل في الدراجة الهوائية بصورة دورية كدالة في الزمن.

(a) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البذل عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3

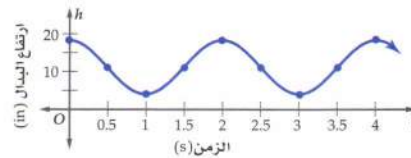
عند 0s يكون الارتفاع 18 in، وعند 0.5s يكون الارتفاع 11 in، وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

(b) أوجد طول دورة الدالة.

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.

(c) مثل الدالة بيانياً. افترض أن المحور الأفقي يُمثل الزمن t ، والمحور الرأسي يُمثل الارتفاع h . أقصى ارتفاع يصله البذل 18 in. وأقل ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرر كل ثانيتين.

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0



الربط مع الحياة

أغلب متسابقي الدراجات

الهوائية يديرون البذلات

بمعدلات تزيد على

200 دورة/دقيقة. أما غالبية

الناس الذي يركبون دراجات

هوائية فيديرونها بمعدلات

تتراوح بين

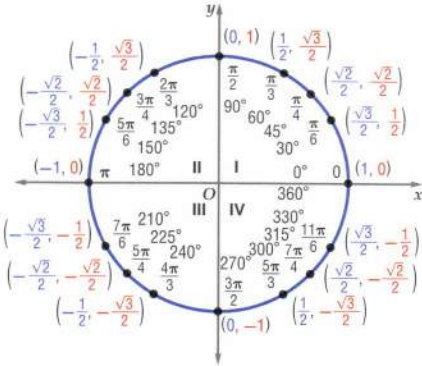
90-120 دورة/دقيقة.

تحقق من فهمك

3 درجات هوائية افرض أن البدال للدراسة الهوائية المحددة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدل دورة واحدة لكل ثانية.

A أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

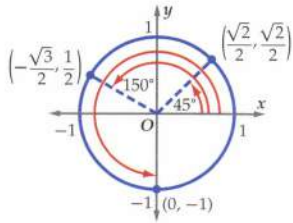
B أوجد طول دورة الدالة ومثلها بيانياً. 1؛ لتمثيل البياني انظر الهامش.



يبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من $\sin \theta$, $\cos \theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثل الإحداثي x قيمة $\cos \theta$ ، ويمثل الإحداثي y قيمة $\sin \theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.

يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالتين: $\sin \theta$, $\cos \theta$ بيانياً، حيث يمثل المحور الأفقي قيم θ ، والمحور الرأسي قيم الدالة المطلوبة.

تكرر دورة كل من دالتي الجيب وجيب التمام 360° . وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما 360° أو 2π .



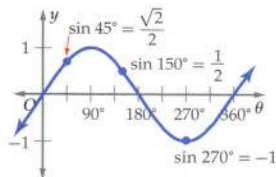
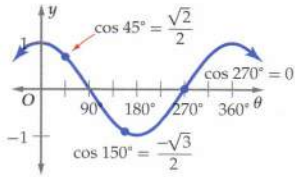
إذا كانت النقاط المبينة في الشكل تمثل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45^\circ$, $\theta = 150^\circ$, $\theta = 270^\circ$.

$$(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270^\circ, \sin 270^\circ) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكل من الدالتين $\sin \theta$, $\cos \theta$ كما يأتي:



الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
4	0.5
18	1.0
4	1.5
18	2.0
4	2.5
18	3.0

إرشادات للدراسة

الجيب وجيب التمام

لمساعدتك على التذكر: لكل نقطة (x, y) على دائرة الوحدة يكون $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ لاحظ أن x تأتي قبل y في ترتيب الأحرف الإنجليزية، وكذلك فإن \cos تأتي قبل \sin .

إرشادات للدراسة

الراديان عند تمثيل

دالتي الجيب وجيب التمام يمكن تدرج المحور θ بالراديان.

مثالان إضافيان

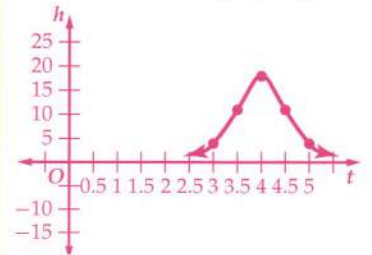
درجات هوائية: بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، تلاحظ أن ارتفاع بدال الدراسة الهوائية يتغير دورياً بوصفها دالة بالنسبة إلى الزمن.

a أنشئ جدولاً يبين ارتفاع البدال عند 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ثانية.

الارتفاع (in)	الزمن (sec)
4	3.0
11	3.5
18	4.0
11	4.5
4	5.0

b أوجد طول دورة الدالة. 2 ثانية

c مثل الدالة بيانياً بحيث يمثل المحور الأفقي الزمن t ، ويمثل المحور الرأسي ارتفاع البدالة عن الأرض h .



أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 690^\circ$

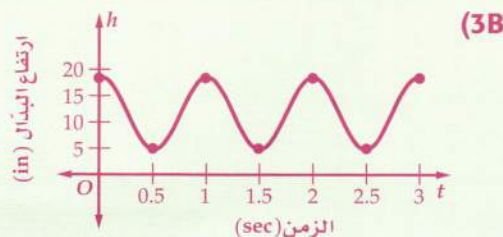
b $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

تنوع التعليم



المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلبة الاستعانة بشبكة المعلومات "الإنترنت" في البحث عن أنواع مختلفة من الدوال الدورية، وإيجاد طول دورة كل منها.

إجابة (تحقق من فهمك)



التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي: أعط الطلبة أمثلة محددة، ثم اطلب إليهم إعداد تسجيلات صوتية يشرحون فيها كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لدالة مثلثية لزاوية قياسها أكبر من 360° (أو أقل من -360°).

بما أن طول الدورة لكل من الدالتين هو 360° ، فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل 360° .
لذلك فإن $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$ ، $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$

مثال 4 حساب قيم الدوال المثلثية

أوجد قيم كل دالة مما يأتي:

(a) $\cos 480^\circ$

$$\begin{aligned}\cos 480^\circ &= \cos(120^\circ + 360^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(4A) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 420^\circ$

(b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\sin \frac{11\pi}{4} &= \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(4B) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

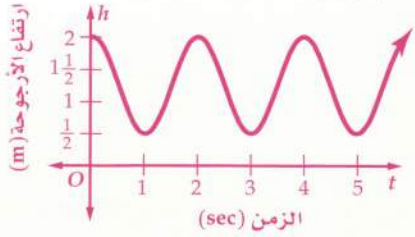
3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1-8 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابة:

(5b) إجابة ممكنة:

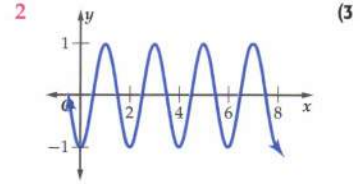
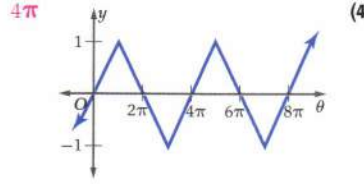


تأكد

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ في كل مما يأتي:

(1) $P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$ $\cos \theta = \frac{15}{17}$, $\sin \theta = \frac{8}{17}$ (2) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين:



مثال 3 5 أرجوحة: إذا مثل ارتفاع أرجوحة دالة دورية في الزمن، بحيث تصل الأرجوحة إلى أقصى ارتفاع لها وهو 2 m، ثم تعود إيجاباً لتصل 2 m مرة أخرى مروراً بأقل ارتفاع لها وهو $\frac{1}{2}$ m، مستغرقة زمناً قدره 1 sec بين أقل ارتفاع وأقصى ارتفاع.

- (a) ما الزمن الذي تستغرقه حركة الأرجوحة ذهاباً وإياباً بدءاً بأقصى ارتفاع وانتهاءً إليه؟ 4 sec
(b) مثل بيانياً ارتفاع الأرجوحة h باعتبارها دالة في الزمن t . انظر الهامش.

مثال 4 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مما يأتي:

(6) $\frac{1}{2} \sin \frac{13\pi}{6}$ (7) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(-60^\circ)$ (8) $-1 \cos 540^\circ$

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	34-46، 32، 9-25
ضمن المتوسط	34-46، 32، 25، 24، 18-22
فوق المتوسط	24-46

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ في كلِّ ممَّا يأتي:

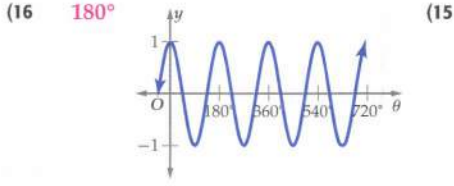
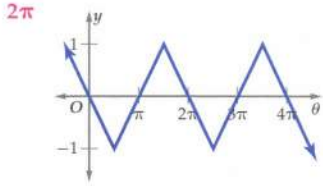
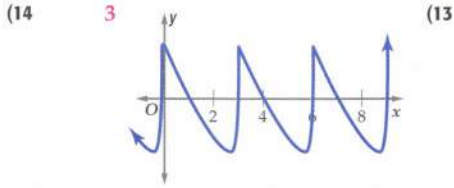
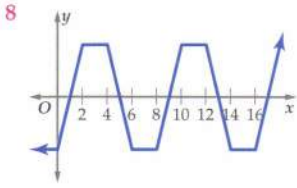
(9) $\cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = -\frac{4}{5}$ $P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right)$

(10) $\cos \theta = -\frac{5}{13}, \sin \theta = -\frac{12}{13}$ $P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right)$

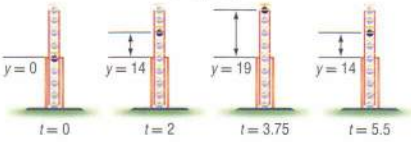
(11) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2}$ $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(12) $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{19}}{5}$ $P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right)$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلِّ من الدوال الآتية:



مقطع جانبي للمجلة



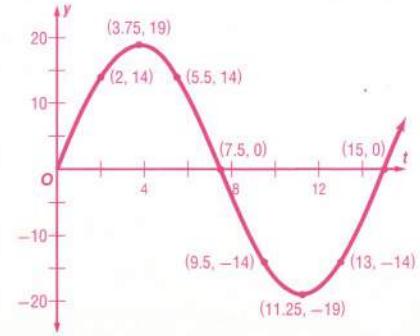
مثال 3 **17 العجلة الدوارة:** بين الشكل المجاور موقع

مقعد راكب y بالأقدام عن مركز العجلة بعد t ثانية. إذا تغير ارتفاع المقعد y في العجلة بصورة دورية كدالة في الزمن. **انظر إجابات الطلاب**

(a) أنشئ جدولاً يوضح ارتفاع المقعد y عند الثواني الآتية: 0, 2, 3.75, 5.5, 7.5, 9.5, 11.25, 13, 15.5

(b) أوجد طول دورة الدالة.

(c) مثل الدالة بيانياً. افترض أن المحور الأفقي يمثل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثل الارتفاع y . **انظر الهامش**



مثال 4 أوجد القيم الدقيقة لكلِّ ممَّا يأتي:

(19) $\frac{1}{2} \cos(-60^\circ)$

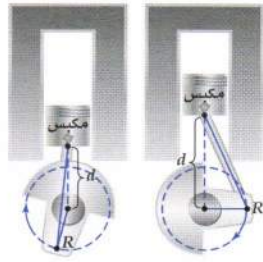
(20) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{7\pi}{3}$

(21) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{11\pi}{4}$

(22) $0 \cos 450^\circ$

(23) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 570^\circ$

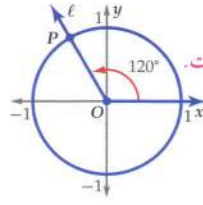
(24) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(-45^\circ)$



24) محركات: في المحرك الممثل المجاور، المسافة d من المكبس إلى مركز الدائرة التي تُسمى ناقل الحركة (الكرنك) وتشكل دالة في الزمن. إذا علمت أن النقطة R الواقعة على ذراع المكبس تدور بسرعة 150 دورة/ثانية، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

(a) أوجد طول الدورة بالثواني. $\frac{1}{150}$

(b) إذا كانت أقصر قيمة للمسافة d تبلغ 1 cm وأكبر قيمة 7 cm فمثل منحنى الدالة بيانياً. معبّراً أن المحور الأفقي يمثل الزمن t ، والمحور الرأسي يمثل المسافة d . **انظر الهامش.**



25) تمثيلات متعددة: يقطع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة P كما يُبين الشكل المجاور. **انظر ملحق الإجابات.**

(a) هندسياً: انسخ الشكل في دفترك، وارسم ضلع الانتهاء لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها $30^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 315^\circ$ في الوضع القياسي.

(b) جدولياً: أنشئ جدولاً للقيم يوضح ميل كل ضلع انتهاء، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(c) تحليلياً: ماذا تستنتج بالنسبة إلى العلاقة بين ظل الزاوية والميل؟ وضع إجابتك.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(27) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 6(\sin 30^\circ)(\sin 60^\circ)$ (28) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \cos 45^\circ - \cos 30^\circ$

(29) $-\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi$ (30) $-\frac{5\sqrt{3}}{2} 2 \sin \frac{4\pi}{3} - 3 \cos \frac{11\pi}{6}$

(31) $\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos 30^\circ)(\cos 150^\circ)}{\sin 315^\circ}$ (32) $1 (\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) اكتشاف الخطأ: قام كل من خالد ونواف بحساب القيمة الدقيقة للمقدار $\cos \frac{-\pi}{3}$. فأيهما إجابهته صحيحة؟ فسر إجابتك.

نواف

$$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = 0.5$$

خالد

$$\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -0.5$$

33) تحدّ: إذا بدأ نصف مستقيم من نقطة الأصل ماراً بالنقطة $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المستوى الإحداثي، فاذكر قياساً للزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x . -60°

34) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وضع إجابتك "طول دورة دالة الجيب من مضاعفات π "

(32) نواف؛ قام خالد بكتابة علاقة غير صحيحة وهي: $\cos \frac{-\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$ (34) أحياناً؛ يمكن لطول الدورة في دالة الجيب أن يساوي $\frac{\pi}{2}$ ، وهي ليست من مضاعفات π . (35) طول دورة الدالة الدورية، هو أصغر مسافة أفقية للجزء المتكرر في التمثيل البياني للدالة ويمثل هذا الجزء دورة واحدة.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلبة في السؤال 25 الرسم، وإنشاء جدول قيم، ويحللون القيم؛ لاستقصاء العلاقة بين ظل الزاوية والميل.

4 التقويم

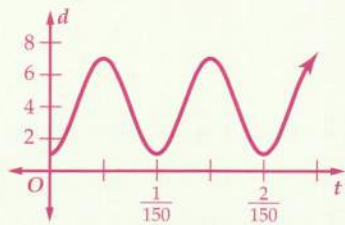
فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلبة أن يصفوا نقاط دائرة الوحدة في كل ربع وعلى كل محور.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ينبغي أن يلاحظ الطلبة في السؤال 32، أن إجابة نواف صحيحة؛ لأن دالة جيب التمام تتكرر كل 2π راديان. أمّا إجابة خالد فهي غير صحيحة؛ لأن $\cos(-\theta) = \cos \theta$ وضح للطلبة أنه إذا كانت θ في الربع الأول، $-\theta$ في الربع الرابع، فإن الإحداثي x للنقطتين الممثلتين للزاويتين $\theta, -\theta$ هو نفسه وأن $\cos(-\theta) = \cos \theta$. (يستطيع الطلبة ملاحظة النتيجة نفسها لـ θ في الربع الثاني و $-\theta$ في الربع الثالث.)

إجابة:

24b) إجابة ممكنة:



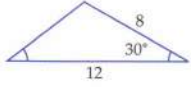
تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اعرض على الطلبة التمثيل البياني لكلٍ من $y = \cos x, y = \cos 2x, y = \cos 3x$ ، واطلب إليهم إيجاد طول دورة كل دالة منها. $120^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ على الترتيب. ثم اطلب إليهم إيجاد طول دورة الدالة $y = \cos \frac{360^\circ}{k} x$.

35) اكتب: وضح كيف يمكنك حساب طول دورة الدالة الدورية، باستعمال التمثيل البياني للدالة. ضمّن في توضيحك وصفاً للدورة.

تدريب على اختبار



37) هندسة: مساحة المثلث في الشكل المجاور تساوي: D

- 24 D 41.6 C 96 B 48 A

36) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8 = ?$ A

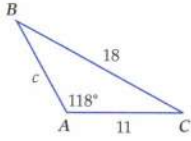
- 161 D 31 C 13 B 5 A

مراجعة تراكمية

42) حل واحد: $B \approx 35^\circ, C \approx 99^\circ, c \approx 13.7$

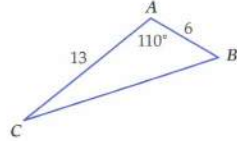
43) حل واحد: $B \approx 31^\circ, C \approx 39^\circ, c \approx 6.0$

حلّ كلّ من المثلثات الآتية: قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب عُشر، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: الدرسان (8-4, 8-5)



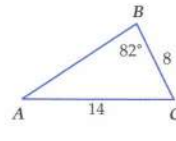
(40)

$B \approx 33^\circ, C \approx 29^\circ, c \approx 9.9$



(39)

$a \approx 16.1, B \approx 49^\circ, C \approx 21^\circ$



(38)

$A \approx 34^\circ, C \approx 64^\circ, c \approx 12.7$

حدّد إذا كان للمثلث في كلّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حلول. أوجد الحلول، مقرّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة: الدرس (8-4)

$A = 110^\circ, a = 9, b = 5$ (43)

$A = 72^\circ, a = 6, b = 11$ (41) لا يوجد حل (42) $A = 46^\circ, a = 10, b = 8$

بسّط كلّاً مما يأتي: (مهارة سابقة)

120 $\frac{90}{|2 - \frac{11}{4}|}$ (46)

108 $\frac{180}{|2 - \frac{1}{3}|}$ (45)

960 $\frac{240}{|1 - \frac{5}{4}|}$ (44)



مصادر الدرس 6 - 8

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (32)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم

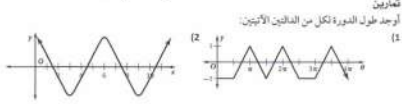
الدوال الدائرية
المسألة
المسألة الدائرية من دائرة تتكرر قيمة زاويتها على فترات منتظمة. وعندما يكتمل النقط بصورة دائرية تكون دورة، والطول الأضيق لهذه الدورة يسمى طول الدورة. وبالتالي يجب التمام دائرتان دورتان طول دورة كل منهما 360° أو 2π راديان.



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة بما يأتي:

(a) $\sin 855^\circ = \sin(135^\circ + 720^\circ) = \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة بما يأتي:

(1) $\sin(-510^\circ) = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$

(3) $\sin(495^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

المصدر: التتالي الثاني الفصل 8، حساب التفاضل

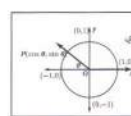
دون

تدريبات إعادة التعليم (31)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الدائرية
تعريف الجيب وجيب التمام
إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$ فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$ كما يلي: $P(\cos \theta, \sin \theta)$ عن الصورة $P(\cos \theta, \sin \theta)$



متى إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ ، فأوجد كل من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\csc \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\cot \theta$.

تعاريف $\cos \theta = -\frac{5}{6}$ ، $\sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ ، $\tan \theta = \frac{\sqrt{11}}{-5}$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاة، فأوجد قيمة كل من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

(1) $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (2) $P(0, -1)$

(3) $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ (4) $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

(5) $P\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$ (6) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

(7) تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 45° P (8) تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 120° P

(9) تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 240° P (10) تقع على ضلع الانتهاء للزاوية 330° P

المصدر: التتالي الثاني الفصل 8، حساب التفاضل

فوق

تدريبات حل المسألة (34)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات حل المسألة

المسألة
المسألة الدائرية
(1) اعتباراً، وضعت نقطة مرسومة على دائرة إطار سيارة. ومع حركة السيارة بدأ ارتفاع النقطة عن سطح الأرض يتغير بحسب العلاقة $h = -8\cos t + 8$ حيث t الزمن بالثواني، h ارتفاع النقطة بالبوصات.



- (2) هندسة، درجة حرارة شهرية (بالفهرنهايت) في إحدى المدن يُعز عنها بالعلاقة $T = 42 + 30 \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)$ حيث t بالشهور.
- (a) ما أعلى درجة حرارة شهرية في هذه المدينة؟ $72^\circ F$
- (b) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟ مارس
- (c) ما أعلى درجة حرارة شهرية في المدينة؟ $12^\circ F$
- (d) ما الشهر الذي تحصل فيه على هذه الدرجة؟ سبتمبر
- (e) ما عدد دورات الإطار في الثانية؟ 2
- (f) ما المسافة التي تغطيها النقطة في 30 ثانية؟ وفي ساعة؟ 10.91 mi ، 480 ft

المصدر: التتالي الثاني الفصل 8، حساب التفاضل

فوق

تدريبات المهارات (33)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات المهارات

الدوال الدائرية
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P فأوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ لكل ما يأتي:

(1) $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ (3) $P\left(-\frac{9}{41}, -\frac{40}{41}\right)$

(4) $P(0, 1)$ (5) $P(-1, 0)$ (6) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(7) أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة بما يأتي: $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

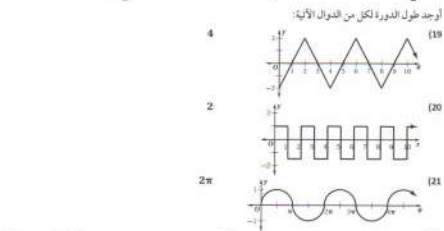
(8) $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$ (9) $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$

(10) $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (11) $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$

(12) $\sin(-390^\circ) = -\frac{1}{2}$ (13) $\sin 5\pi = 0$

(14) $\cos 3\pi = -1$ (15) $\sin \frac{5\pi}{2} = 1$

(16) $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (17) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$



المصدر: التتالي الثاني الفصل 8، حساب التفاضل

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 8-7

تعرف الدوال الدورية.

الدرس 8-7

وصف دوال الجيب، وجيب التمام والظل وتمثيلها بيانياً.

وصف دوال مثلثية أخرى وتمثيلها بيانياً.

ما بعد الدرس 8-7

تمثيل الدوال الدورية بيانياً. وتفسيرها بدلالة سعتها، وتردها، وطول دورتها.

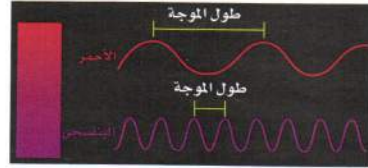
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف تُقاس أطوال الموجات في الشكل؟
- تُقاس أطوال الموجات بقياس المسافة بين قمتين متتاليتين أو بين قاعين متتاليتين.
- ما الطريقة الأخرى لقياس طول الموجة؟
- يمكن قياس طول الموجة بقياس المسافة بين أي نقطتين متناظرتين في موجتين متتاليتين.
- ما عدد الموجات البنفسجية التي يعادل طولها طول موجة حمراء في الشكل؟ 3



لماذا؟

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة:

$$y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

حيث تمثل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

دوال الجيب، وجيب التمام، والظل: يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانياً في المستوى الإحداثي. تذكر أن منحنيات الدوال الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكل دورة يستوى طول الدورة. **سعة** منحني دالة الجيب أو دالة جيب التمام، تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

مفهوم أساسي		دالتا الجيب وجيب التمام
$y = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	الدالة المولدة (الأم)
		التمثيل البياني
مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	المجال
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	المدى
1	1	السعة
360°	360°	طول الدورة

يمكنك تطبيق ما تعلمته أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على التمثيل البياني للدوال المثلثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$, التي سعتها $|a|$ ، وطول دورتها $\frac{360^\circ}{|b|}$.

1 مثال إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة يساوي 4 أو $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

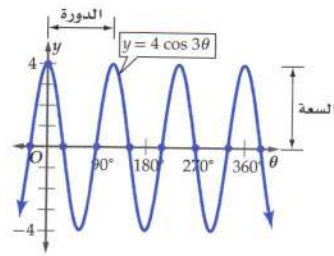
طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|3|} = 120^\circ$

من الرسم يكرر الرسم نفسه كل 120°

تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي:

(1A) $y = \cos \frac{1}{2}\theta$ السعة: 1؛ طول الدورة: 720° (1B) $y = 3 \sin 5\theta$ السعة: 3؛ طول الدورة: 72°



الدرس 8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً 199

فيما سبق:

درست الدوال الدورية.

والآن:

- أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل، وأمثلها بيانياً.
- أصف دوال مثلثية أخرى، وأمثلها بيانياً.

المفردات:

السعة

amplitude

التردد

frequency

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

- طول الدورة، في الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$ تمثل عدد الدورات في 360° . ففي المثال 1 يدل العدد 3 في الدالة: $y = 4 \cos 3\theta$ على وجود 3 دورات في 360° . مما يعني وجود دورة واحدة في 120° .

مصادر الدرس 8-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (200)	• تنويع التعليم، ص (200, 204)	• تنويع التعليم، ص (204)
كتاب التمارين	• ص (27)	• ص (27)	• ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36)	• تدريبات المهارات، ص (38)	• تدريبات المهارات، ص (38)
	• تدريبات المهارات، ص (38)	• تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات حل المسألة، ص (39)
	• تدريبات حل المسألة، ص (39)	• التدريبات الإثرائية، ص (40)	• التدريبات الإثرائية، ص (40)

إرشادات للدراسة

نقاط التقاطع مع المحور θ .

يمكن إيجاد نقاط تقاطع منحنى الدالة مع المحور θ بوضع $y = 0$ وحل المعادلة أو إيجاد قيم θ التي تحققها.

دوال الجيب وجيب التمام والظل:

مثال 1 يبين كيفية إيجاد سعة وطول الدورة دالة مثلثية.

مثال 2 يبين كيفية استعمال السعة وطول الدورة لتمثيل الدالة المثلثية بيانياً.

مثال 3 يبين كيفية كتابة دالة مثلثية تمثل موقفاً من واقع الحياة.

مثال 4 يبين كيفية استعمال طول الدورة وخطوط التقارب لدالة الظل لتمثيلها بيانياً.

تقويم تكويني:

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

استعمل منحنيات الدوال المولدة (الأم) لتمثيل كل من الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام المناسبة بيانياً. ويمكنك أيضاً استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ .

حيث نقاط التقاطع مع المحور θ للدالة: $y = a \sin b\theta$ وللدالة: $y = a \cos b\theta$ في الدورة التي تبدأ عند $\theta = 0$ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

مثال 2 تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانياً

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$y = 2 \sin \theta \quad (a)$$

أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2, b = 1$.

$$|a| = |2| = 2 \quad \text{السعة:}$$

← المنحنى يتسع رأسياً بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2.

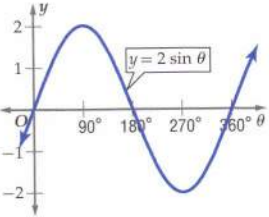
← دورة واحدة طولها 360° .

$$\text{طول الدورة: } \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|1|} = 360^\circ$$

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$$



$$y = \cos 4\theta \quad (b)$$

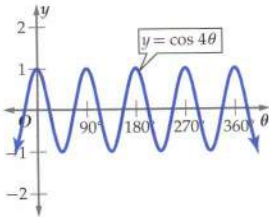
أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 1, b = 4$.

$$|a| = |1| = 1 \quad \text{السعة:}$$

$$\text{طول الدورة: } \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$$

$$\text{نقاط التقاطع مع المحور } \theta \text{ هي: } \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$$



تحقق من فهمك (2A, 2B) انظر الهامش.

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (2B)$$

$$y = 3 \cos \theta \quad (2A)$$

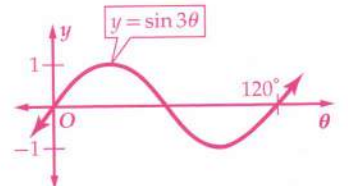
تفيد الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد** وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلاً إذا كان طول الدورة للدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

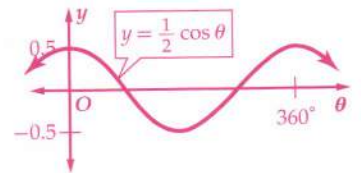
مثالان إضافيان

1 أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = \sin \frac{1}{3}\theta$. السعة: 1؛ طول الدورة: 1080°

2 مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً: $y = \sin 3\theta$ (a)



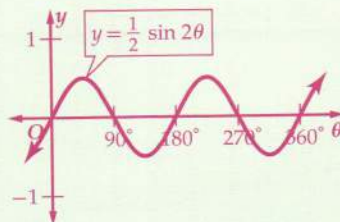
(b) $y = \frac{1}{2} \cos \theta$



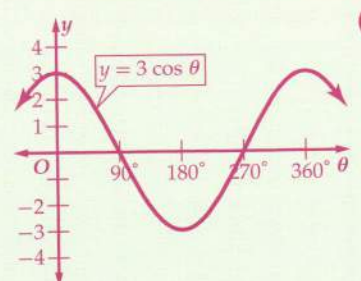
تنويع التعليم

دون صمغ

المتعلمون البصريون / المكانيون ورّع الطلبة في مجموعات واطلب إليهم عمل ملصقات يظهر عليها التمثيل البياني للدوال المثلثية الست. شجّع الطلبة على تمييز العناصر الأساسية للدوال مثل: طول الدورة، السعة، خطوط التقارب، باستعمال الألوان المختلفة.



(2B)



(2A)



الربط مع الحياة

يمكن للفيلة سماع صوت يبعد عنها 5 أميال. ويمكن للإنسان سماع الأصوات التي يتراوح ترددها بين 20 هيرتز إلى 20000 هيرتز.

أصوات: تُسمى الأصوات التي يكون ترددها أقل من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات / ثانية.

(a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت. يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2 \text{ sec}$.

(b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب تمثل موجة الصوت y باعتبارها دالة في الزمن t ، ثم مثلها بيانياً.

طول الدورة $\frac{2\pi}{|b|}$

بالتعويض $0.2 = \frac{2\pi}{|b|}$

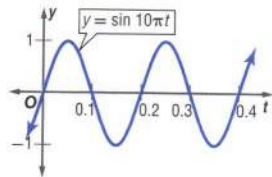
بضرب الطرفين في $|b|$ $0.2|b| = 2\pi$

بضرب الطرفين في 5، b موجبة $b = 10\pi$

الصورة العامة لدالة الجيب $y = a \sin b\theta$

بالتبسيط $y = 1 \sin 10\pi t$

بالتبسيط $y = \sin 10\pi t$



تحقق من فهمك

(3) أصوات: يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

(A) أوجد طول دورة الدالة. $\frac{1}{20} = 0.05 \text{ sec}$

(B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت، ثم مثلها بيانياً. $y = \cos 40\pi t$ لتمثيل الدالة انظر ملحق الإجابات.

تعدّ دالة الظل من الدوال المثلثية التي لها خطوط تقارب.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة: لاحظ أن السعة تؤثر في منحنى الدالة في اتجاه المحور y ، أما طول الدورة فيؤثر في اتجاه المحور x .

مثال إضافي

3

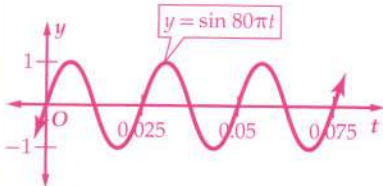
أصوات: يستطيع الإنسان سماع صوت تردده 40 هيرتز.

(a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

$\frac{1}{40}$ أو 0.025 ثانية

(b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة الجيب التي تمثل موجة الصوت y بوصفها دالة في الزمن t . ثم مثلها بيانياً.

$y = \sin 80\pi t$



أضف إلى

دالة الظل

مفهوم أساسي

مطوبتك

التمثيل البياني للدالة	$y = \tan \theta$	الدالة المولدة (الأم)
	$\{\theta \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$	المجال
	مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
	غير معرفة	السعة
	180°	طول الدورة

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ ، يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{|b|}$

الدرس 8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً 201

المحتوى الرياضي

السعة وطول الدورة: لكل من التمثيل البياني لدالتى الجيب وجيب التمام سعة. أما بقية الدوال المثلثية فليس لها سعة؛ لأنه ليس لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وطول الدورة هو المسافة على المحور الأفقي، والتي يتم التمثيل البياني من خلالها دورة كاملة واحدة. ويمكن حساب طول الدورة بسهولة من التمثيل البياني لها.

إرشادات للمعلم الجديد

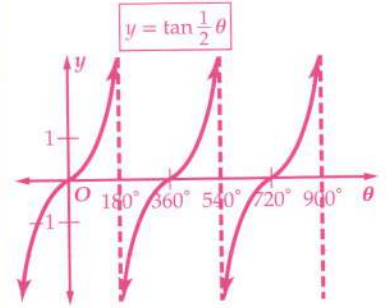
تمثيل بياني: إذا رغبت في أن يمثل الطلبة بيانياً دوال: الجيب وجيب التمام والظل، فإنه يمكن المقارنة بين هذه التمثيلات البيانية وتلك الموضحة في الصفحات 197-199. وتعدّ هذه التغذية الراجعة الفورية مفيدة لتمثيل الدوال المثلثية الأكثر صعوبة.

إرشادات للدراسة

دالة الظل: لا يوجد سعة لدالة الظل بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.

مثال إضافي

أوجد طول دورة الدالة $y = \tan \frac{1}{2} \theta$ ثم مثل هذه الدالة بيانياً. طول الدورة: 360°

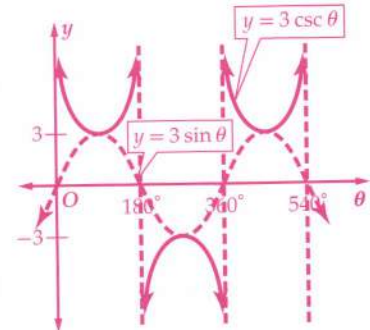


تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً:

المثال 5 يبين كيفية استعمال طول دورة أحد الدوال المثلثية الثلاث الأساسية لتمثيل دالة مثلثية أخرى.

مثال إضافي

أوجد طول دورة الدالة $y = 3 \csc \theta$ ثم مثل الدالة بيانياً. طول الدورة: 360°



التعليم باستعمال التقنيات

كاميرا توثيقية اختر بعض الطلبة لتوضيح وشرح كيفية تمثيل دالة مثلثية لزملائهم. تأكد من أن كل طالب يشرح بشكل صحيح كيفية تكوين جدول قيم، واختيار تدرج مناسب، وتعيين النقاط.

مثال 4

تمثيل دوال الظل بيانياً

أوجد طول دورة الدالة $y = \tan 2\theta$. ومثل هذه الدالة بيانياً.

$$\text{طول الدورة: } \frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$$

$$\text{خط تقارب عند: } \frac{180^\circ}{|2b|} = \frac{180^\circ}{|2 \cdot 2|} = 45^\circ$$

ارسم خطوط التقارب عند

$$-3 \cdot 45^\circ = -135^\circ, -2 \cdot 45^\circ = -90^\circ, -1 \cdot 45^\circ = -45^\circ, 1 \cdot 45^\circ = 45^\circ, 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ, 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \dots$$

استعمل $y = \tan \theta$ ، ولكن ارسم دورة كاملة كل 90° .

تحقق من فهمك

4 أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2} \tan \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً. انظر الهامش.

قراءة الرياضيات

الرمز ∇ يقرأ: الرمز "أو" ويعني هنا اتحاد هترتين.

مفهوم أساسي

دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام

$y = \cot \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \csc \theta$	الدالة المولدة (الأم)
			التمثيل البياني
$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	المجال
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	المدى
غير معرّفة	غير معرّفة	غير معرّفة	السعة
180°	360°	360°	طول الدورة

مثال 5

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً

أوجد طول دورة الدالة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.

طول دورة الدالة يساوي 360° ، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب

$y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ ، استفد من تمثيل

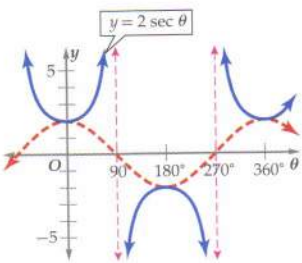
$y = 2 \cos \theta$ واتبع ما يلي:

– ارسم الدالة $y = 2 \cos \theta$

– ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالة

$y = 2 \cos \theta$ مع محور θ .

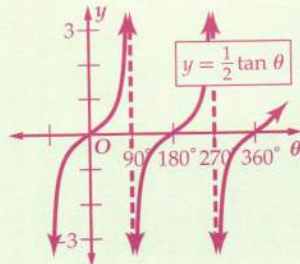
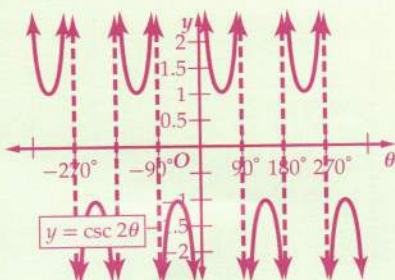
– مثل الدالة $y = 2 \sec \theta$



إجابات (تحقق من فهمك):

4 طول الدورة: 180°

5 طول الدورة: 180°



5 أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانياً. انظر الهامش.

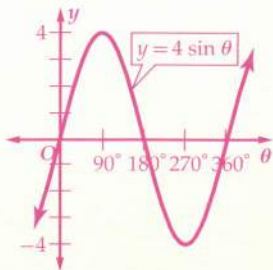
3 التدريب

التقويم التكويني:

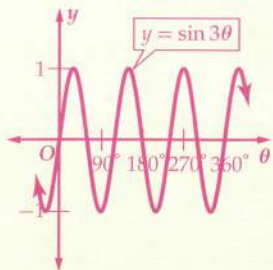
استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلبة. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

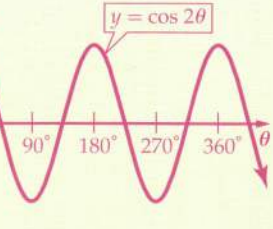
1 السعة: 4، طول الدورة: 360°



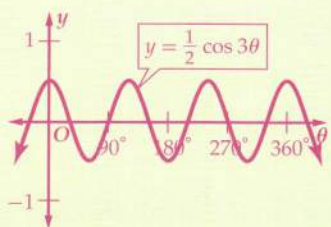
2 السعة: 1، طول الدورة: 120°



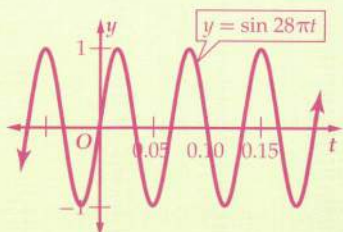
3 السعة: 1، طول الدورة: 180°



4 السعة: $\frac{1}{2}$ ، طول الدورة: 120°



5b $y = \sin 28\pi t$



تأكد

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً: (1-4) انظر الهامش.

(1) $y = 4 \sin \theta$ (2) $y = \sin 3\theta$ (3) $y = \cos 2\theta$ (4) $y = \frac{1}{2} \cos 3\theta$

المثالان 1, 2

(5) **عناكب:** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

مثال 3

(a) أوجد طول دورة الدالة. $\frac{1}{14} \approx 0.07 \text{ sec}$

(b) افرض أن سعة الدالة وحدة واحدة. واكتب دالة جيب تمثل اهتزازات الشبكة y كدالة في الزمن t ، ومثلها بيانياً. انظر الهامش.

المثالان 4, 5

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً: (6-8) انظر ملحق الإجابات.

(6) $y = 3 \tan \theta$ (7) $y = 2 \csc \theta$ (8) $y = \cot 2\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

المثالان 1, 2

(9) $y = 2 \cos \theta$ (10) $y = 3 \sin \theta$ (11) $y = \sin 2\theta$ (12) $y = \cos 3\theta$

(9-16) انظر ملحق الإجابات.

(13) $y = \frac{3}{4} \cos \theta$ (14) $y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ (15) $y = 3 \cos 2\theta$ (16) $y = 5 \sin^2 \theta$

(17) $h = 4 \sin \frac{2}{3} \pi t$

للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

مثال 3

(17) **أمواج:** قارب في عرض البحر يرتفع إلى أعلى وينخفض إلى أسفل مع الأمواج. الفرق بين أعلى ارتفاع وأقل ارتفاع للقارب 8 بوصات. ويكون القارب مستقرًا عندما يكون في المنتصف بين أعلى نقطة وأدنى نقطة. وتستمر كل دورة في هذه الحركة الدورية لمدة 3 ثوانٍ. اكتب دالة جيب تمثل حركة القارب ومثلها بيانياً. افرض أن h : الارتفاع بالبوصات، t : الزمن بالثواني. وأن القارب يكون في وضع مستقر عند $t = 0$.

(18) $V = 165 \cos 100\pi t$

للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

(18) **كهرباء:** يتمثل فرق الجهد الكهربائي الخارج من أحد الأجهزة الكهربائية بين: 165، -165 فولت وبتردد مقداره 50 دورة في الثانية في دالة دورية. اكتب دالة جيب تمام تمثل فرق الجهد V كدالة في الزمن t ومثلها بيانياً. افرض أنه عندما $t = 0$ فإن فرق الجهد يساوي 165 فولت.

أوجد طول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً: (19-22) انظر ملحق الإجابات.

المثالان 4, 5

(19) $y = \tan \frac{1}{2} \theta$ (20) $y = 3 \sec \theta$

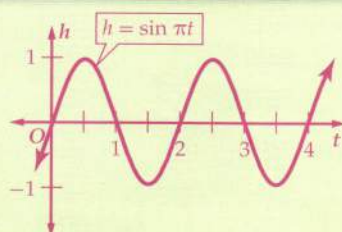
(21) $y = 2 \cot \theta$ (22) $y = \csc \frac{1}{2} \theta$

الدرس 7-8 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً 203

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأستلة
دون	دون المتوسط 9-22، 44-53
ضمن	ضمن المتوسط 9-22، 29-25 فردي، 44-35
فوق	فوق المتوسط 23-44

(23b)



بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة
الـة على الصورة $y = a \sin b\theta$ أو $y = a \cos b\theta$
ثم تحديد سعتها وطول
ورتها، وتسليمك إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة
صنف.

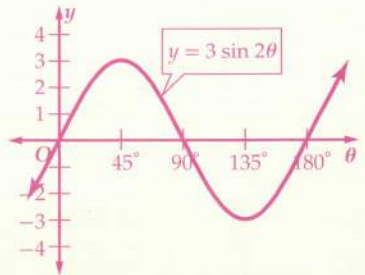
التقويم التكويني:

حقق من فهم الطلاب للدرس 8-6، 8-7،
إعطائهم:

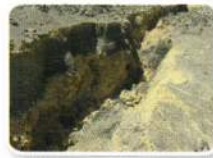
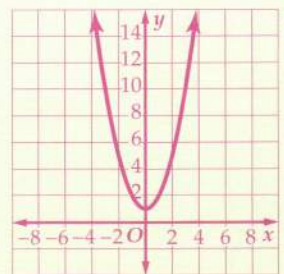
الاختبار القصير 3، ص (69)

إجابات:

(36) إجابة ممكنة: $y = 3 \sin 2\theta$



(44)



الربيط مع الحياة

الزلازل عبارة عن اهتزاز أرضي
سريع يتبعه ارتدادات تدعى
أمواج زلزالية وهذا يعود إلى
تكسر الصخور وإزاحتها نتيجة
لمؤثرات جيولوجية ينجم عنها
تحرك الصفائح الأرضية.

$$y = \cos 260\pi t \quad (24)$$

للتمثيل البياني انظر ملحق

الإجابات، تبقى السعة نفسها.

طول الدورة يتناقص لأنها

تساوي مقلوب التردد.

(23) **زلازل:** محطة لرصد الزلازل رصدت موجة زلزالية ذات تردد 0.5 هيرتز وسعتها تساوي مترًا واحدًا.

(a) اكتب دالة جيب تمثل ارتفاع الموجه h كدالة في الزمن t .

افترض أن نقطة الاتزان للموجة $h = 0$ تقع في منتصف

المسافة بين أخفض نقطة وأعلى نقطة في الموجهة. $h = \sin \pi t$

(b) مثل هذه الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

(24) **اهتزازات:** سلك مشدود بين نقطتين يهتز بتردد 130 هيرتز. اكتب دالة جيب التمام التي تمثل اهتزازات

السلك y كدالة في الزمن t ومثلها بيانيًا. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. وإذا تضاعف التردد، فماذا

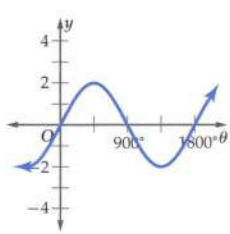
يحصل لكل من طول الدورة والسعة؟

أوجد السعة، (إن كانت معرفة) وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثلها بيانيًا: (25-30) انظر ملحق الإجابات.

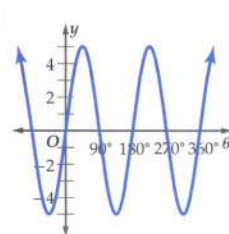
$$y = 2 \tan \frac{1}{2} \theta \quad (27) \quad y = \frac{1}{2} \cos \frac{3}{4} \theta \quad (26) \quad y = 3 \sin \frac{2}{3} \theta \quad (25)$$

$$y = 2 \cot 6\theta \quad (30) \quad y = 5 \csc 3\theta \quad (29) \quad y = 2 \sec \frac{4}{5} \theta \quad (28)$$

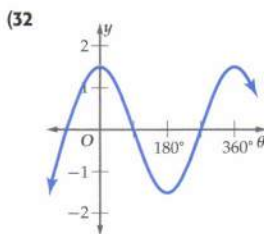
حدّد طول دورة كل من الدوال الممثلة بيانيًا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:



$$180^\circ; y = 2 \sin \frac{1}{5} \theta$$



$$180^\circ; y = 5 \sin 2\theta$$



$$360^\circ; y = \frac{3}{2} \cos \theta$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) **تحّد:** حدد المجال والمدى لكل من الدالتين $y = a \cos \theta$ ، $y = a \sec \theta$ ، حيث a عدد حقيقي موجب.

(35) مجال كل منهما مجموعة الأعداد

(35) **تبرير:** عيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ ، ومنحنى الدالة $y = \sin \frac{1}{2} \theta$. الحقيقية، للدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ سعة

تساوي $\frac{1}{2}$ ، وطول الدورة 360° .

سعة منحنى الدالة: $y = \sin \frac{1}{2} \theta$

تساوي 1 وطول الدورة 720° .

(36) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة مثلثية سعتها 3، وطول دورتها 180° . ثم مثلها بيانيًا. انظر الهامش.

(37) **اكتب:** وضح كيف تُحسب سعة الدالة $y = -2 \sin \theta$. ووضح كيف يؤثر المعامل السالب في التمثيل البياني للدالة.

أوجد القيمة المطلقة للعدد -2 والتي تساوي 2. المعامل السالب يحدث انعكاسًا للتمثيل البياني للدالة حول المحور x .

تنوع التعليم

ضمن هون

توسّع: اطلب إلى الطلبة تمثيل الدوال $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ ، $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ ، $y = \sin(\theta - \pi)$ بيانيًا، ثم
توضيح تأثير طرح مقدار من الزاوية θ على التمثيل البياني للدالة. المقدار الذي يطرح من θ يحدّد مقدار إزاحة
التمثيل البياني للدالة $y = \sin \theta$ إلى اليمين.

تدريب على اختبار

(38) إجابة قصيرة: أوجد الحد رقم 100001 في المتتابعة: 700013

13, 20, 27, 34, 41, ...

(39) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟ B

75% D 66% C 34% B 25% A

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 8-3)

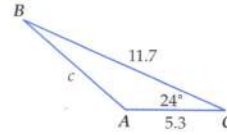
(42) $-3\sqrt{3} \quad 4 \sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6}$

(41) $\frac{3\sqrt{6}}{4} \quad 3(\sin 45^\circ)(\sin 60^\circ)$

(40) $-1 \quad \cos 120^\circ - \sin 30^\circ$

(43) حلّ المثلث المجاور، مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، والزائتين إلى أقرب درجة. (الدرس 8-5)

$B \approx 17^\circ, A \approx 139^\circ, c \approx 7.2$



(44) مثل الدالة $y = x^2 + 1$ بيانياً. (مهارة سابقة) انظر الهامش



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 8

دون دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (37)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-7 تدريبات إعادة التعليم
تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

تمثيليات الدوال المثلثية الأخرى، ترتبط بتمثيليات الدوال المثلثية: القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام بتمثيليات الدوال المثلثية: جيب التمام، وجيب، والظل.

دالة الأم	$y = \csc \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \cot \theta$
المجال	$\{\theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \neq 90 + 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$
المقياس	$ y \geq 1$	$ y \geq 1$	$ y \leq 1$
الفترة	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
طول الدورة	360°	360°	180°

أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2} \csc \theta$ ، ثم مثلها بيانياً.

لما كان θ مغلوب $\csc \theta$ مغلوب $\sin \theta$ فإن للدالتين طول الدورة نفسه، ونحطظ التقارب الرأسية تحصل عند: $\theta = 360^\circ$, $\theta = 180^\circ$, $\theta = 0^\circ$.

ارسم منحني الدالة $y = \frac{1}{2} \csc \theta$ ، ثم استعمله لرسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \cot \theta$.

تعريفين:
أوجد طول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين، ثم مثلها بيانياً.

(1) $y = \csc 2\theta$ 90°

(2) $y = \sec 3\theta$ 120°

الفصل: 8، حساب المثلثات: 37

تدريبات إعادة التعليم (36)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-7 تدريبات إعادة التعليم
تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

دوال الجيب، جيب التمام، والظل، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانياً في المستوى الإحداثي. أمّ الدوال الدورية فيها أيّام متكررة أو دورات، والطرق الأقوى لكل دورة يسمى طول الدورة، وسعة منحني كل من دالة الجيب ودالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل دالة منها. وتوجد خطوط تقارب لمنحنى دالة الظل.

دالة الأم	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	$y = \tan \theta$
المجال	$\{y -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y -1 \leq y \leq 1\}$	جميع الأعداد الحقيقية
المقياس	غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة
طول الدورة	360°	360°	180°

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة بيانياً:

(a) $y = 4 \cos \frac{\theta}{2}$ السعة: $|a| = 4$ ، إذن السعة = 4، طول الدورة: $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

(b) $y = -\frac{1}{2} \tan 2\theta$ ليس هذه الدالة سعة (السعة غير معرفة)، وطول الدورة: 90°

تعريفين:
أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين، ثم مثلها بيانياً:

(1) $y = -3 \sin \theta$ $3; 360^\circ$

(2) $y = 2 \tan \frac{\theta}{2}$ لا توجد سعة، 360°

الفصل: 8، حساب المثلثات: 36

تدريبات حل المسألة (39)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-7 تدريبات حل المسألة
تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

(1) هزيبها، بين الحدوث الآتي الدوال التي تعطي أيّام موجبات أو أن الصعود المختلفة الصادرة من مصدر عددي معين، حيث لا ارتفاع الموجة بالتانومتر، و t الطول من بداية الموجة بالتانومتر.

الدالة	اللون
$y = 300 \sin \left(\frac{\pi}{350} t \right)$	أحمر
$y = 125 \sin \left(\frac{\pi}{305} t \right)$	برتقالي
$y = 460 \sin \left(\frac{\pi}{290} t \right)$	أصفر
$y = 200 \sin \left(\frac{\pi}{260} t \right)$	أخضر
$y = 40 \sin \left(\frac{\pi}{235} t \right)$	أزرق
$y = 80 \sin \left(\frac{\pi}{210} t \right)$	بنفسجي

(a) ما سعة وطول دورة الدالة التي تعطي موجبات اللون الأخضر؟
200 نانومتر، 520 نانومتر.

(b) تتناسب شدة موجة الضوء طردياً مع سعة الموجة، فأني الألوان له أكثر شدة موجة؟
الأصفر.

(c) يعتمد لون الضوء على طول دورة الموجة، فأني الألوان له أكثر طول دورة؟ وأياً له أكثر طول دورة؟
الأحمر والبنفسجي.

(2) سباحة، يمكن تمثيل موقع فراع سباح خلال السباحة بالنسبة لسطح الماء بالشكل أدناه، حيث t طول ارتفاع الدراع من سطح الماء بالمساعات و t الزمن بالتوالي من بدء السباحة. فما الدالة التي تمثل هذا الوضع؟
 $y = 8 \sin \left(\frac{4\pi}{5} t \right)$

(3) بيضاء، يمكن تمثيل كثافة أوراق الشجر في إحدى الغابات بالدالة $y = 15 \sin \left(\frac{\pi}{6} (t-3) \right) + 20$ ، حيث t عدد أوراق الشجر في القدم الرمية الواحدة و t عدد الأشهر بعد شهر يناير.

(a) أوجد طول دورة هذه الدالة؟ وما الذي تمثله هذه الدورة؟
طول دورة الدالة 12، وشكل الدورة عماداً كعلاً.

(b) ما أثير قيمة لكثافة الأوراق في هذه الغابة؟ وفي أي شهر يكون ذلك؟
35 ورقة لكل قدم رمية، يونيو.

الفصل: 8، حساب المثلثات: 39

تدريبات المهارات (38)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-7 تدريبات المهارات
تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة بيانياً:

(1) $y = 2 \cos \theta$ $2; 360^\circ$

(2) $y = 4 \sin \theta$ $4; 360^\circ$

(3) $y = 2 \sec \theta$ لا توجد سعة، 360°

(4) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$ لا توجد سعة، 180°

(5) $y = \sin 3\theta$ $1; 120^\circ$

(6) $y = \csc 3\theta$ لا توجد سعة، 120°

(7) $y = \tan 2\theta$ لا توجد سعة، 90°

(8) $y = \cos 2\theta$ $1; 180^\circ$

(9) $y = 4 \sin \frac{\theta}{2}$ $4; 720^\circ$

الفصل: 8، حساب المثلثات: 38

الدوال المثلثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions

المبادئ؟

لقد تعلمت كيف تستعمل الدوال المثلثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادة. مثال: يتكى رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in ويصل ارتفاعه إلى 75 in. ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالة الظل.

$$\tan \theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلها 0.2 مستعمل الآلة الحاسبة.

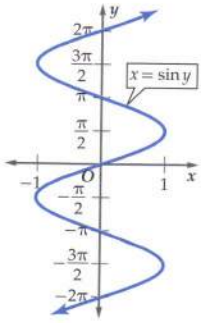
$$\tan^{-1} 0.2 \text{ enter } 11.30993247$$

إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .



75 in.

15 in.



معكوس الدالة المثلثية إذا علمت قيمة الدالة المثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x, y . فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

لاحظ أن معكوس الدالة ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x . لكن إذا تم تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، فإن المعكوس يكون دالة عكسية.

تسمى القيم في هذا المجال المحدد **القيم الأساسية**. فالدوال المثلثية ذات المجال المحدد تمثل بأحرف كبيرة، هكذا:

$$y = \sin x \text{ إذا فقط إذا كان } y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos x \text{ إذا فقط إذا كان } y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \tan x \text{ إذا فقط إذا كان } y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

يمكن استعمال الدوال ذات المجالات المحددة لتعريف دوال عكسية: لكل من دالة الجيب، ودالة جيب التمام ودالة الظل وهي **دالة الجيب العكسية**، و**دالة جيب التمام العكسية**، و**دالة الظل العكسية** كما يأتي:

فيما سبق؟

درست تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.

والآن؟

- أجد قيم الدوال المثلثية العكسية.
- أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.

المفردات؟

القيم الأساسية
principal values

دالة الجيب العكسية
Arcsine function

دالة جيب التمام العكسية
Arccosine function

دالة الظل العكسية
Arctangent function

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-8

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.

الدرس 8-8

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.

حل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.

ما بعد الدرس 8-8

تعريف الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانياً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟"، واسأل:

كيف يمكن إيجاد طول رف الكتب المائل؟ ثم أوجده.

استعمل نظرية فيثاغورس؟

$$s^2 = 15^2 + 75^2 = 5850; s \approx 76.485 \text{ in}$$

ما النسبة التي تمثل $\sin \theta$ ؟ $\frac{15}{76.485}$

ما النسبة التي تمثل $\cos \theta$ ؟ $\frac{75}{76.485}$

استعمل القيم التي حصلت عليها لكل من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ لإيجاد قيمة θ . هل

حصلت على القيمة نفسها؟

نعم؛ القيمة نفسها للزاوية θ ، 11.31° ،

باستعمال كل من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$.

مصادر الدرس 8-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (208)	• تنوع التعليم، ص (208)	• تنوع التعليم، ص (210)
كتاب التمارين	• ص (28)	• ص (28)	• ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

إرشادات للدراسة

وضع الآلة الحاسبة

تأكد من إعدادات الحاسبة البيانية لقياس الزوايا بالدرجات بالضغط على المفاتيح Mode Settings 2:Settings 1-General وتأكد من أن الزاوية مثبتة على القياس بالدرجة (Degree).

مثال 2

إيجاد قيمة مثلثية

أوجد قيمة $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right)$ مقرباً إلى أقرب جزء من مئة. استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: tan cos^{-1} 1 2 enter 1.732050808

إذن $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 1.73$.

تحقق: $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$, $\tan 60^\circ \approx 1.73$

إذن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة:

$$-0.71 \cos \left(\arccos - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (2B) \quad 0.35 \sin \left(\tan^{-1} \frac{3}{8} \right) \quad (2A)$$

المعادلة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية بزوايا مجهولة القيم. وحل المعادلة المثلثية يعني إيجاد قيم الزوايا المجهولة والتي دوالها المثلثية تجعل المعادلة المثلثية صحيحة.

حل المعادلات باستعمال الدوال العكسية يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية؛ لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 3 على اختبار

إذا كان $\sin \theta = -0.35$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي:

- 20.5° D 0.6° C -0.6° B -20.5° A

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35 . ويمكن كتابة هذا على الصورة: $\theta = \arcsin(-0.35)$.

حل فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: sin^{-1} $(-)$ 0.35 enter -20.48731511

إذن $\theta \approx -20.5^\circ$. الإجابة الصحيحة هي A.

تحقق من فهمك

(3) إذا كان $\tan \theta = 1.8$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي: C

0.03° A

29.1° B

60.9° C

D لا يوجد حل

حل المعادلات باستعمال الدوال العكسية

المثال 3 يبين كيفية حل معادلة باستعمال دالة مثلثية عكسية.

المثال 4 يبين كيفية استعمال دالة مثلثية عكسية لحل مسألة من واقع الحياة.

مثالان إضافيان

مثال على اختبار:

إذا كان $\cos \theta = -0.86$ ،

فأوجد θ D

59.3° C -149.3° A

149.3° D -59.3° B

لعبة الترحلق، افترض في

المثال 4 أن ارتفاع اللعبة 5.5 أقدام، وطولها 12 قدماً. واكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس θ . ثم أوجد قياس θ . قَرِّب إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\sin \theta = \frac{5.5}{12}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{5.5}{12} \approx 27.3^\circ$$

إرشادات للاختبار

حذف البدائل

إشارة $\sin \theta$ تُحَدَد

قياس الزاوية في الربع

الأول أو الربع الرابع،

وبما أن قيمة

سالبة، فابحث عن زاوية

في الربع الرابع.

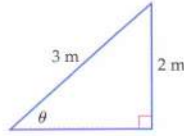
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة $\arcsin 2$. إذا استعمل الطلبة الآلة الحاسبة، فاقترح عليهم دراسة التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$ لتوضيح سبب حصولهم على رسالة تبيّن أن هناك خطأ قد وقع. لا يوجد للدالة $y = \sin x$ قيم للمتغير y أكبر من 1 أو أقل من -1.

يمكنك استعمال الدوال المثلثية العكسية؛ لإيجاد قياسات زوايا مجهولة في مثلث قائم الزاوية بمعرفة طولي ضلعين فيه.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الدوال المثلثية العكسية



لعبة التزلج، لعبة تزلج للأطفال، ارتفاعها 2 m، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قيمة الزاوية θ التي تصنعها لعبة التزلج مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالة الجيب.

$$\text{دالة الجيب} \quad \sin \theta = \frac{2}{3}$$

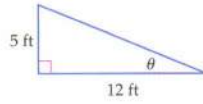
$$\text{دالة معكوس الجيب} \quad \theta = \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

$$\text{استعمل الآلة الحاسبة} \quad \theta \approx 41.8^\circ$$

إذن قياس الزاوية يساوي 41.8° تقريباً.

تحقق باستعمال الآلة الحاسبة، $\frac{2}{3} \approx 0.66653 \approx \sin 41.8$. أي أن الإجابة صحيحة.

تحقق من فهمك



4 تزلج يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة. $\theta = \tan^{-1} \frac{5}{12}; 22.6^\circ$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلبة.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

وضع الآلة الحاسبة: ذكّر الطلبة بوضع آلاتهم الحاسبة على الحالة المناسبة (درجات أو راديان) بناءً على الإجابة المطلوبة بالضغط على المفاتيح:

5 Settings 2.Settings

1:General

واختيار القياس المطلوب بالدرجات أو بالراديان.

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان.

$$(1) \quad 30^\circ; \frac{\pi}{6} \quad \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad -60^\circ; -\frac{\pi}{3} \quad \text{Arctan}(-\sqrt{3})$$

$$(3) \quad 180^\circ; \pi \quad \text{Arccos}(-1)$$

مثال 2 أوجد قيمة كل مما يأتي، مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

$$(4) \quad 0.6 \cos \left(\text{Arcsin} \frac{4}{5} \right)$$

$$(5) \quad 0 \tan (\text{Cos}^{-1} 1)$$

$$(6) \quad 0.87 \sin \left(\text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

مثال 3 **7 اختيار من متعدد**، إذا كان $\sin \theta = 0.422$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي: **A**

65° D

48° C

42° B

25° A

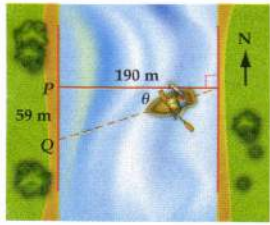
209 الدرس 8-8 الدوال المثلثية العكسية

تنوع الواجبات المنزلية

الأئلة	المستوى
42-47 ، 12-30	دون المتوسط دون
42-47 ، 37 ، 30 ، 13-39 فردي	ضمن المتوسط ضمن
31-47	فوق المتوسط فوق

حلّ كلاً من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

64.5° Tan $\theta = 2.1$ (10) -27.4° Sin $\theta = -0.46$ (9) 25.8° Cos $\theta = 0.9$ (8)



11 مثال 4 قوارب: يسير قارب في اتجاه الغرب؛ ليقطع نهراً عرضه 190 m، فيصل إلى النقطة Q التي تبعد مسافة 59 m عن وجهته الأصلية P؛ بسبب التيار. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية θ التي أزعج التيار القارب بها عن اتجاهه الأصلي، ثم أوجد قياس هذه الزاوية إلى أقرب جزء من عشرة.

$\theta = \text{Arctan } \frac{59}{190}$; 17.3° (11)

تدريب وحل المسائل

1 مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات، وبالراديان .

30°; $\frac{\pi}{6}$ Arccos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (13)

60°; $\frac{\pi}{3}$ Arcsin $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (12)

60°; $\frac{\pi}{3}$ Tan⁻¹ $\sqrt{3}$ (15)

-90°; $-\frac{\pi}{2}$ Sin⁻¹ (-1) (14)

-30°; $-\frac{\pi}{6}$ Arctan $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (17)

150°; $\frac{5\pi}{6}$ Cos⁻¹ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (16)

2 مثال 2 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة .

-0.58 tan [Arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right)$] (19)

0 tan (Cos⁻¹ 1) (18)

0.87 sin (Arctan $\sqrt{3}$) (21)

0.86 cos $\left(\text{Tan}^{-1} \frac{3}{5}\right)$ (20)

0.71 sin [Cos⁻¹ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$] (23)

0.90 cos $\left(\text{Sin}^{-1} \frac{4}{9}\right)$ (22)

3 مثال 3 حلّ كلاً من المعادلات الآتية مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك .

64.2° Sin $\theta = 0.9$ (25)

75.3° Tan $\theta = 3.8$ (24)

104.5° Cos $\theta = -0.25$ (27)

لا يوجد حل Sin $\theta = -2.5$ (26)

-11.3° Tan $\theta = -0.2$ (29)

55.9° Cos $\theta = 0.56$ (28)

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في سؤال 38 يجب أن يعرف الطلبة أن الطالبين لم يجيبا إجابة صحيحة؛ لأن هذا السؤال خادع. وضح للطلبة أن الدالة $\cos \theta$ يجب أن تكون قيمتها سالبة لكل $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة كتابة مجال ومدى كل من الدوال Arcsin، Arccos، و Arctan. وتسليم أوراقهم قبل مغادرتهم غرفة الفصل.

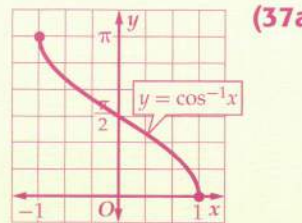
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسي 8-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلبة في السؤال 37، التمثيل البياني، والرموز والحساب العددي للدالة لاستكشاف دالة معكوس جيب التمام.

إجابات:



المجال: $-1 \leq x \leq 1$
المدى: $0 \leq y \leq \pi$

37c) إجابة ممكنة: مجال الدالة $y = \cos x$ هو كل الأعداد الحقيقية ومداهما يتراوح من -1 إلى 1. أما مجال الدالة $y = \cos^{-1} x$ فيقع بين -1، 1 ومداهما من 0 إلى 180°.

40) إجابة ممكنة: مدى كل من الدالتين $y = \cos x$, $y = \sin x$ هو $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ بينما مدى الدالة: $y = \tan^{-1} x$ هو: مجموعة الأعداد الحقيقية.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة إكمال الجدول الآتي باستعمال الدالة $y = \text{Sin}^{-1} x + \text{Cos}^{-1} x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
y	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

ثم اطلب إليهم وضع تخمين حول الدالة $y = \text{Sin}^{-1} x + \text{Cos}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$. لجميع قيم x.



النخلة من الأشجار المعمرة التي يصل عمرها إلى 150 عاماً. ويُستدل على عمرها من بقايا فروع الأوراق التي تظهر على هيئة درجات، وكل 3 منها فوق بعضها على خط واحد تمثل عاماً من عمر النخلة.

(38) إجابة ممكنة: كلاهما

أخفاً، حيث إن جيب التمام

ليس موجباً في الربع الثاني.

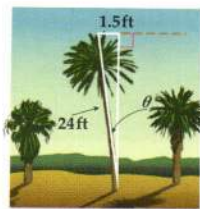
(39) مجال الدالة

$y = \sin^{-1} x$ هو

$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

وساوي مدى الدالة

$y = \sin x$



(30) نخيل: شجرة نخيل طولها 24 ft، تميل عن الاتجاه الرأسي بمقدار 1.5 ft كما في الشكل، اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تميل بها الشجرة ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\text{Arcsin } \frac{1.5}{24}; 3.6^\circ$$

حلّ كلاً من المعادلات الآتية حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$0, 2\pi \sec \theta = 1 \quad (33) \quad \pi \sec \theta = -1 \quad (32) \quad \frac{\pi}{2} \csc \theta = 1 \quad (31)$$

$$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \sec \theta = 2 \quad (36) \quad \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \cot \theta = 1 \quad (35) \quad \text{لا يوجد حل} \quad \csc \theta = \frac{1}{2} \quad (34)$$

(37) تمثيلات متعددة: معترفاً $x = \cos^{-1} y$. انظر الهامش.

(a) بيانياً: مثل الدالة بيانياً. وأوجد المجال والمدى.

إجابة ممكنة: $x = -0.2; y = 101.5^\circ$

(b) عددياً: اختر قيمة للمتغير x بين $-1, 0$. ثم أوجد قيمة الدالة عندها إلى أقرب جزء من عشرة.

(c) تحليلياً: قارن بين التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ ، والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$. انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا

(38) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحل المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90 < \theta < 180$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

عبدالرحمن

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 162.5^\circ$$

خليل

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 72.5^\circ$$

(39) تبرير: وضح كيف يرتبط مجال الدالة $y = \sin^{-1} x$ مع مدى الدالة $y = \sin x$.

(40) فسر لماذا كل من $\sin^{-1} 8, \cos^{-1} 8$ غير معرفة، بينما $\tan^{-1} 8$ معرفة. انظر الهامش

تدريب على اختبار

(42) إذا كان $g(x) = 4 - 2x$ ، $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد $g[f(x)]$ ؟

B

$$g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2 \quad \text{A}$$

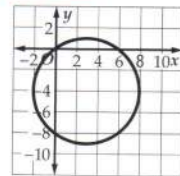
$$g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2 \quad \text{B}$$

$$g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2 \quad \text{C}$$

$$g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2 \quad \text{D}$$

(41) إجابة قصيرة: أوجد معادلة الدائرة الممثلة في الشكل الآتي:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$



مراجعة تراكمية

(43) أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 2\theta$ ، ثم مثل هذه الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \sec \frac{7\pi}{6} \quad (47)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 300^\circ \quad (46)$$

$$-\sqrt{3} \tan 120^\circ \quad (45)$$

$$-1 \cos 3\pi \quad (44)$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 8

دون فوق المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

دون دون المتوسط

دون

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (42)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم
الدوال المثلثية العكسية

حلّ المعادلات باستعمال الدوال العكسية، يمكنك إعادة كتابة المعادلات المثلثية لإيجاد قياس زاوية ما.

حلّ المعادلة $\sin \theta = 0.25$ بمزجًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

جيب زاوية زاوية $\theta = 0.25$ ، ويمكن إعادة كتابة هذا على النحو الآتي: $\theta = \arcsin(0.25)$.
استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد الحل.

استعمل المفاتيح: \sin^{-1} \cos^{-1} \tan^{-1} 0.25 $=$ 14.47751219
لذا فإن $\theta = 14.5^\circ$.

تعاين

حلّ كلًا من المعادلات الآتية، طرفًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$\tan \theta = 4.5$ (1)	$\sin \theta = 0.8$ (1)
77.5°	53.1°
$\cos \theta = -0.95$ (4)	$\cos \theta = 0.5$ (3)
161.8°	60.0°
$\tan \theta = -1$ (6)	$\sin \theta = -0.1$ (5)
-45.0°	-5.7°
$\cos \theta = -0.2$ (8)	$\cos \theta = 0.52$ (7)
101.5°	58.7°
$\tan \theta = 8$ (10)	$\sin \theta = 0.35$ (9)
82.9°	20.5°

المصدر: التلمي التوازي

دون

تدريبات إعادة التعليم (41)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم
الدوال المثلثية العكسية

معموس إعادة التعليم: إذا نُصِّت قيمة دالة مثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. وإذا حددت مجال الدالة، بحيث يكون المعكوس دالة فإن القيم ضمن هذا المجال المحدد تسمى القيم الأساسية.

القيم الأساسية:
الجيب: $y = \sin x$ إذا وفقط إذا $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
الCos: $y = \cos x$ إذا وفقط إذا $0 \leq x \leq \pi$
والTan: $y = \tan x$ إذا وفقط إذا $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

معموس:
الجيب: $y = \sin x$ إذا كان x معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $x = \arcsin y$ أو $y = \sin x$
الCos: $y = \cos x$ إذا كان x معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $x = \arccos y$ أو $y = \cos x$
والTan: $y = \tan x$ إذا كان x معكوس دالة الجيب يعرف على النحو الآتي: $x = \arctan y$ أو $y = \tan x$

أوجد قيمة $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ واكتب لياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ التي جيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتقع في الفترة $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ باستعمال دائرة الوحدة.

القطعة التي تقع على دائرة الوحدة وإحداثياتها الصادي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{\pi}{3}$ أو 60° .
لذا فإن $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

أوجد قيمة $\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$ من متة.

لتكن $\theta = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ فإن $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، الجيب $\frac{1}{2}$ هو $\frac{\pi}{6}$ تحقق الشرطين معًا.
لذا $\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

تعاين

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات، وبالراديان:

$\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$ (3)	$\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (2)	$\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (1)
$120^\circ, \frac{2\pi}{3}$	$-60^\circ, -\frac{\pi}{3}$	$30^\circ, \frac{\pi}{6}$
$\tan^{-1}(-1)$ (6)	$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (5)	$\arctan \sqrt{3}$ (4)
$-45^\circ, -\frac{\pi}{4}$	$135^\circ, \frac{3\pi}{4}$	$60^\circ, \frac{\pi}{3}$

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من متة:

$\sin \left(\tan^{-1} \frac{5}{12} \right)$ (9)	$\tan \left[\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right]$ (8)	$\cos \left[\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$ (7)
0.38	-1.02	0.71
$\sin(\cos^{-1} 0.3)$ (12)	$\cos(\arctan 5)$ (11)	$\cos[\arcsin(-0.7)]$ (10)
0.95	0.20	0.71

المصدر: التلمي التوازي

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (44)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات حل المسألة
الدوال المثلثية العكسية

1. أبواب، حرج مطبخ أحد المطاعم له زوج من الأبواب الخارجية التي تتفتح في منتصف المرح، وكل باب منها عرضه 3.11. ويريد حامل مطعم أن يقفل حجرة أطباق عرضها قدمان من المطبخ إلى حجرة الطعام.

2. مساحة الأراضي، من المعروف منذ القدم أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 3، 4، 5 وحدات هو مثلث قائم الزاوية، لذا استعمل ماسح الأراضي حديثًا لقياس عدد كل وحدة طول للضلع أن يكون المثلث قائم الزاوية. ويستعمل مثل هذا الحقل التكوين مثلث على الأرض على أن يكون في إحدى ساقيه ثلاث عقد، وفي الساق الثانية أربع عقد، وهذا يضمن أن المثلث المتكون مثلث قائم الزاوية.

3. سفور، يقود عبد الله دراجته إلى بيت صديقه خالد. ويستطيع أن يقود على الشوارع التي تتجه شمال - جنوب أو شرق - غرب فقط.

4. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

5. بعد ذلك، قاد عبد الله دراجته 3 km غربًا و 1 km شمالًا ليصل إلى المغارة. فما الاتجاه الذي سيقتطعه عبد الله لو تمكن أن يقود دراجته في مسار مستقيم مباشرة من بيت خالد إلى المغارة؟

6. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

7. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

8. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

9. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

10. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

11. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

12. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

13. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

14. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

15. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

16. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

17. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

18. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

19. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

20. فاد عبد الله 2 km شرقًا و 4 km جنوبًا إلى بيت خالد. فإذا استطاع عبد الله أن يقود مباشرة بخط مستقيم من بيته إلى بيت خالد، فأي اتجاه سيقتطع دراجته؟

المصدر: التلمي التوازي

دون ضمن فوق

تدريبات المهارات (43)

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-8 تدريبات المهارات
الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (2)	$\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)
$150^\circ, \frac{5\pi}{6}$	$45^\circ, \frac{\pi}{4}$
$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ (4)	$\tan^{-1} \sqrt{3}$ (3)
$-30^\circ, -\frac{\pi}{6}$	$60^\circ, \frac{\pi}{3}$
$\arcsin 1$ (6)	$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ (5)
$90^\circ, \frac{\pi}{2}$	$135^\circ, \frac{3\pi}{4}$

أوجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من متة:

$\sin \left(\sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$ (8)	$\sin(\cos^{-1} 1)$ (7)
0.5	0
$\cos(\tan^{-1} 3)$ (10)	$\tan \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (9)
0.32	1.73
$\sin \left[\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$ (12)	$\sin(\arctan(-1))$ (11)
0.71	-0.71

حلّ كلًا من المعادلات الآتية، طرفًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$\sin \theta = -0.57$ (14)	$\cos \theta = 0.25$ (13)
-34.8°	75.5°
$\cos \theta = 0.11$ (16)	$\tan \theta = 5$ (15)
83.7°	78.7°
$\tan \theta = -11.35$ (18)	$\sin \theta = 0.9$ (17)
-85°	64.2°
$\tan \theta = -0.01$	$\sin \theta = 1$
-0.6°	90°
$\tan \theta = -16.6$	$\cos \theta = -0.36$
-86.6°	111.1°

المصدر: التلمي التوازي

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 1-6، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلبة الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلبة من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال المثلثية في المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 1-8)

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}, \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}, \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}, \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}, \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

الزوايا وقياسها والدوال المثلثية للزوايا (الدرسان 2-8، 3-8)

- يُحدّد قياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي بمقدار الدوران واتجاهه من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء.

- يمكنك إيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ ، بمعلومية إحداثيي النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء للزاوية.

قانون الجيوب وقانون جيب التمام (الدرسان 4-8، 5-8)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

الدوال الدائرية والدوال المثلثية العكسية (الدرسان 6-8، 7-8)

- إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$ ، فإن $\cos \theta = x$ ، $\sin \theta = y$

$$y = \sin x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ كان } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ كان } 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \tan x \text{ إذا فقط إذا كان } x \text{ كان } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً (الدرس 7-8)

- للدوال المثلثية التي على إحدى الصورتين

$$y = a \sin b\theta, y = a \cos b\theta$$

$$\text{دورة يساوي } \frac{2\pi}{|b|} \text{ أو } \frac{360^\circ}{|b|}$$

- أما الدالة المثلثية $y = a \tan b\theta$ فطول دورتها يساوي

$$\frac{\pi}{|b|} \text{ أو } \frac{180^\circ}{|b|}$$

المطويات

منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

حساب المثلثات ص 157	الزاوية المركزية ص 168
النسبة المثلثية ص 157	طول القوس ص 168
الدالة المثلثية ص 157	الزاوية الربعية ص 172
الجيب ص 157	الزاوية المرجعية ص 172
جيب التمام ص 157	قانون الجيوب ص 178
الظل ص 157	حل المثلث ص 178
قاطع التمام ص 157	قانون جيوب التمام ص 186
القاطع ص 157	دائرة الوحدة ص 192
ظل التمام ص 157	الدالة الدائرية ص 192
دوال المقلوب ص 158	الدالة الدورية ص 193
معكوس الجيب ص 160	الدورة ص 193
معكوس جيب التمام ص 160	طول الدورة ص 193
معكوس الظل ص 160	السعة ص 199
زاوية الارتفاع ص 161	التردد ص 200
زاوية الانخفاض ص 161	القيم الأساسية ص 206
الوضع القياسي ص 165	دالة معكوس الجيب ص 206
ضلع الابتداء ص 165	دالة معكوس جيب التمام ص 206
ضلع الانتهاء ص 165	دالة معكوس الظل ص 206
الراديان ص 167	

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

(1) **قانون الجيوب** يُستعمل لحل مثلث بمعلومية قياسيّ زاويتين وطول ضلع فيه.

(2) الدوال $\cot \theta$ ، $\csc \theta$ ، $\sec \theta$ تسمى **دوال المقلوب**.

(3) تسمى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة**.

(4) إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y فإن هذه الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.

(5) **زاوية الارتفاع** هي الزاوية المحصورة بين خط النظر والخط الأفقي عندما ينظر الشخص إلى أعلى.

(6) **سعة** منحنى دالة الجيب أو منحنى دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.

منظم أفكار

المطويات

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلبة أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

معالجة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلبة بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

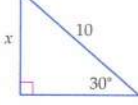
نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص (65)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية ص 164-157

مثال 1

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x .



دالة الجيب $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

بالتعويض $\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$

بضرب الطرفين في 10 $\frac{10}{2} = x$

بالتبسيط $5 = x$

مثال 2

أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة.



$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\tan x^\circ = \frac{15}{21}$

معكوس الظل $\tan^{-1} \frac{15}{21} = x$

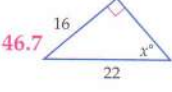
باستعمال الآلة الحاسبة $35.5 \approx x$

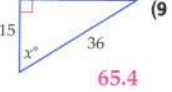
استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(8)  13.6

(7)  18.5

أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(10)  46.7

(9)  65.4

(11) **شاحنة**: ترتفع مؤخرة شاحنة بمقدار 3ft عن سطح الأرض. ما طول سطح مائل يمكن وضعه على مؤخرة الشاحنة، بحيث تكون زاوية ارتفاعه عن سطح الأرض 20° ؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **8.8ft تقريباً**

8-2 الزوايا وقياساتها ص 170-165

مثال 3

حول القياس 160° إلى قياس بالراديان.

$$160^\circ = 160^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right)$$

$$\frac{160\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{9}$$

مثال 4

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب، مشتركين في ضلع الانتهاء مع الزاوية 150° .

زاوية بقياس موجب:

$$150^\circ + 360^\circ = 510^\circ$$

زاوية بقياس سالب:

$$150^\circ - 360^\circ = -210^\circ$$

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

(12) $215^\circ = \frac{43\pi}{36}$ (13) $450^\circ = \frac{5\pi}{2}$

(14) $-3\pi = -540^\circ$ (15) $-315^\circ = -\frac{7\pi}{4}$

في كلٍّ ممّا يأتي، أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية من الزوايا المعطاة:

(16) 265° (17) -65° (18) $\frac{7\pi}{2}$

(19) $625^\circ, -95^\circ$ (20) $295^\circ, -425^\circ$ (21) $-\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$



(19) **دراجة هوائية**: إطار دراجة هوائية يدور 8 دورات في الدقيقة. إذا كان طول نصف قطر الإطار 15 in. فأوجد قياس الزاوية θ التي يدورها الإطار في ثانية واحدة بالراديان. $\frac{4\pi}{15}$

8-3 الدوال المثلثية للزوايا ص 176-171

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \tan 150^\circ \quad (21) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 135^\circ \quad (20)$$

$$0 \cos \frac{3\pi}{2} \quad (23) \quad 0 \sin 2\pi \quad (22)$$

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بنقطة من النقاط الآتية في كل مرة، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ . انظر الهامش (24-26)

$$(16, -12) \quad (26) \quad (5, 12) \quad (25) \quad (-4, 3) \quad (24)$$

(27) كرة، قذفت كرة من حافة سطح بناية بزاوية قياسها 70° ،

وبسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/sec . المعادلة التي تمثل

المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة هي: $x = v_0 (\cos \theta) t$ ،

حيث: v_0 هي السرعة الابتدائية، و θ هي قياس الزاوية

التي قذفت فيها الكرة، و t هو الزمن (بالثواني). ما

المسافة الأفقية التقريبية التي تقطعها الكرة بعد مرور

10 ثوانٍ. تقريباً 17.1 m

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 120^\circ$.

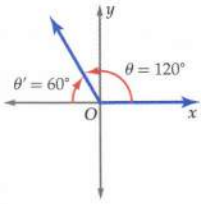
بما أن ضلع الانتهاء للزاوية 120°

يقع في الربع الثاني، فإن قياس الزاوية

المرجعية θ هو $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، إذن:

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



مثال 6

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(6, 5)$. فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .

$$r = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5\sqrt{61}}{61} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{61}}{6} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{6}{5}$$

مثال 7

حلّ $\triangle ABC$.

أولاً أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$60^\circ + 70^\circ + A = 180^\circ, A = 50^\circ$$

استعمل الآن قانون الجيوب لإيجاد

قيمتي a, c .

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

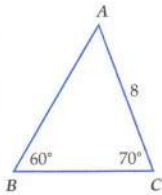
$$\frac{\sin 60^\circ}{8} = \frac{\sin 50^\circ}{a}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{8} = \frac{\sin 70^\circ}{c}$$

$$a = \frac{8 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 7.1$$

$$c = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8.7$$

إذن $A = 50^\circ, c \approx 8.7, a \approx 7.1$.



8-4 قانون الجيوب ص 183-177

حدّد إذا كان للمثلث في كلّ مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

$$C = 118^\circ, c = 10, a = 4 \quad (28) \quad \text{انظر الهامش}$$

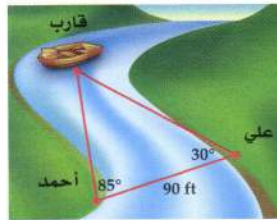
$$A = 25^\circ, a = 15, c = 18 \quad (29) \quad \text{انظر الهامش}$$

$$A = 70^\circ, a = 5, c = 16 \quad (30) \quad \text{لا يوجد حل}$$

(31) قوارب يقف علي وأحمد على جانبي نهر. كم يبعد علي

عن القارب؟ قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

98.9 ft



إجابات:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad (24)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}, \csc \theta = \frac{5}{3},$$

$$\sec \theta = -\frac{5}{4}, \cot \theta = -\frac{4}{3},$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{5}{13}, \quad (25)$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}, \csc \theta = \frac{13}{12},$$

$$\sec \theta = \frac{13}{5}, \cot \theta = \frac{5}{12},$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad (26)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3},$$

$$\sec \theta = \frac{5}{4}, \cot \theta = -\frac{4}{3},$$

(28) حل واحد؛

$$A \approx 21^\circ, B \approx 41^\circ, b \approx 7.4$$

(29) حلان؛ الحل الأول:

$$C = 30^\circ, B = 125^\circ, b = 29.1$$

$$\text{الحل الثاني: } C = 150^\circ, B = 5^\circ, b = 3.1$$

إجابات:

(32) قانون جيوب التمام؛

$$A \approx 46^\circ, B \approx 85^\circ, C \approx 49^\circ$$

(33) قانون الجيوب؛

$$B \approx 52^\circ, C \approx 48^\circ, c \approx 11.3$$

(34) قانون جيوب التمام؛

$$A \approx 40^\circ, B \approx 65^\circ, c \approx 7.5$$

(35) قانون الجيوب؛

$$B \approx 75^\circ, C \approx 63^\circ, c \approx 12.0$$

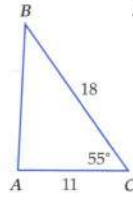
$$\text{أو } B \approx 105^\circ, C \approx 33^\circ, c \approx 7.3$$

(36) قانون جيوب التمام؛

$$a \approx 9.9, B \approx 28^\circ, C \approx 117^\circ$$

مثال 8

حلّ $\triangle ABC$ الذي فيه $C = 55^\circ, b = 11, a = 18$



معطى في السؤال طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. ابدأ برسم المثلث واستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قيمة c .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 18^2 + 11^2 - 2(18)(11) \cos 55^\circ$$

$$c^2 \approx 217.9$$

$$c \approx 14.8$$

ثم استعمل قانون جيوب التمام مرة أخرى لإيجاد قياس الزاوية B .

$$11^2 = 18^2 + 14.8^2 - 2(18)(14.8) \cos B$$

$$\frac{11^2 - 18^2 - 14.8^2}{-2(18)(14.8)} = \cos B$$

$$0.7921 \approx \cos B$$

$$38^\circ \approx B$$

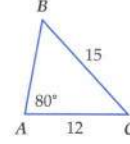
قياس الزاوية الثالثة A

$$m\angle A \approx 180^\circ - (55^\circ + 38^\circ) \approx 87^\circ$$

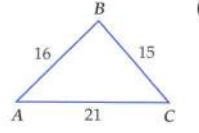
$$\text{إذن } A \approx 87^\circ, B \approx 38^\circ, c \approx 14.8$$

حدد الطريقة الأنسب للبدء في حل كلٍّ من المثلثات الآتية (قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام) ثم حل كل مثلث منها مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(32-36) انظر الهامش



(32) (33)



$$C = 75^\circ, a = 5, b = 7 \quad (34)$$

$$A = 42^\circ, a = 9, b = 13 \quad (35)$$

$$b = 8.2, c = 15.4, A = 35^\circ \quad (36)$$

(37) زراعة: يريد مزارع وضع سياج لقطعة أرض مثلثة الشكل. طولاً ضلعيها 120 ft، 325 ft، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 70° . فما طول السياج الذي يحتاجه؟ تقريباً 750.5 ft

مثال 9

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 510^\circ$.

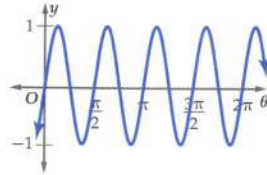
$$\sin 510^\circ = \sin (360^\circ + 150^\circ)$$

$$= \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 10

أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه:



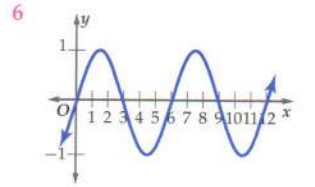
يبدأ النمط بالتكرار عند $\pi, \frac{\pi}{2}$ ، وهكذا... ولذلك طول الدورة هو $\frac{\pi}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$-\frac{\sqrt{6}}{4} (\cos 45^\circ)(\cos 210^\circ) \quad (39) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos (-210^\circ) \quad (38)$$

$$0 \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) \quad (41) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin -\frac{7\pi}{4} \quad (40)$$

(42) أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه:



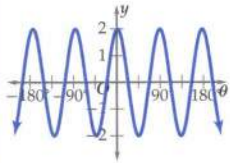
(43) طول قطر إطار دائري 18 in، ويدور 4 دورات في الدقيقة الواحدة. ما طول دورة الدالة التي تمثل ارتفاع نقطة تقع على الحافة الخارجية للإطار كدالة في الزمن؟ 15 ثانية

8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً ص 205-199

مثال 11

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 2 \cos 4\theta$ للذالة بيانياً. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.

السعة: $2 = |2| = |a|$. لذلك فالتمثيل البياني للدالة تكون له قيمة عظمتي هي 2 وقيمة صغرى هي -2.



وطول الدورة:

$$\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$$

أوجد السعة، (إن كانت معرّفة)، وطول الدورة للدوال الآتية، ثم مثل كلّ منها بيانياً:

(44-49) انظر الهامش

$$y = \cos \frac{1}{2} \theta \quad (45) \quad y = 4 \sin 2\theta \quad (44)$$

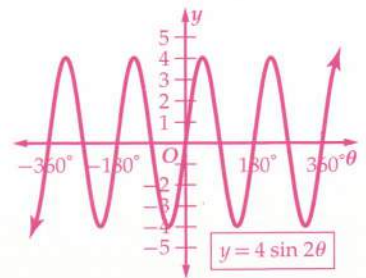
$$y = 3 \sec \theta \quad (47) \quad y = 3 \csc \theta \quad (46)$$

$$y = 2 \csc \frac{1}{2} \theta \quad (49) \quad y = \tan 2\theta \quad (48)$$

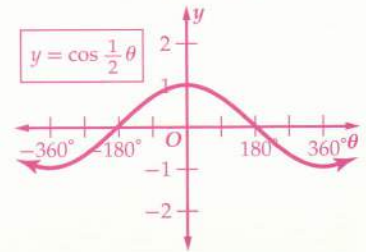
(50) قفز لاعب على جهاز الاهتزاز، فاهتز الجهاز بتردد قدره 10 هيرتز. إذا كانت السعة تساوي 5 ft، فاكتب دالة جيب تُمثل الارتفاع y في اهتزاز الجهاز كدالة في الزمن t .

$$y = 5 \sin 20 \pi t$$

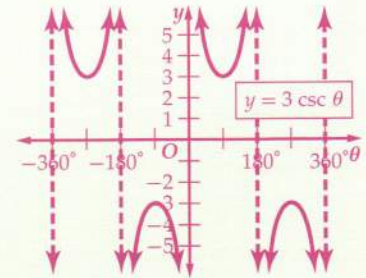
44) السعة: 4، طول الدورة: 180°



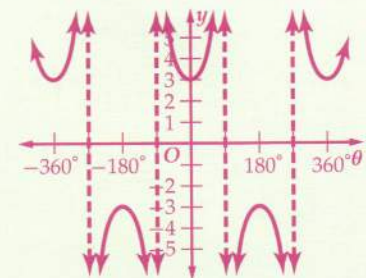
45) السعة: 1 طول الدورة: 720°



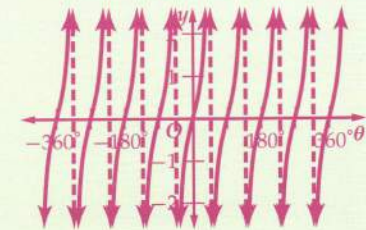
46) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 360°



47) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 360°



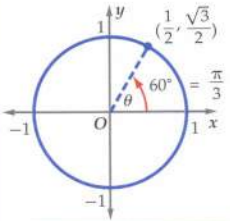
48) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 90°



مثال 12

أوجد قيمة $\cos^{-1} \frac{1}{2}$. واكتبه بالدرجات وبالراديان.

أوجد الزاوية θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، بحيث يكون جيب تمامها $\frac{1}{2}$. استعمل دائرة الوحدة.



أوجد نقطة على دائرة الوحدة، بحيث يكون الإحداثي x لها $\frac{1}{2}$ بما أن: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ عندما $\theta = 60^\circ$ ، إذن $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

مثال 13

أوجد قيمة $\sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$. مقرّباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة. استعمل الآلة الحاسبة.

$\sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 0.4472135955$

إذن $\sin \left(\tan^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 0.45$

مثال 14

إذا كان $\cos \theta = 0.72$ ، فأوجد θ .

استعمل الآلة الحاسبة.

$\cos^{-1} 0.72 \approx 43.9455195623$

إذن $\theta \approx 43.9^\circ$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

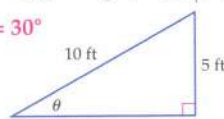
(51) $90^\circ, \frac{\pi}{2}$ $\sin^{-1}(1)$ (52) $0^\circ, 0$ $\arctan(0)$

(53) $60^\circ, \frac{\pi}{3}$ $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ (54) $45^\circ, \frac{\pi}{4}$ $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

(55) $45^\circ, \frac{\pi}{4}$ $\tan^{-1} 1$ (56) $90^\circ, \frac{\pi}{2}$ $\arccos 0$

(57) منحدرات: منحدر ارتفاعه 5 أقدام وطوله 10 أقدام كما يظهر في الشكل أدناه. اكتب دالة مثلثية عكسية، يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية θ التي يصنعها المنحدر مع الأرض الأفقية ثم أوجد قياس هذه الزاوية.

$\theta = \sin^{-1} \frac{5}{10} = 30^\circ$



أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي مقرّباً الإجابة إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

(58) $2.83 \tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{3} \right)$

(59) $0 \sin \left(\tan^{-1} 0 \right)$

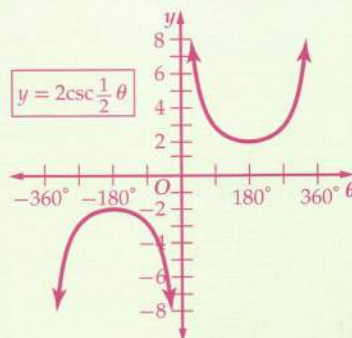
حلّ كلّاً من المعادلات الآتية مقرّباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

(60) $-55.0^\circ \tan \theta = -1.43$

(61) $53.1^\circ \sin \theta = 0.8$

(62) $65.8^\circ \cos \theta = 0.41$

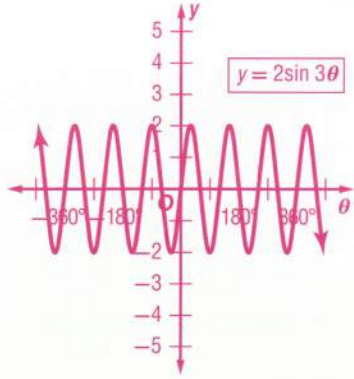
49) السعة: غير معرفة، طول الدورة: 720°



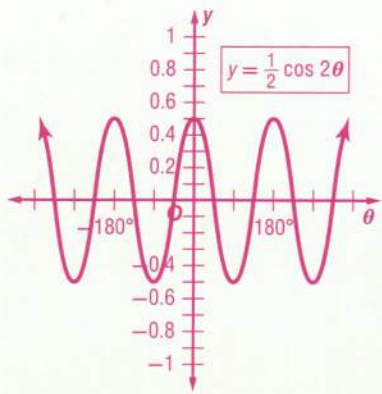
معالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمال مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلبة.

إجابة:

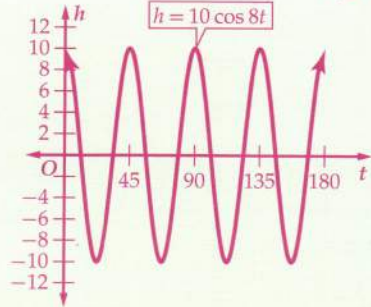
(17)



(18)



(21)



16 اختيار من متعدد: أي من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبين؟ **B**

- 65° A
310° B
120° C
265° D

أوجد السعة وطول الدورة لكل من الدالتين الآتيتين. ثم مثل الدالتين بيانيًا: (18, 19) لتمثيل البياني انظر الهامش

$$y = \frac{1}{2} \cos 2\theta \quad (18) \quad y = 2 \sin 3\theta \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}, 180^\circ \quad 2, 120^\circ$$

19 اختيار من متعدد: طول دورة الدالة $y = 3 \cot \theta$ يساوي: **B**

- 120° A
180° B
360° C
1080° D

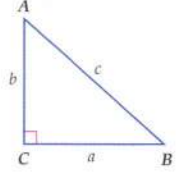
20 حدّد الطريقة الأنسب التي نبدأ بها لحل $\triangle XYZ$ (قانون الجيوب أو قانون جيب التمام)، الذي فيه: $X = 105^\circ$, $y = 15$, $z = 9$. ثم حلّ المثلث تقريبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.
قانون جيب التمام، $Z \approx 27^\circ$, $x \approx 19.4$, $Y \approx 48^\circ$

21 سواق: عجلة ساقية طول قطرها 20 ft، تكمل دورة كاملة في 45 ثانية. افترض أن ارتفاع أعلى العجلة يُمثل الارتفاع عند الزمن t . اكتب دالة مثلثية تُمثل ارتفاع النقطة h في الشكل أدناه كدالة في الزمن t . ثم مثل الدالة بيانيًا.
 $h = 10 \cos 8t$; لتمثيل البياني انظر الهامش



217 الفصل 8 اختبار الفصل

حلّ $\triangle ABC$ في كلٍّ مما يأتي باستعمال القياسات الواردة. قرب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:



- (1)** $B = 54^\circ$, $a = 5.3$, $b = 7.3$ $A = 36^\circ$, $c = 9$
(2) $B = 32^\circ$, $c = 14.2$, $b = 7.5$ $a = 12$, $A = 58^\circ$
(3) $b = 7.9$, $B = 41^\circ$, $A = 49^\circ$ $a = 9$, $c = 12$

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

- (5)** $175^\circ - \frac{35\pi}{36}$ **(6)** $325^\circ - \frac{65\pi}{36}$
(7) $150^\circ - \frac{5\pi}{6}$ **(8)** $405^\circ - \frac{9\pi}{4}$

(8) حدد إذا كان للمثلث ABC الذي فيه $A = 110^\circ$, $a = 16$, $b = 21$ حل واحد أم حلان أم ليس له حل. ثم أوجد الحلول (إن أمكن)، مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **ليس له حل**

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي (في السؤال 14، اكتب الزاوية بالدرجات):

- (9)** $0 \cos(-90^\circ)$ **(10)** $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 585^\circ$
(11) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cot \frac{4\pi}{3}$ **(12)** $\sqrt{2} \sec\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
(13) $\frac{3}{4} \tan\left(\cos^{-1} \frac{4}{5}\right)$ **(14)** $60^\circ \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$

(15) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ فأوجد كلاً من: $\cos \theta$, $\sin \theta$:
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
	الدروس: 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6, 8-7, 8-8		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)		
	مشروع الفصل، ص (154)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

استعمال الآلة الحاسبة العلمية

تعدّ الآلات الحاسبة العلمية والآلات الحاسبة البيانية من الأدوات المهمة والفاعلة في حل المسائل. كما لاحظت سابقاً فإن بعض أسئلة الاختبارات تتضمن خطوات أو حسابات تحتاج فيها إلى استعمال الآلة الحاسبة العلمية.

استراتيجية استعمال الآلة الحاسبة العلمية

الخطوة 1

تعرّف الدوال المختلفة في الآلة الحاسبة العلمية جيداً، ومتى تستعمل كلًّا منها.

- الصيغة العلمية: للحسابات المتعلقة بالأعداد الكبيرة.
- الدوال الأسية، مسائل النمو والاضمحلال والربح المركب.
- الدوال المثلثية، مسائل تتضمن زوايا، ومسائل ترتبط بحل المثلث، ومسائل في القياس غير المباشر.
- الجذور التربيعية والنونية، مسائل ترتبط بالبعد في المستوى الإحداثي، ومسائل ترتبط بنظرية فيثاغورس.

الخطوة 2

استعمل الآلة الحاسبة العلمية لحل المسائل.

- تذكر أن تعمل بالصورة الأكثر فاعلية، فبعض الخطوات يمكن القيام بها ذهنيًا أو يدويًا، وفي بعضها الآخر يلزم استعمال الآلة الحاسبة العلمية.
- تحقّق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بذلك.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها:

عندما وقف محمد على بُعد 18 ft من قاعدة شجرة، شكّل زاوية قياسها 57° مع قمة الشجرة. ما ارتفاع الشجرة مقرباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

- A 27.7 ft
B 28.5 ft
C 29.2 ft
D 30.1 ft

1 التركيز

هدف استعمال استراتيجية توظيف الآلة الحاسبة العلمية؛ لحل مسائل الاختبار المعيارية.

2 التدريس

سؤال التعزيز
سأل:

هل استعملت الآلة الحاسبة العلمية؛ لحل جميع مسائل الاختبار المعيارية؟ **إجابة** ممكنة: لا؛ بعض المسائل يكون حلها ذهنيًا أو يدويًا أكثر فاعلية.

ما أنواع المسائل التي يساعد استعمال الآلة الحاسبة العلمية على حلّها أكثر من غيرها؟ **إجابة** ممكنة: يساعد استعمال الآلة الحاسبة العلمية على حل المسائل التي تتضمن: حسابات معقدة، دوال مثلثية، دوال أسية، دوال مثلثية عكسية، جذور تربيعية، أكثر من غيرها.

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

من قمة جبل ارتفاعه 100 متر،
قيست زاوية انخفاض قارب يبعد
160 مترًا عن قاعدة الجبل. أوجد
قياس هذه الزاوية. **D**

A 32°

B 38.7°

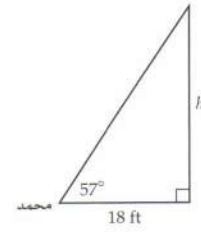
C 51.3°

D 58°

3 التقويم

استعمل التمرينين 2، 1؛ لتقويم مدى فهم
الطلبة.

اقرأ المسألة بعناية. أعطيت بعض القياسات، وطلب إليك إيجاد ارتفاع الشجرة. إذن من المفيد في البداية أن
ترسم مخططًا يُمثل المسألة.



استعمل دالة مثلثية لكتابة علاقة تربط الطولين بقياس الزاوية في المثلث القائم الزاوية.

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

دالة الظل

$$\tan 57^\circ = \frac{h}{18}$$

بالتعويض

لإيجاد ارتفاع الشجرة h تحتاج إلى إيجاد قيمة $\tan 57^\circ$. استعمل الآلة الحاسبة العلمية.

$$1.53986 \approx \frac{h}{18}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$27.71748 \approx h$$

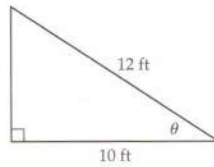
بضرب الطرفين في 18

يبلغ ارتفاع الشجرة 27.7 ft تقريبًا؛ إذن الإجابة الصحيحة هي **A**.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة
لحلها:

(2) ما زاوية ارتفاع المنحدر الذي يُمثله الشكل أدناه؟ **J**



F 26.3°

G 28.5°

H 30.4°

J 33.6°

(1) تقلع طائرة من المطار بسرعة ثابتة. بعد أن قطعت الطائرة مسافة
أفقية مقدارها 800 m كانت على ارتفاع 285 m رأسياً. ما زاوية
ارتفاع الطائرة خلال الإقلاع؟ **C**

B 18.4°

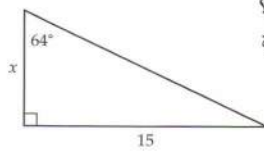
A 15.6°

D 22.3°

C 19.6°

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:



(1) ما قيمة x في الشكل المجاور؟

قرب إلى أقرب جزء من عشرة

إذا لزم. D

6.5 A

6.9 B

7.1 C

7.3 D

(2) ما طول الدورة في التمثيل البياني للدالة: $y = 3 \cos 4\theta$ ؟ A

90° A

180° B

270° C

360° D

(3) تتكون مجموعة حل المعادلة $\sqrt{8x+1} - 4 = 1 - 2x$ من:

من: B

عددين صحيحين موجبين. A

عدد صحيح موجب واحد فقط. B

عددين صحيحين أحدهما موجب والآخر سالب. C

ليس لها حلول حقيقية. D

(4) ما القيمة الدقيقة لـ $\sin 240^\circ$ ؟ C

$-\frac{1}{2}$ A

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ B

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D

(5) المقدار $i^{50} + i^{51} + i^{53}$ يساوي: C

i A

$-i$ B

-1 C

0 D

(6) ما قيمة m في المثلث MNO الذي فيه:

$m = 12.4$ cm, $M = 35^\circ$, $N = 74^\circ$

عشرة. A

7.4 cm A

8.5 cm B

14.6 cm C

35.9 cm D

(7) أوجد قيمة المحددة: C

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

-144 A

-72 B

72 C

144 D

(8) إذا كان $(x+1)$ عاملاً لكثيرة الحدود

$P(x) = x^3 + Kx^2 + 2Kx - 2$ ، فإن قيمة K تساوي: C

6 A

$\frac{1}{3}$ B

-3 C

3 D

(9) ما باقي قسمة $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟ C

-11 A

1 B

-1 C

11 D

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة عن كل سؤال، فقد تشير

هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء

مفاهيمية، مثل:

(1) A استعمال جيب التمام بدلاً من الظل

B خَمَّن

C قَرَّب بصورة خاطئة

D صحيحة

(2) A صحيحة

B خَمَّن

C أوجد $\frac{3}{4} \times 360^\circ$

D استعمال $\cos 4\theta$ بدلاً من $\cos \theta$

(3) A لم يستبعد الحل الغريب.

B صحيحة

C أخطأ في التحليل

D خَمَّن

(4) A أوجد $\cos 240^\circ$

B خَمَّن

C صحيحة

D أوجد $\sin 120^\circ$

(5) A أخطأ في حساب قوى i

B أخطأ في حساب قوى i

C صحيحة

D أخطأ في حساب قوى i

(6) A صحيحة

B خَمَّن

C أخطأ في استعمال قياسات الزوايا مع

قياسات الأضلاع

D أخطأ في استعمال قياسات الزوايا مع

قياسات الأضلاع

(7) A طرح حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس

من حاصل ضرب عناصر القطر الآخر

B أخطأ في الإشارة

C صحيحة

D أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس

وطرح منها حاصل ضرب عناصر القطر

الآخر

(8) A أخطأ في التعويض

B أخطأ في التعويض

C صحيحة

D أخطأ في التعويض

(9) A أخطأ في خوارزمية القسمة

B أخطأ في خوارزمية القسمة

C صحيحة

D أوجد قيمة $x^3 - 7x + 5$ عندما $x = 3$

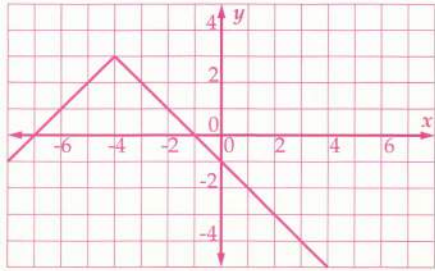
التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة.

إجابة:

(12b) مشترك، إجابة ممكنة: كمية العشب اللازمة تعتمد على عدد الأيام وعدد الأحصنة معاً.

(16a)



(14) إذا كان $C = AB$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة العنصر C_{32} (العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني من C). -5

(15) يتكرر نمط المربعات أدناه إلى ما لانهاية من خلال إضافة مربعات جديدة. ما عدد المربعات في الخطوة رقم 10؟ 22

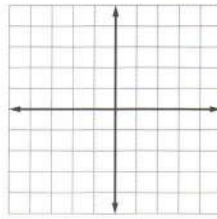


إجابة طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضِّحاً خطوات الحل:

(16) إذا كان $f(x) = -|x + 4| + 3$.

(a) مثل الدالة $f(x)$ بيانياً. انظر الهامش



- (b) حدد مجال الدالة ومداها. المدى $\{f(x) | f(x) \leq 3\}$
(c) أوجد المقاطع للمحاور x, y . مقطعا المحور x هما $-1, -7$ ، ومقطع المحور y هو -1

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(10) تعتمد سرعة موجة المد (تسونامي) v على معدل عمق مياه البحر. إذا علمت أن الصيغة الآتية تُمثل سرعة المد عندما يكون معدل عمق الماء d كيلومتراً، $v = 356\sqrt{d}$ ، وإذا علمت أن موجة المد (تسونامي) تسير بسرعة 145 km/h ، فما معدل عمق الماء؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من مئة. 0.17 km

(11) أوجد معكوس $g(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ $\cdot \frac{x+1}{3-2x}$

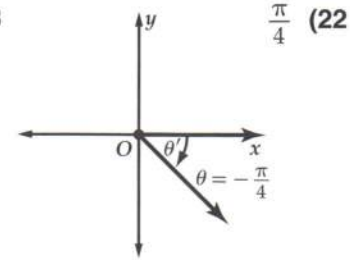
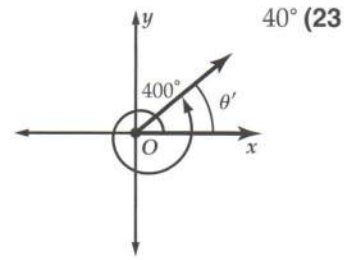
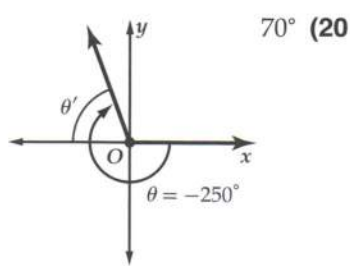
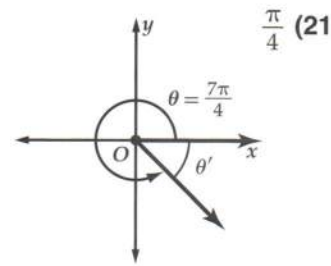
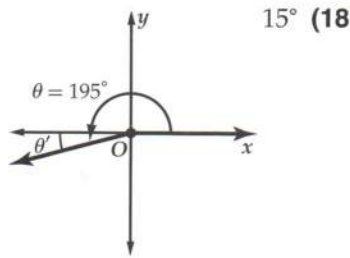
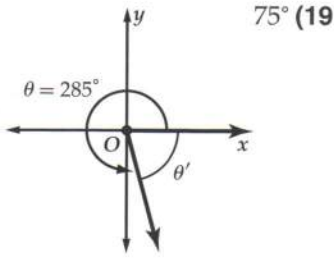
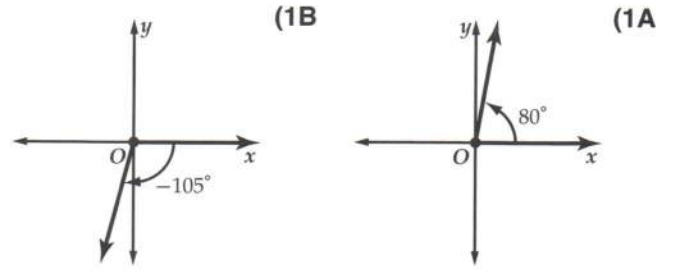
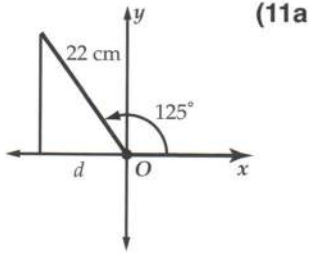
(12) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كل يوم كي يكون في صحة جيدة.

- (a) اكتب صيغة تمثل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصاناً مدة d يوماً. $h = 10xd$
(b) هل الصيغة التي وضعتها صيغة تُمثل تغيُّراً طردياً أم مشتركاً أم عكسياً؟ فسر إجابتك. انظر الهامش
(c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟ 210 رطلاً

(13) إذا كان $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ، فأوجد قيمة $(f \circ g)\left(\frac{11}{2}\right)$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1-3	6-2	2-3	4-1	5-5	4-2	4-3	3-4	3-7	2-4	8-4	3-1	8-3	4-7	8-7	8-1



(47) استعمال تناسب.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس الزاوية المركزية}}{\text{قياس الدورة الكاملة}}$$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$$

بالتعويض بالضرب التبادلي $2\pi r \theta = 2\pi s$

بقسمة طرفي المعادلة على 2π $r\theta = s$

(50) $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{205}} = \frac{3\sqrt{205}}{205}, \cos \theta = \frac{14}{\sqrt{205}} = \frac{14\sqrt{205}}{205},$

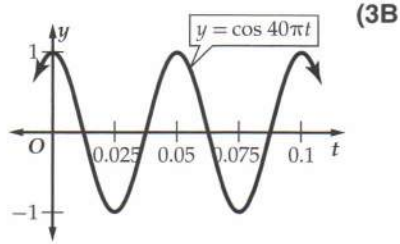
$\tan \theta = \frac{3}{14}, \csc \theta = \frac{\sqrt{205}}{3}, \sec \theta = \frac{\sqrt{205}}{14}, \cot \theta = \frac{14}{3}$

(51) $\sin \theta = \frac{\sqrt{259}}{22}, \cos \theta = \frac{15}{22}, \tan \theta = \frac{\sqrt{259}}{15}, \csc \theta = \frac{22}{\sqrt{259}}$

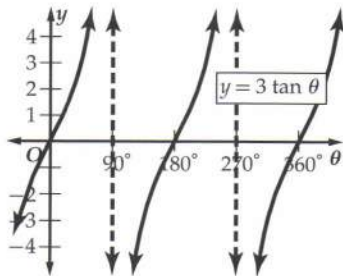
$= \frac{22\sqrt{259}}{259}, \sec \theta = \frac{22}{15}, \cot \theta = \frac{15}{\sqrt{259}} = \frac{15\sqrt{259}}{259}$

(52) $\sin \theta = \frac{11}{\sqrt{290}} = \frac{11\sqrt{290}}{290}, \cos \theta = \frac{13}{\sqrt{290}} = \frac{13\sqrt{290}}{290},$

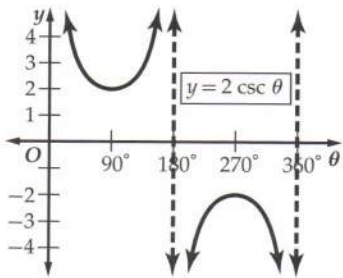
$\tan \theta = \frac{11}{13}, \csc \theta = \frac{\sqrt{290}}{11}, \sec \theta = \frac{\sqrt{290}}{13}, \cot \theta = \frac{13}{11}$



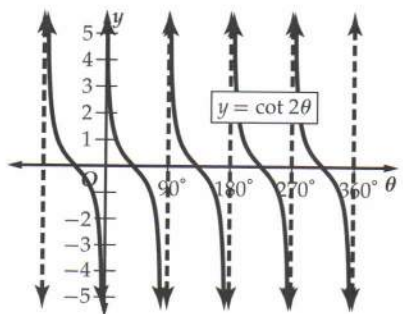
(6) طول الدورة: 180°



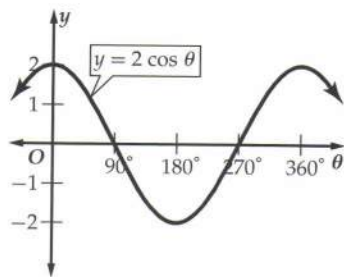
(7) طول الدورة: 360°



(8) طول الدورة: 90°



(9) السعة: 2؛ طول الدورة: 360°

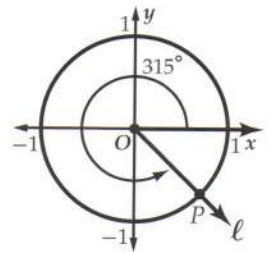
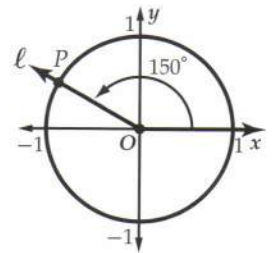
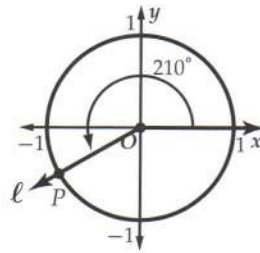
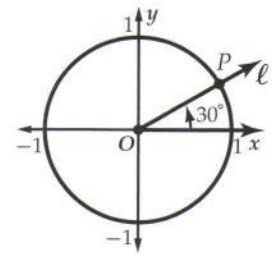
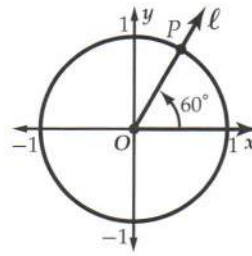


(12) $\sin \theta = -1, \cos \theta = 0, \tan \theta$ غير معرف, $\csc \theta = -1,$
 $\sec \theta$ غير معرف, $\cot \theta = 0$

(13) $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}, \csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3},$
 $\cot \theta = \frac{3}{4}$

(15) حلان: $C = 59^\circ, B = 83^\circ, b = 29.0$ أو
 $C = 121^\circ, B = 21^\circ, b = 10.5$

(25a)



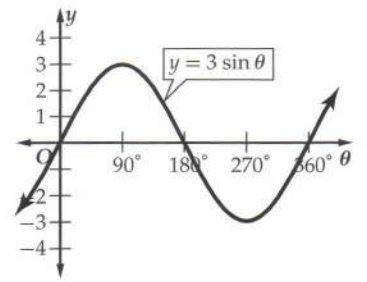
(25b)

الميل	الزاوية
0.6	30°
1.7	60°
-1.7	120°
-0.6	150°
0.6	210°
-1	315°

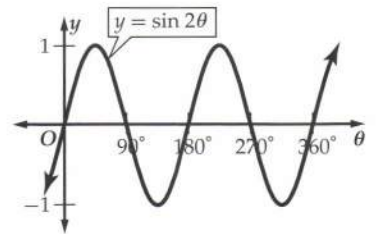
(25c) إجابة ممكنة: الميل هو ظل الزاوية. إذا كانت $\theta = 120^\circ$ ، فإن

الإحداثي x للنقطة P هو $-\frac{1}{2}$ والإحداثي y هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ الميل هو $\frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x}$ وبما أن التغير في x هو $-\frac{1}{2}$ والتغير في y هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فإن $\frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$ وهو ظل الزاوية.

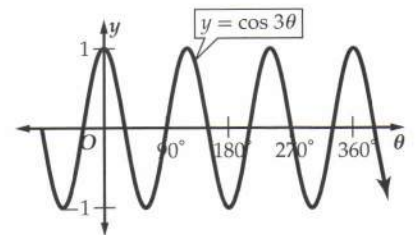
(10) السعة: 3؛ طول الدورة: 360°



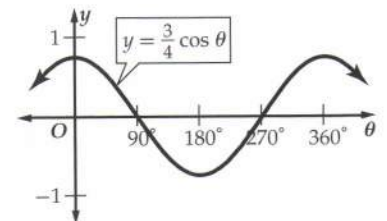
(11) السعة: 1؛ طول الدورة: 180°



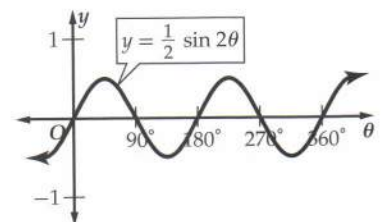
(12) السعة: 1؛ طول الدورة: 120°



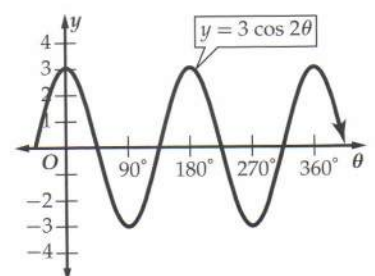
(13) السعة: $\frac{3}{4}$ ؛ طول الدورة: 360°



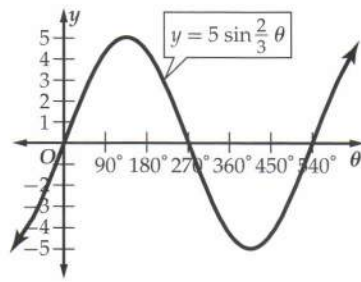
(14) السعة: $\frac{1}{2}$ ؛ طول الدورة: 180°



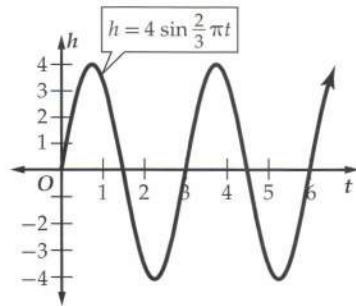
(15) السعة: 3؛ طول الدورة: 180°



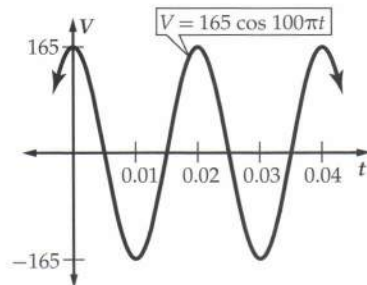
(16) السعة: 5؛ طول الدورة: 540°



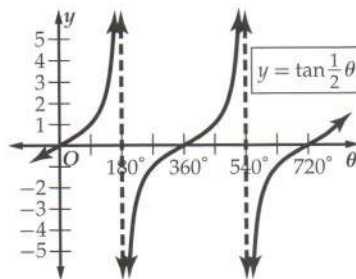
(17)



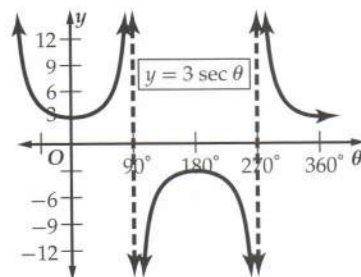
(18)



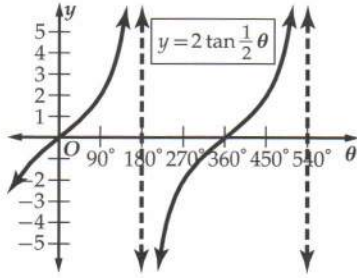
(19) طول الدورة: 360°



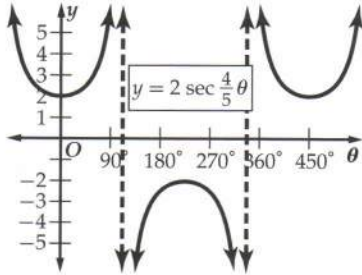
(20) طول الدورة: 360°



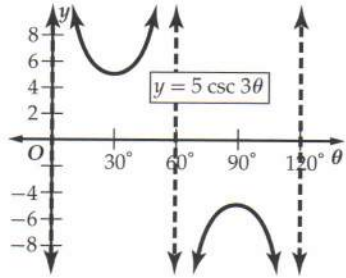
(27) ليس له سعة، طول الدورة: 360°



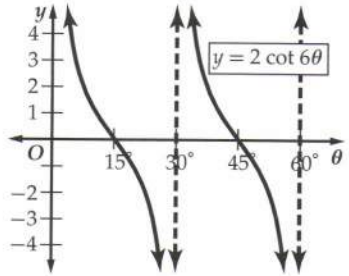
(28) ليس له سعة، طول الدورة: 450°



(29) ليس له سعة، طول الدورة: 120°

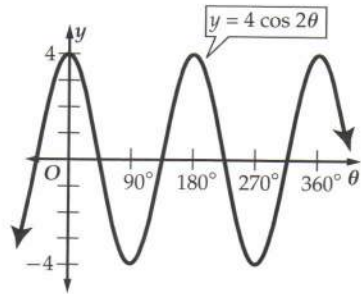


(30) ليس له سعة، طول الدورة: 30°

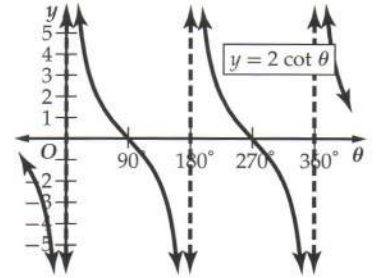


الدرس 8-8، ص 211 :

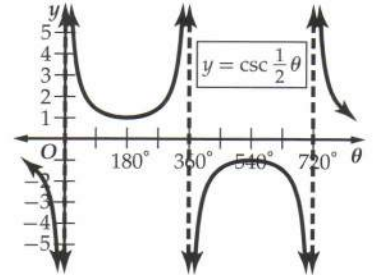
(43) السعة 4، طول الدورة 180°



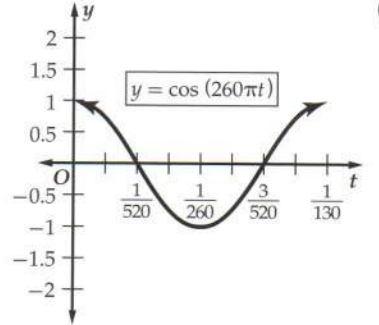
(21) طول الدورة: 180°



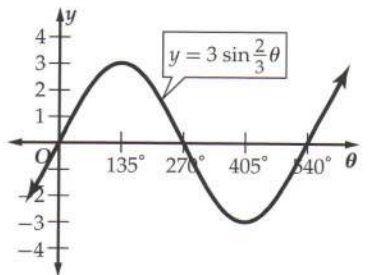
(22) طول الدورة: 720°



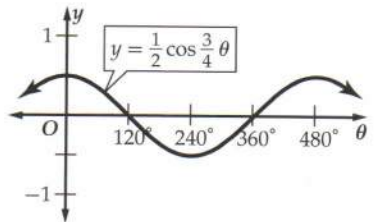
(24)



(25) السعة: 3؛ طول الدورة: 540°



(26) السعة: $\frac{1}{2}$ ؛ طول الدورة: 480°





الرياضيات

المحتويات

- ❖ الفصل الخامس:
العلاقات والدوال النسبية
- ❖ الفصل السادس:
المتتابعات والمتسلسلات
- ❖ الفصل السابع:
الاحتمالات
- ❖ الفصل الثامن:
حساب المثلثات